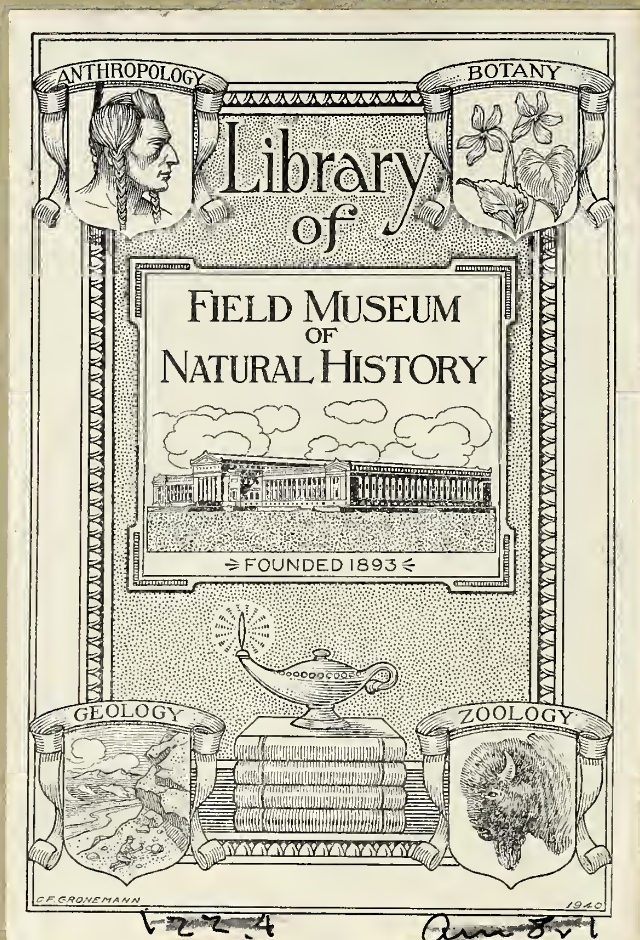

THE FIELD MUSEUM LIBRARY
3 5711 00073 7438


ANTHROPOLOGY
BOTANY
Library of
FIELD MUSEUM OF NATURAL HISTORY
FOUNDED 1893
GEOLOGY
ZOOLOGY
C.F. GRONEMANN
1940

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

- VAN 31 MEI 1919 -
TOT 23 APRIL 1920

DEEL XXVIII

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
JULI 1920

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

- VAN 31 MEI 1919 -
TOT 29 NOVEMBER 1919

DEEL XXVIII
(1STE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
: : FEBRUARI 1920 : :

INHOUD.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 31 MEI 1919.

DEEL XXVIII.

N°. 1.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Missive van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 16 Mei 1919 met bericht dat H. M. de Koningin bekrachtigd heeft de benoeming van de Heeren P. EHRENFEST, A. A. HIJMANS VAN DEN BERGH, R. MAGNUS en EUG. DUBOIS tot *gewone* leden, van de Heeren SV. ARRHENIUS, D. HILBERT, AXEL HOLST, LUIGI LUCIANI, P. SABATIER en D. H. SCOTT tot *buitenlandsche* leden en van de Heeren C. BRAAK, L. RUTTEN en O. DE VRIES tot *correspondenten* der Afdeeling.

Aangenomen voor kennisgeving.

2°. Brieven van de nieuwbenoemde *gewone* leden, de Heeren EHRENFEST, HIJMANS VAN DEN BERGH, MAGNUS en DUBOIS en van de nieuwbenoemde *buitenlandsche* leden, de Heeren SV. ARRHENIUS en D. H. SCOTT, dat zij de benoeming met erkentelijkheid aanvaarden.

Aangenomen voor kennisgeving.

De Voorzitter heet de nieuwbenoemde *gewone* leden, die allen ter vergadering aanwezig zijn, welkom en installeert hen met eenige woorden van waardeering, waarbij hij uiting geeft aan de verwachting der Afdeeling dat hun deelnemen aan de wetenschappelijke werkzaamheden der Akademie den bloei dier instelling zal helpen bevorderen.

Scheikunde. — Namens de daartoe aangewezen Commissie brengt de Heer P. VAN ROMBURGH het volgende prae-advies uit:

Aan de Wis- en Natuurkundige Afdeeling van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

Gevolg gevende aan het verzoek om prae-advies uit te brengen nopens de uitnoodiging van het Ramsay Memorial Fund tot deelneming door Nederland aan de te stichten Ramsay Memorial Fellowships, hebben de ondergeteekenden de eer het volgende ter kennis te brengen van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Indien de Nederlandsche Regeering haren steun verleent bij het instellen der bedoelde Fellowships, zou daardoor steeds een Nederlandsch chemicus in de gelegenheid zijn gesteld zich in Engeland gedurende zekeren tijd geheel aan wetenschappelijken laboratoriumsarbeid te wijden, onder genot eener toelage van £ 300.

Hiermede zoude dus voor de chemie dezelfde weg worden betreden, die reeds sinds jaren voor de medische wetenschappen (bezoek der laboratoria op den Col d'Olen), de zoölogie (bezoek van het laboratorium te Napels) en de botanie (bezoek aan 's lands Plantentuin) is gevolgd. Overweegt men, dat tot dusverre op de staatsbegrooting nooit middelen zijn uitgetrokken geweest om studiereizen, als de hier bedoelde, voor chemici mogelijk te maken, en dat juist in den allerlaatsten tijd van verschillende zijden de aandacht van de Regeering op het groote nut daarvan is gevestigd, waarbij werd verzocht dergelijke reizen van Rijkswege mogelijk te maken, dan ligt het voor de hand den Minister met den meest mogelijken aandrang te verzoeken, het daarheen te leiden, dat ook Nederland deelneme aan het stichten der Ramsay Memorial Fellowships, zoo mogelijk op zoodanige wijze, dat de Regeering de beschikking verkrijgt over meer dan een Fellowship.

(get.) F. M. JAEGER.
,, J. BÖESEKEN.
,, F. A. H. SCHREINEMAKERS.
,, ERNST COHEN.
,, P. VAN ROMBURGH.

De vergadering neemt dit prae-advies ongewijzigd over. Het zal als antwoord der Afdeeling aan den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen worden medegedeeld.

Physiologie. — De Heer WINKLER doet eene mededeeling: *„Over Cyclopie met behoud van het Rhinencephalon"*.

In de Februari-zitting dezer Afdeeling in 1916 [1]) deelde ik ervaringen mede, opgedaan bij het onderzoek der hersenen van drie cyclopen.

Toen wees ik er op, dat de kenmerkende afwijking dezer hersenen is de aanwezigheid van een dunnen zak, waarvan de wand bestond uit het dak van den door vocht sterk uitgezetten derden ventrikel.

SCHWALBE's uitspraak „das Vorderhirn ist bei den Cyclopen nie in Hemisphären geteilt" moest ik bestrijden, want in alle gevallen waren beide hemisphaeren aan het occipitale einde goed gedifferentieerd. Wel hingen zij aan den voorpool met elkander samen, ofschoon in één der toen beschreven gevallen een fissura sagittalis ook aan den frontalen hemisphaerenpool aanwezig was.

Ik ontkende dus, dat men aan het onderzoek der hersenen het recht mocht ontleenen om de terminatie-periode der cyclopie te plaatsen in een tijdperk voorafgaand aan dat, waarin de overlangsche splijting van het telencephalon tot stand komt.

Ook de stelling dat cyclopie onvermijdelijk aan arhinencephalie gepaard is, kon ik slechts onder zeker voorbehoud aanvaarden.

In alle door mij onderzochte gevallen ontbraken wel is waar de bulbi olfactorii en de lobi olfactorii anteriores. Maar de lobi olfactorii posteriores werden teruggevonden langs de mediane lijn der hersenbasis. Daar waren zij nevens elkander geplaatst omdat het tusschen in gelegen gedeelte van de hersenbasis ontbrak. Cyclopen-hersenen zijn partieel arhinencephaal.

Sedert heb ik verscheidene, onderling zeer verschillende gevallen van cyclopie onderzocht en het is mij daarbij gebleken, dat een andere misvorming, de z.g. synotie in het nauwste verband staat met de cyclopische misvorming en herhaaldelijk met deze te samen wordt waargenomen.

Door de welwillende meêwerking van Prof. KOUWER en van Dr. VERMEULEN kreeg ik de beschikking over eenige soortgelijke monstra.

1°. Een menschenfoetus met synotie. (neus, oogen en bovenkaak bestaan. Aanduiding van een mond. Geen onderkaak. In de middel-

---

[1]) C. WINKLER. Verslagen der K. Ak. v. Wet. Febr. 1916.

lijn samenhangende ooren. Bij dit wezen de hersenen ongelukkiger wijze verongelukt).

2°. een foetus van een varken met cebocephalie (slurf, twee geheel gescheiden oogen in één oogkas).

3°. een foetus van een schaap met cyclopia incompleta (één langwerpig oog met haltervormige pupil en twee N. optici, geen met het bloote oog zichtbare slurf, ofschoon de X-photo een os nasale leert kennen).

4°. een foetus van een kalf met bijna complete cyclopie (één langwerpig oog met haltervormige pupil, twee dicht aaneenliggende N. optici, geen slurf).

5°. een foetus van een kalf met cyclopia incompleta en synotie (twee met elkaar vergroeide oogen in den wenkbrauwkring, geen slurf. Een mondopening, naar boven begrensd door een stevige bovenkaak (X-photo). Geen onderkaak (X-photo), geen tong. Het tongbeen is volledig gevormd (X-photo). De ooren hangen in de middellijn samen).

6°. een foetus van een schaap met synotie. (Een kleine slurf, geen oogen, geen kaken, geen mond of tong. Wel een tongbeen (X-photo). Het dier is dus anophthalm, agnaath, aprosoop. De ooren hangen in de middellijn samen. Larynx en pharynx eindigen naar boven in een blinden zak. Geen glandula thyreoidea).

7°. Een foetus van een schaap met cyclopie en synotie, waarover deze mededeeling handelt.

In al de onderzochte hersenen wordt een vliezige zak gevonden, die zich door aanhechting aan de epiphyse, aan taenia thalami en randboog ontpopt als het dak van den door vocht zeer verwijden 3^den^ ventrikel. Daaraan werden echter aan het frontale en aan het occipitale einde wel eens bizonderheden waargenomen. In N°. 5 en N°. 6 bijv. ging de zak over in den eveneens dunnen wand van het telencephalon en in N°. 7 maakte aan het distale einde het vliezige dak van mesencephalon en cerebellum deel uit van den zak. De zak is niet alleen voor de hersenen van cyclopen maar ook voor die van synoten kenmerkend.

Elders zal ik deze bizonderheden meer gedetailleerd beschrijven.

Hier is het mijn voornemen stil te staan bij het monstrum, dat sub N°. 7 is genoemd. Het mag als een voorbeeld gelden van een cyclopische misvorming, die in het bezit is van een volledig rhinencephalon en het maant daardoor reeds tot groote voorzichtigheid bij de beoordeeling der cyclopie.

Een blik op de teekening van dit wezen, zooals het van voren wordt gezien (fig. 1) leert ons, dat het dier in het bezit is van een

volledigen neus met neusgaten. Daaronder volgt de door de 4 oogleden omkringde holte, waarin de twee vereenigde oogen zijn geplaatst, met een kleiner linker en een grooter rechter oog. Kaken,



Fig. 1.

Teekening naar een photo van een schapen-foetus met cebo-cephalie en synotie Het monstrum bezit een goed gevormden en volledig ontwikkelden neus boven de twée in een vier-wenkbrauw-kring gelegen oogen Men vindt de beide mediale carunkels daarin terug. De ooren zijn aan elkaar gegroeid.

mond en tong ontbreken. Vlak onder de oogen liggen de twee ooren in de middellijn tegen elkander en de beide uitwendige gehoorgangen bezitten een gezamenlijke opening. Pharynx en larynx

zijn goed ontwikkeld en hangen samen in een naar boven blind eindigende holte.

De X-photo bevestigt, dat de kaken geheel zijn verdwenen, maar leert tevens, dat het tongbeen gaaf ontwikkeld is. Bovendien leert de X-photo, dat het os ethmoidale in zijn geheel aanwezig is. Crista galli, lamina cribrosa, lamina papyracea en het labyrinth van het ethmoied kunnen worden onderscheiden. Reeds voor het uitnemen der hersenen wist ik dus, dat deze cycloop niet kon zijn ontstaan door het verdwijnen van het zeefbeen en van den medialen oogkuilswand.



Fig. 2.

Teekening van de bovenvlakte der hersenen van het in fig. 1 afgebeelde monstrum. De zak (*a*) is zichtbaar. Hij is met de dura mater (*b*) vergroeid. Aan het distale einde (*c*) gaat hij over in het als een dun vlies aanwezige mesencephalon en cerebellum. Door dit vlies heen schemert de tela in den vierden ventrikel door.

Bij het uitnemen der hersenen wordt men dadelijk getroffen door de aanwezigheid van den zak (fig. 2*a*), die met de dura mater is vergroeid (fig. 2*b*) en waarvan het uitgangspunt de epiphyse, die vrij ligt, schijnt te zijn. Daarachter vindt men echter niets van een

mesencephalon of van een cerebellum. De zak breidt zich in occipitale richting uit en door haar heen schemert de tela van den 4[den] ventrikel door (fig. 2 *c.*). Daartegenover staat dat de beide hemisphaeren goed zijn ontwikkeld. Er is een diepe fissura sagittalis, waarin zich de dura-duplicateur met zijn sinus bevindt, welke van de crista galli moet worden afgeknipt om haar verwijdering mogelijk te maken.

Beziet men de basale hersenvlakte (fig. 3) dan wordt men getroffen door de aanwezigheid van twee wel ontwikkelde bulbi olfactorii met tractus, lobus olfactorius anterior, posterior en ammonshoorn, kortom van een volledig ontwikkeld rhinencephalon.

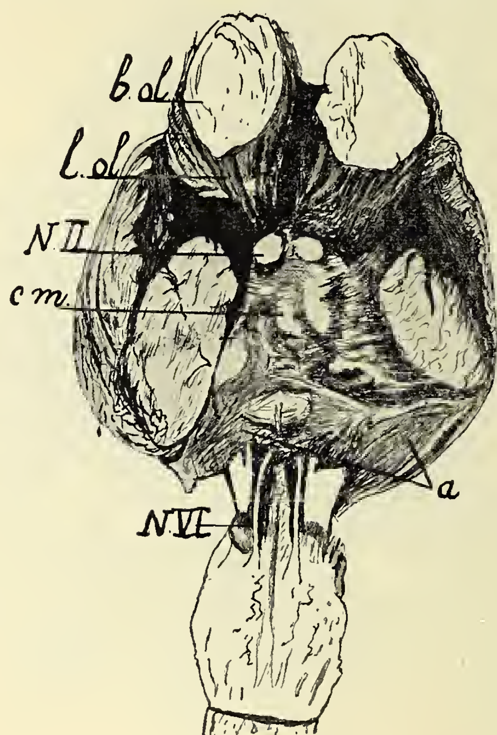


Fig. 3.

Teekening der basale hersenvlakte van het in fig. 1 afgebeelde monstrum *a.* de plaats waar het defect in den hersensteel door een dun vlies is bedekt. *b ol.* = bulbus olfactorius. *l. ol.* = lobus olfactorius. *N. II* = Nervi optici *c. m* = doorschemerend corpus mammillare. *N. VI.* = Nervus abducens.

Er zijn twee N. optici (fig. 3, N. II). Het corpus mammillare schemert door de pia mater heen. Van de hersenzenuwen is de N. abducens met stelligheid te bepalen. Met de proximaal daarvan gelegen zenuw is dit niet het geval. Eerst bij de beschrijving van het mikroskopisch beeld wordt bepaald, dat het de N. trigeminus is. Tusschen deze beide krachtige zenuwen is de massieve hersen-

basis vervangen door een vlies, dat slechts door de uiterste zorg bij het uitnemen gespaard is gebleven.

Zoodra men van de dorsale zijde uit, den zak openknipt en hem terugslaat, neemt men waar, dat er een plaatselijk defect is in de hersenbasis, ongeveer ter breedte van 1 cM. Daar wordt de hersenbasis gevormd door een vlies van hoogstens 1 mM. dik, waarin eenige witte zenuwstrengen van de middellijn uit divergeeren naar een proximaal gelegen massieven knobbel zenuwweefsel. De knobbel, stamganglia en thalamencephalon, ziet men aan de basis in fig. 3 door de pia bedekt doorschemeren. Er is een continuiteitsonderbreking in de hersenbasis ter hoogte van de hersensteelen.

Zeer merkwaardig is de beenige schedelbasis. De crista galli springt naar voren. Aan weêrszijden daarvan draagt de lamina cribrosa de bulbi olfactorii, die er de fila olfactoria door heen zenden. Bovendien ziet men de foramina optica nog normaal gevormd, alsmede het voorste stuk van het wiggebeen. Dan echter ontbreekt de sella turcica met de hypophyse en is de schedelbasis daar gemakkelijk beweeglijk.

Een van boven genomen X-photo geeft de verklaring. Er is een groot hiaat in de beenige schedelbasis. Het achterste deel van het wiggebeen ontbreekt en in de middellijn is het voorste stuk van den clivus tot aan de boog van den atlas weggevallen. De rotsbeenderen staan intact. Kaken zijn er niet. Door het verlies der facies orbitalis van de bovenkaak zijn de oogen naar beneden gezonken. Zij liggen niet langer in een beenigen oogkuil. De lamina papyracea van het zeefbeen staat proximaal van het dubbeloog en is dientengevolge in de X-photo gemakkelijk herkenbaar.

De oogen zijn niet tot elkander genaderd doordat de mediale oogkaswand vernietigd is, maar omdat de onderwand van de oogkas ontbreekt. Dit cyclope monstrum is in het volledig bezit van een rhinencephalon, maar tevens wordt het door het verlies van de onderkaak enz. synoot.

Komt men nu tot de vraag, hoe zulk een monstrum ontstaat, dan zal men moeten toegeven, dat er voor hem, die een te kort aan kiemmateriaal wil blijven verdedigen onafzienbare moeilijkheden rijzen.

Eenvoudiger is de voorstelling, die den zak tot uitgangspunt neemt. Het pathologisch proces dat den zak in het leven roept (en hij wordt in alle gevallen van deze soort gevonden) is eenerzijds in staat om aan de dorsale zijde het mesencephalon en het cerebellum te vernietigen, als zij zijn uitbreiding in den weg staan.

Maar aan de ventrale zijde vernietigt het de hersensteelen lokaal en tevens het daaronder liggende kiemweefsel, waaruit kaken, mond

en tong zich zullen vormen. Op geleide van den 2^{den} kieuwboog (het tongbeen was in alle 3 gevallen van synotie intact) wordt alles vernield wat zich ontwikkelen zal uit den 1sten kieuwboog (behalve soms van gehoorbeentjes) en uit het proximaal daarvan gelegen weefsel, tot aan de sella turcica toe.

Het lokaal defect in hersensteelen en in schedelbasis is hier sprekend.

In den in mijn vorige meêdeeling ontwikkelden gedachtengang stel ik mij een plaatselijk ontstekingsproces voor als oorzaak van den zak, die door mechanische werking het defect aan de hersen- en schedelbasis veroorzaakt.

Daarbij ben ik echter niet blind voor de mogelijkheid, dat de zak en het basale defect co-effecten kunnen zijn eener diep liggende oorzaak.

In debatten daarover in Leiden gevoerd is door Dr. MURK JANSSEN de mogelijkheid bepleit, dat een te nauw amnion, zoowel de zak als het defect kan teweegbrengen, als dit den kop van het embryo in een bepaald vlak knelt. Het gevolg daarvan kan het afsterven van het kiemende weefsel zijn.

Ware dit het geval, dan zouden zich nog verschillende mogelijkheden laten denken, waarop ik echter nu nog niet wil ingaan.

Maar dit wensch ik vast te houden.

Weefselvernietiging aan het proximale schedeleinde, waardoor het ethmoied niet wordt gevormd en cyclopie ontstaat is niet de eenige defectvorming die voorkomt. Er is een andere plaats van praedilectie, waarbij door ziekteprocessen de 1ste kieuwboog vernietigd wordt. Zij voeren tot synotie.

Soms komt dit geïsoleerd voor. Dan is er synotie met aanwezigheid van bovenkaak, ongeschonden oogen en neus, zooals in het menschelijk sub 1 genoemde foetus.

Soms komen de twee lokale processen onafhankelijk van elkander, naast elkander voor. Dan ontstaan cyclope en synote misvormingen met tusschengelegen intacte bovenkaak, zooals bij het monstrum dat sub 5 werd genoemd.

Soms ook worden beide defecten tot een massale spleet en komen de monstra tot stand, zooals sub 4 werd geschetst, n.l. synotie met anophthalmie, aprospie en agnatie.

De rij der cyclope misvormingen sluit aan die der synote misvormingen. Een in die rij is bizonder merkwaardig, omdat daardoor synotie ontstaat met den cebocephalen vorm der cyclopie, een cyclopie, waarbij een volkomen gaaf rhinencephalon wordt aangetroffen. Mij komt het niet ondenkbaar voor, dat door defecten, die den 1sten kieuwboog sparen maar alleen de bovenkaak vernielen, incomplete cyclopie met volledig rhinencephalon zal kunnen ontstaan.

Physiologie. — De Heer H. ZWAARDEMAKER biedt, mede uit naam van den Heer H. ZEEHUISEN, een mededeeling aan: „*Over den samenhang bij reukstoffen tusschen het electrisch ladingsverschijnsel bij verstuiving en de intensiteit van den geur*".

In vroegere mededeelingen [1]) is het electrisch laadvermogen bij verstuiving van de reukstoffen en van een groot aantal saponinen en antipyretica behandeld. De eerste rubriek, de reukstoffen, vertoont het ladingsverschijnsel in de sterkste mate. Daarna volgen de tweede en de derde rubriek. De oplosbaarheid der individueele stoffen in water oefent echter een grooten invloed op het resultaat uit, in zooverre als dit laatste alleen dan eenigszins aanzienlijk kan zijn, indien een voldoend aantal moleculen in opgelosten staat in het water op het oogenblik van verstuiving aanwezig zijn. Enkel gesuspendeerde deeltjes zijn voor het verschijnsel waardeloos. Ter loops willen wij nog de aandacht vestigen op een vierde rubriek, die later uitvoerig ter sprake zal komen, n.l. de alcaloïden. Ook van deze geven vele het phenomeen, maar, daar in het algemeen hun oplosbaarheid minimaal is, kan het niet tot een hoogen graad geraken. Om een indruk te geven van de groote verschillen, die zich voordoen, wanneer men alle vier rubrieken in den gezichtskring trekt, zij opgemerkt, dat bij vergelijking b.v. van de lading eener verzadigde kamferoplossing met die van een verzadigde chinineoplossing, de eerste minstens 2-maal sterker blijkt dan de laatste. De reukstoffen blijven derhalve te midden der organische stoffen van physiologische werking altijd nog die, aan welke het sterkste laadvermogen toekomt. Zij leenen zich dus voor de verdere studie van het verschijnsel wel het best.

Vroeger is meegedeeld, dat in homologe reeksen een, met elkaar in intensiteit op en neer gaan, van ladingsvermogen en riekend vermogen kan worden vastgesteld. Om na te gaan welke verhouding in dit opzicht voor, over allerlei groepen en reeksen verspreide, reukstoffen bestaat, werden er 26 door ons zonder bepaalde orde, geheel willekeurig, gekozen en haar waterige oplossing zoodanig verdund, dat zij bij verstuiving een nauw merkbaar ladingsverschijn-

---

[1]) K. Akad. v. Wetensch. Amst. 25 Maart 1916, 27 Mei 1916, 30 Sept. 1916. 23 Febr. 1918, 29 Juni 1918. Arch. neérl. de physiol. T. 1, p. 347; Nederl, Tijdschr. v. Geneesk. 1918 II 980—982.

sel aanboden (met een electroscoop van matige gevoeligheid [1]) een uitslag van 0.1 à 0.2 schaaldeelen). In den eenvoudigen reukmeter onderzocht gaven deze oplossingen een zeer zwakken reukindruk, waarvan de sterkte zich gemakkelijk liet beoordeelen door vast te stellen over welke lengte de olfactometrische cylinder moest worden ontbloot om een minimum perceptibile te verschaffen. Tabel I*a* geeft de op deze wijze gevonden olfactiewaarden der oplossing, wanneer men de „Reizschwelle" tot richtsnoer neemt. Tabel I*b* vermeldt van dezelfde reukstoffen de lengten, waarover het voorschuiven van den

TABEL 1*a*.

Rangschikking der reukstoffen naar de reukintensiteit van oplossingen, die ongeveer gelijke, uiterst zwakke lading (0,1—0,2 deelstreep) geven.

Reukstoffen (van zwakriekend naar sterkriekend gerangschikt).	»Reizschelle" in centimeters uitschuiving in den eenvoudigen reukmeter.
Capronzuur	5
Kunstmuskus	1
Valeriaanzuur	1
Amylalcohol	1
Cumidine	1
Allylalcohol	1
Isoamylacetaat	0.5
Terpineol	0.5
Skatol	0.5
Indol	0.5
Pseudocumol	0.3
Xylol	0.3
o. Toluidine	0.2
Aniline	0.2
p. Xylenol	0.1
m. Xylidine	0.1
m. Toluidine	0.1
Thymol	0.1
Benzol	0.1
Toluol	0.1
Naphthaline	0.1
m. Xylenol	0.1
Guajacol	0.1
Nitrobenzol	0.1
Pyridine	0.1
Vanilline	0.05
Gemiddeld	0.54 c.M.

TABEL 1*b*.

Rangschikking der reukstoffen naar de »Erkenntenisschwelle" in oplossingen, die ongeveer gelijke, uiterst zwakke lading geven.

Reukstoffen (van zwak naar sterk gerangschikt).	»Erkenntnisschwelle" in c.M. uitschuiving in den eenvoudigen reukmeter.
Capronzuur	9
Kunstmuskus	8
Valeriaanzuur	5
Amylalcohol	5
Cumidine	5
p. Xylenol	5
Allylalcohol	3
m. Xylidine	2.5
o. Toluidine	1.5
p. Toluidine	1.5
Isoamylacetaat	1.3
Terpineol	1
Skatol	1
Pseudocumol	1
Aniline	1
Thymol	1
Benzol	1
Toluol	1
Xylol	0.6
Indol	0.5
Naphthaline	0.5
m. Xylenol	0.4
Guajacol	0.1
Nitrobenzol	0.1
Pyridine	0.1
Vanilline	0.1
Gemiddeld	2.16 c.M.

[1]) Een spanning van 220 volt gaf aan het instrument een uitslag van 10 schaaldeelen (Het had een capaciteit van ± 50 Electrostat. Eenheden).

cylinder moet plaats hebben, wanneer men in plaats van de „Reizschwelle" de „Empfindungsschwelle" opspoort. In het laatste geval geschiedt de beoordeeling wel is waar naar de intensiteit van de gewaarwording, maar niet zonder dat vooraf het psychologisch herkennen van de qualiteit verzekerd is geworden.

Gelijk men bespeurt, is de gemiddelde olfactiewaarde onzer 26 willekeurige reukstoffen in een verdunning, waarbij het laadvermogen aan de grens van waarneembaarheid geraakt, 0.52 cM. (naar het minimum perceptibile, zonder qualiteit, beoordeeld). De afwijkingen varieeren binnen het tienvoudige der middenwaarden.

Klaarblijkelijk valt de grens van waarneembaarheid van riekend vermogen ten naaste bij samen met de grens van waarneembaarheid van ladend vermogen. Wel is een zekere variatie-breedte voorhanden in de olfactiewaarden, terwijl het laadvermogen voor alle gelijk heet te zijn, maar ook dit laatste is niet volkomen, daar verschillen tusschen onderdeelen van een tiende deel over den electroscoop zich niet voldoende laten beoordeelen.

Een onzer heeft het vermoeden uitgesproken, dat zoowel de intensiteit van den geur als de intensiteit van het ladingsverschijnsel elk voor zich op min of meer samengestelde wijze zal afhangen:

a. van de vluchtigheid der stoffen,

b. van de verlaging der oppervlaktespanning van water, die zij te weeg brengen.

In dit verband is het van belang zoowel het kookpunt van de reukstoffen als het druppelgetal van de verdunde waterige oplossingen te leeren kennen. Onderstaande tabellen (II*a* en *b*) verschaffen deze gegevens. Een onmiddellijk verband kan er niet uit worden afgeleid. Wel kan een meer verwijderde samenhang worden verondersteld[1]).

Ook het ladingsteeken is misschien van eenigen invloed. Terwijl voor 24 van de 26 stoffen in de meest verschillende concentraties onderzocht nooit anders dan een positieve lading kon worden geconstateerd, die bij voortschrijdende verdunning ten slotte verdwijnt, laden capronzuur en valeriaanzuur in zeer verdunde oplossing negatief (in eenigszins geconcentreerde positief). In de uiterste verdunning, waarin deze negatieve lading nog waarneembaar is, blijkt de riek-

---

[1]) Rangschikking van het druppelgetal der verzadigde oplossing:

Naphthaline 49.3, Kunstmuskus 49.6, Toluol 50.3, Pseudocumol 50.5, Benzol 50.75, Allylalcohol (1:500)51, Vanilline 51, Indol 51.5, Skatol 52.2, Xylol 55, Nitrobenzol 55.5, Pyridine (1 %)57.25, Cumidine 66.75, p. Xylenol 68.5, Aniline 69, p. Toluidine 69, Thymol 73, o. Toluidine 75.5, n. Xylidine 77, m. Xylenol 84, Capronzuur 84.5, Guajacol 85, Terpineol 90.5, Valeriaanzuur 106, Isoamylacetaat 115, Amylalcohol 131.

TABEL II*a*.

Rangschikking van 26 reukstoffen (in den stalagmometer) der nog nauwelijks lading gevende oplossing (bij 15° C.).

Water	49.3
Naphthaline	49.3
Kunstmuskus	49.6
Capronzuur	49.8
Aniline	50
Indol	50
Nitrobenzol	50
p. Xylenol	50
p. Toluidine	50
Guajacol	50
Thymol	50.1
Allylalcohol	50.2
Toluol	50.2
Pseudocumol	50.5
Amylalcohol	50.5
m. Xylidine	50.5
m. Xylenol	50.6
Benzol	50.8
Vanilline	51
Valeriaanzuur	51
Terpineol	51.2
o. Toluidine	52
Skatol	52.2
Cumidine	52.2
Isoamylacetaat	52.5
Pyridine	54
Xylol	55
Gemiddeld	50.9 $\left(\frac{1323.2}{26}\right)$

TABEL II*b*.

Rangschikking van 26 reukstoffen naar hun kookpunt.

Water	100°
Benzol	80°
Allylalcohol	97°
Toluol	111°
Isoamylacetaat	116°
Amylalcohol	116.3
Pyridine	116.7
Xylol	142°
Capronzuur	155°
Pseudocumol	169.8
Aniline	182.5
Valeriaanzuur	184
o. Toluidine	199.7
p. Toluidine	200.4
Nitrobenzol	205
Guajacol	205.1
Terpineol	218.
Naphthaline	218.2
p. Xylenol	220
m. Xylenol	225
m. Xylidine	226
Thymol	231.8
Cumidine	235°
Indol	253
Skatol	265
Vanilline	sublimeert
Kunstmuskus	??

kracht dezer stoffen, vergeleken met het gemiddelde onzer stoffen, zeer gering.

Het al of niet sterker worden der lading door toevoeging van keukenzout aan de oplossing, resp. het verzwakken der lading door deze procedure [1]), schijnt geen bijzondere beteekenis voor de onderlinge rangschikking onzer 26 stoffen te hebben. Alle vertoonen een toename van laadvermogen, met uitzondering van naphthaline, indol en skatol, wier geringe lading onveranderd schijnt te blijven, en van kunstmuskus, pseudocumol, p. xylenol en thymol, wier lading duidelijk zwakker wordt.

Onze conclusie is alzoo, dat, zuiver feitelijk genomen, de verklaring geheel ter zijde latend, reukkracht en laadvermogen ook van willekeurig gekozen reukstoffen bij ongeveer overeenkomstigen verdunningsgraad hun grens van waarneembaarheid bereiken.

1) E. L. Backman, Onderz. Physiol. Lab. Utrecht (5). Deel 18, p. 349 Deel 19, p. 210.

Wiskunde. — De Heer LORENTZ biedt een mededeling aan van de Heer H. B. A. BOCKWINKEL: „*Over een paar punten betreffende de voortbrengende funksies van* LAPLACE".

(Mede aangeboden door de Heer KLUYVER).

1. LERCH heeft over de integraal $\int_0^\infty e^{-xr}\varphi(r)dr$, of de hieruit door de substitutie $r = -log\, t$ afgeleide,

$$\alpha(x) = \int_0^1 f(t) t^x\, dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

waarin $f(t)$ de *voortbrengende funksie* (fonction génératrice) en $\alpha(x)$ de *bepalende funksie* (fonction déterminante) heet, de volgende merkwaardige stelling uitgesproken [1]):

Indien de bepalende funksie $\alpha(x)$ *nul wordt voor een oneindig aantal waarden van* x *die een rekenkundige reeks met pozitief verschil* η vormen,

$$x = \xi + \mu\eta, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

dan is hij identiek gelijk aan nul, en hetzelfde geldt van de voortbrengende funksie $f(t)$.

LERCH maakt bij het bewijs van zijn stelling gebruik van een teorema van WEIERSTRASS, n.l. dat iedere in een gesloten interval kontinue funksie in dat interval door een uniform konvergente reeks van gehele rationele funksies kan worden voorgesteld. Daar de stelling, waarop ook door PINCHERLE [2]) en door NIELSEN [3]) de aandacht gevestigd wordt, allerlei interessante gevolgen heeft, schijnt hij belangrijk genoeg, om nog eens langs andere weg bewezen te worden. We veroorloven ons daarom, aan de redenering van LERCH de volgende toe te voegen, waarbij van meer bekende, altans meer gewone hulpmiddelen gebruik gemaakt wordt (nl. het teorema van FOURIER).

---

[1]) LERCH, Acta mathematica 27, 1903.

[2]) PINCHERLE, „Sur les fonctions déterminantes", Ann. de l'Éc. Norm. 22, 1905. PINCHERLE noemt $f(t)$ „fonction génératrice" en $\alpha(x)$ „fonction déterminante", terwijl LERCH het juist andersom doet. Wij hebben ons bij PINCHERLE aangesloten.

[3]) NIELSEN, „Handbuch der Gammafunktion", p. 118.

2. De volgende onderstellingen zijn voldoende, om de beoogde gevolgtrekkingen te maken:

1°. De voortbrengende funksie $f(t)$ is, behalve misschien in $t = 0$, *kontinu* in het integratieinterval.

2°. De integraal (1) *bestaat* voor zekere waarde $x = c$ van x.

We stellen

$$g(t) = \int_0^t f(u)\, u^c\, du. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Dan is $g(t)$ krachtens onderstelling 2° een in het interval (0,1), ook in $t = 0$, kontinue funksie, en 0 voor $t = 0$. Verder is volgens onderstelling 1° $g(t)$ in alle punten van het genoemde interval, behalve misschien in $t = 0$, differentieerbaar en heeft men

$$g'(t) = f(t)\, t^c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

Men kan dus herleiden, voor $\delta > 0$,

$$\int_\delta^1 f(t)\, t^x\, dt = \int_\delta^1 g'(t)\, t^{x-c}\, dt = [g(t)\, t^{x-c}]_\delta^1 - (x-c)\int_\delta^1 g(t)\, t^{x-c-1}\, dt$$

Is nu x een kompleks getal waarvan het reele deel $R(x)$ *groter* is dan dat van c, dan kan men in deze vergelijking δ tot nul laten naderen, en dan komt er

$$\int_0^1 f(t)\, t^x\, dt = g(1) - (x-c)\int_0^1 g(t)\, t^{x-c-1}\, dt \qquad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

Hieruit volgt: *Als de integraal* (1) *bestaat voor zekere waarde van* x, $x = c$, *dan bestaat hij in het hele halfvlak bepaald door* $R(x) > R(c)$ [1].

Uit de gelijkheid (5) volgt ook gemakkelik dat de integraal in het linkerlid in ieder gebied S, geheel in het eindige van $R(x) \overline{>} R(c) + \delta$, $(\delta > 0)$, gelegen, een *kontinue* funksie van x voorstelt. Eveneens blijkt door een dergelijke redenering als zo even dat ook de integraal

[1] Dit teorema is fundamenteel in de teorie van de voortbrengende funksies. Volgens PINCHERLE (l. c.) is het door verschillende schrijvers bewezen, dikwels onder minder algemene onderstellingen dan onder 1° en 2° vermeld De redenering in de tekst is van LERCH en wordt ook door PINCHERLE gebezigd. Deze redenering *berust* evenwel op de *kontinuiteit* van $f(t)$, in het links open interval (0,1), hetgeen LERCH vermoedelik uit het oog verliest als hij, aan 't eind zijn stelling uitsprekende, zegt dat $f(t)$ ook wel diskontinu, mits integreerbaar, kan zijn. (Natuurlik wordt hiermee niet beweerd dat veralgemening niet *mogelik* is).

$$\int_0^1 f(t)\, t^x \log t\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

bestaat voor $R(x) > R(c)$, en voor ieder punt binnen dit halfvlak het differentiaalquotient van $\alpha(x)$ voorstelt, zodat $\alpha(x)$ tevens een *analitiese* funksie van x is. Ook deze gevolgtrekkingen vindt men bij PINCHERLE vermeld.

LERCH sluit nu het bewijs van zijn stelling eveneens bij de vergelijking (5) aan. Bij het volgende bewijs zullen we evenwel gebruik maken van een vergelijking die uit (5) ontstaat door de stap die tot deze laatste gevoerd heeft, nog een keer te herhalen. We stellen dus

$$h(t) = \int_0^t g(u)\, du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dan is weer $h(t)$ kontinu en differentieerbaar in (0,1) en men heeft

$$h'(t) = g(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Van belang is echter dat deze laatste vergelijking nu óók geldt in $t = 0$, en dat de afgeleide van $h(t)$ dus een in het gesloten interval (0,1) *geborneerde* funksie is. Merken we verder op dat men heeft

$$\lim_{t=0} \, [h(t) : t] = h'(0) = g(0) = 0,$$

zo vindt men door partiele integratie, op dergelijke manier als zo even, mits altijd $R(x) > R(c)$,

$$\int_0^1 g(t)\, t^{x-c-1}\, dt = h(1) - (x-c-1) \int_0^1 h(t)\, t^{x-c-2}\, dt. \quad . \quad . \quad (9)$$

en dus

$$\alpha(x) = g(1) - (x-c)\, h(1) + (x-c)(x-c-1) \int_0^1 h(t)\, t^{x-c-2}\, dt. \quad 10)$$

3. Al het voorgaande geldt onafhankelik van enige verdere onderstelling omtrent $f(t)$. Stel nu vooreerst dat $\alpha(x)$ nul wordt voor de rekenkundige reeks van waarden

$$x = \xi + \mu, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

We kiezen dan het getal c uit de voorgaande vergelijkingen gelijk aan ξ, dan is $g(1) = 0$, en dus ook de integraal in het rechterlid van (5) voor

$$x = \xi + 1 + \mu, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hieruit volgt weer dat $h(1)$ gelijk is aan nul, en, in verband hiermee, uit (10)

$$\int_0^1 h(t)\, t^{\mu}\, dt = 0, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Nu hebben we gezien dat het differentiaalquotient van $h(t)$ begrensd is. Volgens een bekende stelling [1]) heeft $h(t)$ dus in het interval (0,1) een *begrensde totale variatie,* en hieruit volgt weer [2]) dat $h(t)$ ontwikkelbaar is volgens het teorema van Fourier.

Men heeft

$$h(t) = \sum_0^{\infty}{}_n (a_n \cos 2\pi\, nt + b_n \sin 2\pi\, nt) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

waarbij

$$a_0 = \int_0^1 h(t)\, dt$$

en, voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = 2\int_0^1 h(t) \cos 2\pi\, nt\, dt, \qquad b_n = 2\int_0^1 h(t) \sin 2\pi\, nt\, dt$$

Nu zijn de funksies $\cos 2\pi\, nt$ en $\sin 2\pi\, nt$ voor iedere n ontwikkelbaar in machtreeksen,

$$\cos 2\pi\, nt = \sum_0^{\infty}{}_{\mu} A_{\mu}\, t^{\mu}, \qquad \sin 2\pi\, nt = \sum_0^{\infty}{}_{\mu} B_{\mu}\, t^{\mu}$$

die in het interval (0,1) uniform konvergeren. Daar $h(t)$ in dat interval begrensd is, geldt dus de herleiding

$$\int_0^1 h(t) \cos 2\pi\, nt\, dt = \int_0^1 h(t) \sum_0^{\infty}{}_{\mu} A_{\mu}\, t^{\mu}\, dt = \sum_0^{\infty}{}_{\mu} A_{\mu} \int_0^1 h(t)\, t^{\mu}\, dt$$

en evenzo is

$$\int_0^1 h(t) \sin 2\pi\, nt\, dt = \sum_0^{\infty}{}_{\mu} B_{\mu} \int_0^1 h(t)\, t^{\mu}\, dt$$

Volgens (13) zijn dus alle koeffisienten in de Fourierse ontwikkeling (14) gelijk aan nul, en is dus ook $h(t)$ identiek gelijk aan nul in het interval (0,1). Daar verder $g(t) = h'(t)$, geldt hetzelfde van

---

[1]) E. W. Hobson, „The Theory of Functions of a real variable", Cambridge, 1907, p. 283.

[2]) Hobson, l. c. p. 680.

$g(t)$, en daar $f(t)\,t^{\xi} = g'(t)$ (behalve misschien in $t = 0$), zo is ook de voortbrengende funksie $f(t)$ zelf in het interval (0,1) gelijk aan nul. Dit is het tweede deel van de stelling van LERCH. Daar het eerste deel onmiddellik uit het tweede volgt, is de stelling hiermee bewezen in het biezondere geval dat de rekenkundige reeks van de nulpunten 1 tot verschil heeft.

Is dit verschil gelijk aan het pozitieve getal η, en worden de nulpunten dus voorgesteld door formule (2), dan stellen we

$$t^{\eta} = s, \qquad x = \eta y, \qquad \xi = \eta c$$

waardoor de integraal (1) overgaat in

$$\frac{1}{\eta}\int_0^1 f\left(s^{\frac{1}{\eta}}\right) s^{\frac{1}{\eta}-1+y}\, ds = \int_0^1 \varphi(s)\, s^{y}\, ds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

De funksie $\frac{1}{\eta} f\left(s^{\frac{1}{\eta}}\right) s^{\frac{1}{\eta}-1} = \varphi(s)$ heeft de eigenschappen onder 1° en 2° van het begin van het vorige nummer vermeld, zodat de voorgaande redeneringen er op van toepassing zijn. De integraal (15) wordt nul voor de rij van waarden (11), dus is $\varphi(s)$ en daarmee ook $f(s)$ identiek gelijk aan nul in het interval (0,1). Het teorema van LERCH is hiermee volledig bewezen.

4. Men kan het eerste deel van dit teorema, nl. dat $a(x)$ *identiek* nul wordt, als dit voor een *rekenkundige reeks* van x-waarden geschiedt, ook rechtstreeks bewijzen, zonder eerst aan te tonen dat het tweede deel juist is, en wel is het een onmiddellik gevolg van de stelling:

Iedere funksie $a(x)$ *bepaald door een integraal van de vorm* (1) *kan, onder de onderstellingen* 1° *en* 2° *aan 't begin van N°.* 2 *genoemd in een binomiaalkoeffisientenreeks*

$$a(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, c_n \binom{x-\beta}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ontwikkeld worden, als β *een getal is dat binnen het konvergentiegebied van de integraal ligt.*

Nemen wij nl. een ogenblik aan dat deze stelling waar is. Wordt $a(x)$ nu nul voor de reeks van waarden (11), dan stelle men in (16) $\beta = \xi$. Door x achtereenvolgens gelijk aan ξ, $\xi + 1$, $\xi + 2, \ldots$ te nemen, vindt men dan dat alle koeffisienten c_n van de binomiaalontwikkeling nul zijn, en *dat dus* $a(x)$ *identiek gelijk aan nul is.*

Het eerste deel van de stelling van LERCH wordt op die manier al zeer gemakkelik ingezien en het zou dus geschikt zijn, als men uit dit eerste deel *onmiddellik*, of altans langs kortere dan de boven

2*

aangegeven rechtstreekse weg het tweede deel kon afleiden. Maar we zien daartoe vooralsnog geen kans. Op de keper beschouwd is de gegeven afleiding al tamelik kort, maar bovendien achten wij het, op gronden die we, ter wille van ruimtebesparing, hier niet nader aangeven, niet waarschijnlik dat men voor het genoemde doel meer heeft aan het *identiek* nul worden van $a(x)$ dan aan het nul worden van deze funksie voor een *rekenkundige reeks* van waarden van het argument.

Niettemin is het eerste deel van LERCH's teorema op zichzelf van belang omdat daaruit reeds merkwaardige gevolgtrekkingen kunnen worden afgeleid. Er blijkt bv. uit, zoals door LERCH wordt aangewezen, dat eenvoudige funksies als

$$\sin kx, \quad \cos kx, \quad \frac{2}{\Gamma(l-kx)}, \quad (k>0)$$

niet de *bepalende* van *voortbrengende* funksies kunnen zijn, m. a. w. niet door integralen van de vorm (1) kunnen worden voorgesteld, en evenmin produkten van deze funksies met andere die in het eindige deel van zeker gebied $R(x)>c$ binnen eindige grenzen blijven.

De stelling over de ontwikkeling van de integraal (1) in een binomiaalkoeffisientenreeks kan op verschillende manieren worden bewezen. In de eerste plaats vallen integralen van die vorm onder de algemene groep van funksies waarvan ik in een vroegere mededeling in deze Verslagen (3 Mei 1919) heb aangetoond dat ze in reeksen van de gedaante (16) ontwikkelbaar zijn. Men beschouwe een gebied $R(x) \geq c+\delta$, neme een pozitief getal $\delta_1<\delta$ en stelle in de sekundaire integraal, in 't rechterlid van (5), $x=c+\delta_1+y$, dan is $R(y) \geqq \delta-\delta_1$, dus essentieel pozitief. Men kan nu herleiden

$$\left|\int_0^1 t^{x-c-1} g(t)\, dt\right| \leqq \int_0^1 t^{R(y)} \left|t^{\delta_1-1} g(t)\right| dt < \int_0^1 t^{\delta_1-1} \left|g(t)\right| dt,$$

welke laatste integraal bestaat, omdat $g(t)$ in $(0,1)$ geborneerd is. Dus is $a(x)$ in het hele beschouwde gebied van de vorm

$$a(x)=(x-b)\,\mu(x)$$

waarin $\mu(x)$ binnen eindige grenzen blijft (b is een zeker getal buiten het gebied). Dergelijke funksies kunnen echter steeds in de bedoelde reeksen worden ontwikkeld.

Een tweede, meer rechtstreeks bewijs krijgt men door in de sekundaire integraal in (5) te stellen $t=1-u$ en te herleiden

$$(1-u)^{x-c-1}=(1-u)^{\beta-c-1}(1-u)^{x-\beta}=(1-u)^{\beta-c-1}\sum_{0}^{\infty}{}_m(-1)^m\binom{x-\beta}{m}u^m$$

waarbij de reeks voor $R(x) > R(\beta)$ *uniform* in het interval $0 \leqq u \leqq 1$ konvergeert. Daar voor $R(\beta) > R(c)$ de integraal

$$\int_0^1 g(1-u)(1-u)^{\beta-c-1}\, du$$

absoluut konvergeert (wegens de kontinuiteit van $g(1-u)$), kan men na de bedoelde substitutie term voor term integreren, en vindt dan (in de afzonderlike integralen weer $1-u$ door t vervangende)

$$\int_0^1 g(t)\, t^{x-c-1}\, dt = \sum_0^{\infty m} (-1)^m \binom{x-\beta}{m} \int_0^1 (1-t)^m t^{\beta-c-1} g(t)\, dt \quad . \quad (17)$$

De ontwikkeling is dus geldig voor $R(x) > R(\beta) > R(c)$. Daar het produkt van deze reeks met $x-c$ tot een reeks naar dezelfde fakulteiten van $x-\beta$ kan worden herleid, is de verlangde stelling hiermee opnieuw aangetoond. [1])

Een derde bewijs heeft nog dit interessante dat het doet zien dat, als de integraal slechts bestaat voor $x = c$, ook ontwikkeling naar fakulteiten van $x-c$ mogelik is, zelfs al zou de lijn $R(x) = R(c)$ de grens van het kon- en divergentiegebied van de integraal in het x-vlak zijn, en al zou de integraal volstrekt niet in alle punten van die lijn bestaan. Het bewijs bestaat hierin dat we het proses, dat tot de stelling van LERCH gevoerd heeft, tot in het oneindige voortzetten; we stellen

$$\left.\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t u^c f(u)\, du, \qquad g_1(t) \equiv h(t) = \int_0^t g(u)\, du, \\ g_2(t) &= 2\int_0^t g_1(u)\, du, \ldots\; g_n(t) = n\int_0^t g_{n-1}(u)\, du, \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (18)$$

Formule (10) laat zich dan veralgemenen tot

$$\left.\begin{aligned} a(x) &= g(1) - g_1(1)(x-c) + g_2(1)\binom{x-c}{2} - g_3(1)\binom{x-c}{3} + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} g_{n-1}(1)\binom{x-c}{n-1} + (-1)^n \binom{x-c}{n} \int_0^1 g'_n(t)\, t^{x-c-n}\, dt \ldots . \end{aligned}\right\} . \quad (19)$$

De restterm nadert tot nul voor $R(x) > R(c)$, want men heeft

[1]) Men vindt bij NIELSEN (l. c. p. 125) een dergelijk bewijs van de hier bedoelde ontwikkelbaarheid; dit sluit echter niet aan bij de sekundaire integraal in het rechterlid van (5), maar bij de oorspronkelike, zodat hierbij nodig is te onderstellen dat ook deze *absoluut* konvergeert voor $\lim t = 0$. Van deze spesiale onderstelling bevrijdt men zich juist door de herleiding (5).

achtereenvolgens, als G de maksimummodulus van de geborneerde funksie $g(t)$ in het interval (0,1) is,

$$|g_1(t)| < Gt \qquad |g_2(t)| < Gt^2, \ldots \qquad |g_n(t)| < Gt^n, \ldots$$

dus

$$\left|\int_0^1 g'_n(t)\, t^{x-c-n}\, dt\right| = \left|n \int_0^1 g_{n-1}(t)\, t^{x-c-n}\, dt\right|$$

$$< n \int_0^1 G t^{R(x-c)-1}\, dt$$

$$< \frac{nG}{R(x-c)}, \text{ voor } R(x-c) > 0.$$

Nu is $\binom{x-c}{n}$ voor $n = \infty$ equivalent met $n^{-R(x-c)-1}$, en dus de restmodulus in formule (19) voor alle n kleiner dan

$$\frac{H(x-c)}{R(x-c)\, n^{R(x-c)}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

waarin H zeker pozitief getal is groter dan G. Voor $R(x) > R(c)$ nadert dus de restterm met onbepaald toenemende n tot nul. Zelfs toont de majorantwaarde (20) aan dat op een oneindig lijnsegment, uitgaande van $x = c$ en met de richting van het pozitieve deel van de reele as, de binomiaalreeks *uniform* konvergeert; want hierop is $R(x-c) = x-c$. PINCHERLE heeft (l.c.) opgemerkt dat een dergelijke uitspraak, die analoog is aan een bekende stelling van ABEL over machtreeksen, voor de integraal (1) geldt en dat die volgt uit de, door partiele integratie, ontstane vergelijking (5). Evenzo kan men, door partiele *sommatie*, bewijzen dat de hiergenoemde stelling algemeen geldt zoowel voor reeksen die naar *gehele* fakulteiten voortlopen (de hier besproken binomiaalkoeffisientenreeksen) als voor de fakulteitreeksen in engere zin (die voortlopen naar *omgekeerde* fakulteiten). Voor de laatstgenoemde heb ik dat in een mededeling over deze reeksen nader aangewezen [1]). De ontwikkeling van de integraal (1) in een *dergelijke* fakulteitreeks is evenwel, zoals uit onderzoekingen van NIELSEN [2]) en van PINCHERLE [3]) volgt, *slechts* mogelik onder nader beperkende voorwaarden voor $f(t)$, nl. als dit een *analitiese* funksie is waarvan de konvergentiesirkel voor het punt $t = 1$ door $t = 0$ gaat, en die op de omtrek van deze sirkel van *eindige* orde (in de zin van HADAMARD) is.

[1]) Verslag van 3 Mei 1919.

[2]) Handbuch, p. 244.

[3]) *Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattorali*, Rendic. d. R. Acc. d. Lincei 1903 (2e Semestre).

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. P. BARENDRECHT over: „*Urease en de stralingstheorie van enzymwerking*" IV.

(Mede aangeboden door den Heer HOOGEWERFF).

11. *Directe synthese van ureum door urease uit ammonium-carbonaat.*

Volgens de boven ontwikkelde theorie zal het evenwicht in de werking van urease op ureum niet altijd gevonden worden bij voltooide hydrolyse.

Wanneer de concentratie van urease laag is, zal de synthetische werking in den spherischen buitenrand zich kunnen uiten.

In een alkalische oplossing van urease, wat ook haar concentratie zij, zal het enzym gedeeltelijk vervallen in verloop van tijd, zooals aangetoond werd in deel 9. In dat geval zal ook een omgekeerde werking merkbaar worden, evenredig aan de concentratie van de urease.

Om deze gevolgtrekking uit de hypothese te toetsen werden de volgende experimenten uitgevoerd.

In elk van 6 groote cylinders van ongeveer 1 Liter inhoud werden 100 cc. water gebracht, waarin 5,786 gr. ammonium-carbonaat waren opgelost. Elk van deze cylinders was gesloten door een caoutchouc stop met twee doorboringen; door de eene ging een rechte glasbuis, aan het einde voorzien van een geperforeerden bol, door de andere een gebogen glazen buis, waardoor de luchtstroom, die doorgeblazen moest worden, kon overgaan in een tweeden, kleineren cylinder, waarin de ammoniak geabsorbeerd moest worden. Elk van deze kleinere cylinders bevatte daarvoor 186,85 gr. H_2SO_4 $\frac{4}{10}$ N (wat gelijk is aan 185 c.c. $\frac{4}{10}$ N). De grootere nauwkeurigheid, door afwegen van het absorbeerende zuur verkregen, was noodig omdat het effect, dat verwacht werd, het verschil was van twee groote waarden en vermoedelijk klein zou zijn.

In twee der groote cylinders werd 3, in twee andere 6 gr. Sojameel gebracht. De glasbuizen van deze cylinders werden alle afgesloten door caoutchouc buisjes en klemmen. Na een paar uren werden degene, die de verbinding regelden met de absorptie-cylinders, een

oogenblik geopend om het koolzuur, ontwikkeld door den gedeeltelijken overgang van het opgeloste ammonium-carbonaat tot ammonium-carbamaat, te laten ontsnappen door het zwavelzuur.

Na de zes paren cylinders 24 uren bij kamertemperatuur te hebben laten staan, waarbij nu en dan het Soja meel werd opgeroerd, werden de verbindingen met de absorptie-cylinders geopend en 250 c.c. verzadigde kaliumcarbonaat oplossing door de lange glasbuizen in elk van de groote cylinders gegoten. Daarna werd door 24 uur lang krachtige stroomen lucht, gewasschen door zwavelzuur, door te voeren, alle ammoniak overgeblazen in het zwavelzuur. Enkele druppels octyl-alcohol, gelijktijdig met het Soja-meel in de cylinders gebracht, voorkwamen het schuimen.

De hoeveelheden ammonium-carbonaat en zwavelzuur waren zoo gekozen, dat slechts enkele c.c. NaOH $\frac{1}{10}$ noodig waren voor het titreeren van het vrije zwavelzuur, dat was overgebleven.

De resultaten van een voorloopig experiment op 14 Maart 1916 waren de volgende:

TABEL 22.

c.c. NH_3 $\frac{1}{10}$ N in:

			Gemiddeld	NH_3 omgezet tot ureum
Amm. carb. alleen	735.8	735.9	735.85	
Amm. carb. + 3 gr. Soja	735.15	734.85	735.—	0.85
Amm. carb. + 6 gr. Soja	734.85	734.75	734.8	1.05

Later bleek echter, dat een aanmerkelijke hoeveelheid NH_3 uit het Soja-meel ontwikkeld wordt. [1])

Om dit te bepalen werd in elk van een tweetal groote cylinders 250 c.c. verzadigde kalium-carbonaat, 100 c.c. water en 4 druppels octylalcohol gebracht. Daarenboven in den een 6, in den ander 12 gr. Soja-meel. Elke cylinder was verbonden met een kleineren, waarin 5 c.c. H_2SO_4 $\frac{2}{5}$ N en wat water. Na een 5 uur lucht doorblazen bleef het geheel bij kamertemperatuur tot den volgenden dag staan, toen het blazen weer begonnen en voortgezet werd tot den volgenden dag.

De 6 gr. Soja-meel hadden gegeven 1,1 c.c. NH_3 $\frac{1}{10}$ N.

De 12 gr. Soja-meel 1,65 c.c. NH_3 $\frac{1}{10}$ N.

Dus gemiddeld voor 6 gr. Soja-meel 0,97 c.c. $\frac{1}{10}$ N,

[1]) Speciale proeven hadden geleerd, dat geen NH_3 uit ureum gevormd werd door de lange inwerking van verzadigde kaliumcarbonaat.

Na correctie van de cijfers van 14 Maart met deze waarden krijgen wij:

Ammonia omgezet in ureum door
3 gr. Soja 1,33 c.c. $\frac{1}{10}$ N
6 gr. Soja 2.02 c.c. $\frac{1}{10}$ N.

23 Maart 1916. In de groote cylinders 11,572 gr. ammonium-carbonaat en 100 c.c. water. In de kleine cylinders 190 gr. H_2SO_4 van ongeveer 0,8 N (1 gram = 7,85 c.c. $\frac{1}{10}$ N).

In twee der zes groote cylinders 6 gr. Soja-meel, in twee andere 12 gram.

Na 24 uur staan bij kamertemperatuur werden in elk 250 c.c. verzadigde kalium-carbonaat oplossing en een paar druppels octyl-alcohol gebracht en de ammoniak gedurende 48 uur overgeblazen.

Resultaten:

TABEL 23

c.c. NH_3 $\frac{1}{10}$ N in:

	Eerste cylinder	Tweede cylinder	Gemiddeld	Gecorrigeerd voor NH_3 uit Soja-meel	NH_3 omgezet tot ureum
Amm. carb. alleen	1462.4	1462.5	1462.45		
Amm. carb. + 6 gr. Soja	1460.7	1460.5	1460.6	1459.6	2.85
Amm. carb. + 12 gr. Soja	1458.5	1458.4	1458.45	1456.5	5.95

16 Mei 1916. Een oplossing werd gemaakt van ongeveer 95 gr. ammonium-carbonaat en 1 Liter water en deze werd verzadigd met koolzuur.

Twee groote cylinders, elk met 100 c.c. van deze oplossing en 250 c.c. verzadigde kalium-carbonaat oplossing werden verbonden met kleine cylinders, elk bevattende 174 gr. H_2SO_4 0,8 N en alle ammoniak werd overgeblazen in het zuur door gedurende 48 uur een luchtstroom te laten doorgaan.

Vier groote cylinders (*A*) kregen elk 100 c.c. van die ammonium-carbonaat oplossing en 6 gr. Soja-meel.

Vier andere (*B*) elk 100 c.c. ammonium-carbonaat oplossing en 12 gr. Soja-meel.

Na 2 dagen verblijf bij kamertemperatuur werd één cylinder *A* en één cylinder *B* geanalyseerd door er 250 c.c. verzadigde kalium-carbonaat oplossing in te brengen en de ammoniak over te blazen in 174 gr. zuur gedurende twee dagen. Op dezelfde wijze werden één *A* en één *B* na 3 dagen behandeld en twee cylinders *A* en twee cylinders *B* na 4 dagen.

Resultaten :

TABEL 24.
c.c. NH_3 $\frac{1}{10}$ N in:

	Eerste cylinder	Tweede cylinder	Gemiddeld	Gecorrigeerd voor NH_3 uit Soja	NH_3 omgezet tot ureum
Amm. carb. alleen	1352.1	1352.7	1352.4		
Amm. carb. + 6 gr. Soja, 2 dagen	1351				
Amm. carb. + 6 gr. Soja, 3 dagen	1350.9				
Amm. carb. + 6 gr. Soja, 4 dagen	1350	1350.5	1350.3	1349.3	3.1
Amm. carb. + 12 gr. Soja, 2 dagen	1349.9				
Amm. carb. + 12 gr. Soja, 3 dagen	1348				
Amm. carb. + 12 gr. Soja, 4 dagen	1348.7	1348.6	1348.7	1346.7	5.7

Het is duidelijk, dat het evenwicht in 3 dagen nog nauwelijks bereikt is. Indien de activiteit onveranderd gebleven was, zou het veel eerder bereikt zijn geworden of zou waarschijnlijk in 't geheel geen synthese zijn teweeggebracht. In overeenstemming met wat wij boven gezien hebben, was de urease hier ook verzwakt door gedurende zulk een langen tijd opgelost te blijven in een alkalische vloeistof en moest daarom een geleidelijke verplaatsing van het evenwicht naar de zijde van ureum verwacht worden.

Deze experimenten toonen duidelijk aan, dat een klein deel van de ammonium-carbonaat verdwijnt door de werking der urease en dat dit deel evenredig is aan de hoeveelheid urease, die tegenwoordig is. Beide feiten zijn in overeenstemming met de boven beschreven theorie van de synthese van ureum.

12. *De bepaling van de H- en de OH-ionen concentratie.*

Daar zoowel uit de theorie als uit de resultaten, medegedeeld in deze verhandeling, duidelijk zal gebleken zijn, dat menigvuldige en dus eenvoudige metingen van p_H van overwegend belang zijn in enzym-onderzoek, kan het nuttig zijn de volgende bizonderheden te geven van de apparaten, voor dit doel gebruikt.

Het was ongeveer dezelfde inrichting, als door schrijver dezes beschreven is als „A simple hydrogen electrode" in Biochem. J. 1915, 66.

De nauwkeurigheid was verhoogd door toevoeging van een bekertje met verzadigde KCl oplossing, waarin zoowel de waterstof-electrode

als de buis van de calomel-electrode gedompeld werden. De laatste was nog zoo gewijzigd, als getoond in Fig. 16, dat alle capillaire buizen en rubber verbindingen vermeden waren. Na een meting werd de kleine flesch, die de eigenlijke calomelelectrode bevat, een halve slag rondgedraaid en het dompelbuisje omsloten in een kleine buis met verzadigde KCl-oplossing (zie Fig. 16).

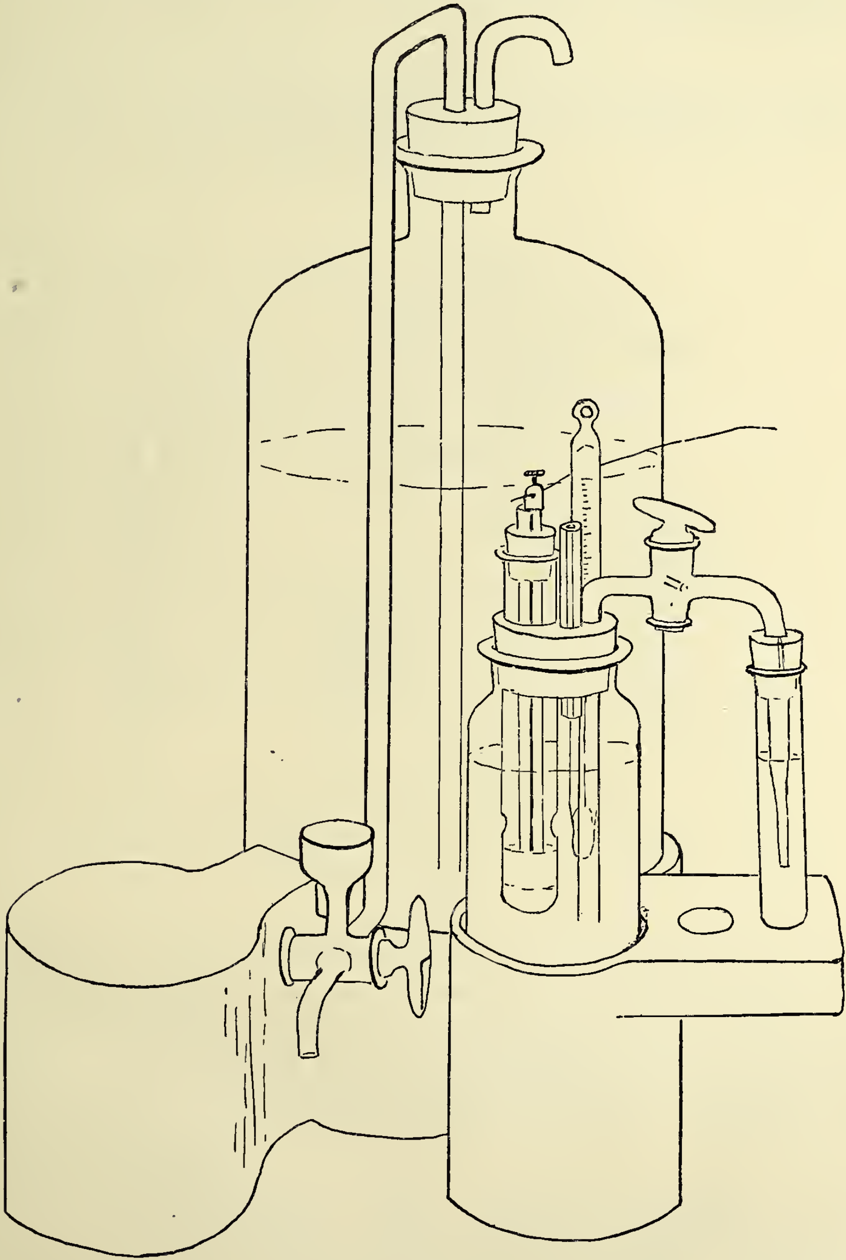


Fig. 16.

Een glazen kraan met één rechthoekige boring maakte het mogelijk het bekertje van circa 2 c.c. inhoud gemakkelijk te ledigen en het weer te vullen uit de groote voorraad-flesch met verzadigde KCl-oplossing.

Voor de dagelijksche bepaling van p_H is ook het apparaat, voorgesteld in Fig. 17, op den langen duur zeer praktisch gebleken. De korte, doorboorde plunjer, die het inwendige van den cylinder geheel opvult wanneer hij den bodem daarvan raakt, is onverwrikbaar verbonden aan een den cylinderwand omvattenden mantel en is met een schroefdraad verplaatsbaar daarover. Door bij gesloten kraan *K* het handvat *A* achterwaarts te draaien worden mantel en plunjer meegedraaid

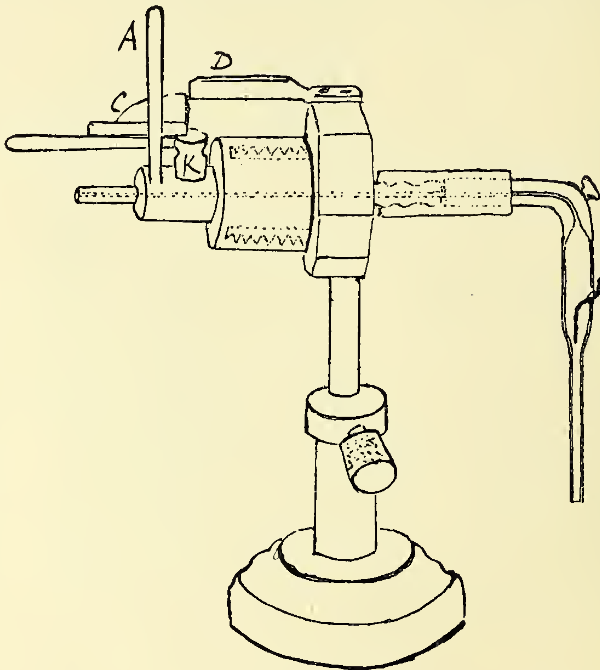


Fig. 17.

en wordt daardoor de laatste een weinig uit den cylinder getrokken. De vloeistof kan zoo in het electrode-buisje worden opgezogen, en door het handvat *A* geleidelijk heen en weer te slingeren kan het evenwicht tusschen platina-electrode, vloeistof en waterstof (die door de doorboring eerst is doorgevoerd) gemakkelijk verwezenlijkt worden. Doode ruimte en vergissingen worden nog vermeden door de inrichtingen *C* en *D* op kraan en statief. De vooruitstekende koperen reep *D* maakt, dat de plunjer alleen van den cylinderbodem afgedraaid kan worden, als de kraan gesloten is en het quadrant *C* boven op de kraan dan in de positie is als aangegeven in de figuur.

Het is duidelijk, dat diezelfde inrichting ook mede helpt om de vergissing te voorkomen van het openen van de kraan en toelaten der waterstof, terwijl de plunjer niet den cylinderbodem raakt.

Na sluiten van de kraan, evenwicht instellen als boven beschreven en instellen van de vloeistof in het electrode-buisje (door draaien van het handvat *A*) op zulk een wijze, dat zij juist raakt aan de punt van den platina-draad, wordt het geheele apparaatje opgetild en op het houten blok van Fig. 16 geplaatst, het electrode-buisje gedompeld in het KCl-bekertje.

Een andere verbetering was het uitvoeren van al deze bewerkingen in een lucht-thermostaat (Fig. 18), waarin alle apparaten, weerge-

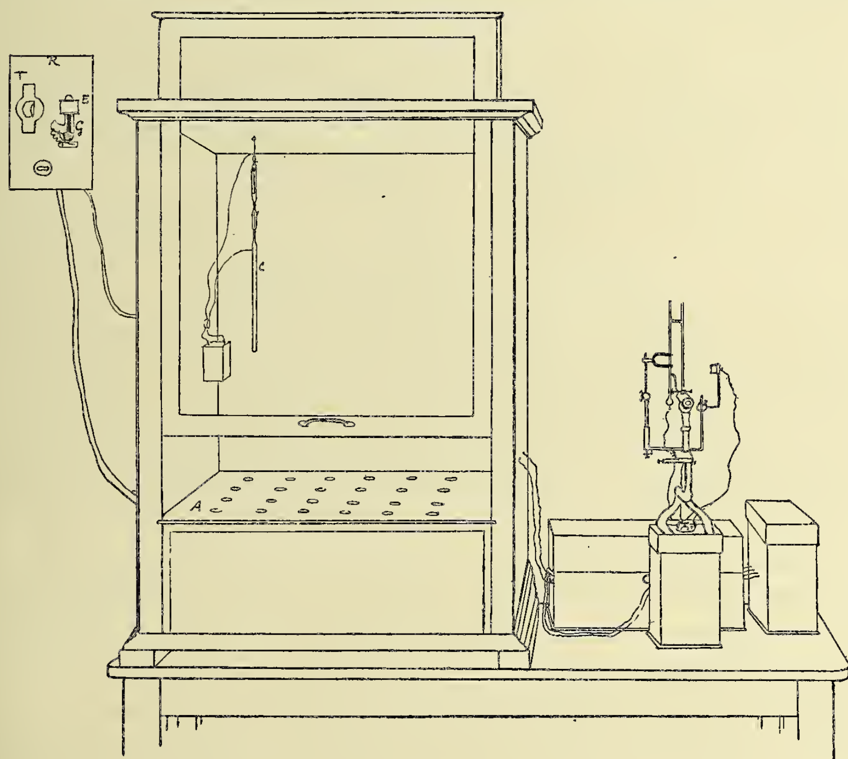


Fig. 18.

geven in Fig. 16 en 17 zoowel als waterstofapparaat en waschflesschen op 27° gehouden werden. Constantheid van temperatuur binnen $\frac{1}{4}$° in de geheele binnenruimte van dezen thermostaat, wat ruim voldoende is, werd bereikt door electrisch te verwarmen op de volgende wijze.

Onder den geperforeerden bodem *A*, evenals de zijwanden en het bovendek van den thermostaat van „eterniet", een soort houtgraniet, vervaardigd, zijn op lichte rekken ongeveer 130 meter constantan-

draad van 0,4 mM. dikte uitgespreid. De stroom van de leiding van 220 volt kan in dezen draad toegelaten worden door het relais *R*, een electrotechnische inrichting, in den handel verkrijgbaar. Een zijtak van den stroom wordt in den transformator *T* tot 8 volt gereduceerd. Deze gereduceerde stroom loopt door den electromagneet *E* en wordt verbroken of doorgelaten door den regulateur *C*. Deze laatste is van het type, beschreven door CLARK [1]); een nikkelen spiraal zorgt, dat het contact altijd op hetzelfde punt van den kwikmeniscus plaats heeft in een 2 mM. wijde capillair in zuivere waterstof. Om het vonken te verminderen zijn de polen van dezen regulateur ook nog verbonden met een kleinen condensator in den thermostaat.

Bij onderbroken stroom is de ijzeren plunjer beneden in het geëvacueerde glazen vat *G* en houdt het kwik in de horizontale zijbuis, waardoor de hoofdstroom tusschen de ingesmolten platinacontacten kan overgaan. Een temperatuurstijging van een fractie van een graad veroorzaakt, dat het groote volume kwik in den regulateur *C* contact maakt met de punt van de nikkelen spiraal en zoo den 8 volt stroom sluit, waardoor de plunjer uit het kwik in *G* wordt getild. Het terugloopen van dit kwik onderbreekt den hoofdstroom en stopt zijn verwarmend effect zeer snel, omdat de verwarmingsdraden, dank zij hun plaatsing in de open ruimte tusschen de tafel en den geperforeerden bodem van den thermostaat, spoedig afgekoeld worden. Een ander voordeel van deze inrichting is de automatische roering van de lucht in den thermostaat door de stroomen heete lucht, opstijgende door de openingen in den bodem.

De voor- en achter-wand zijn vensters van dubbel glas; de eerste kan opgetild worden voor het uitvoeren van het noodige werk in den thermostaat. Dit vereischt slechts enkele minuten. De temperatuur is zoo snel weer hersteld na sluiting van het raam, dat de apparaten praktisch op de gewenschte temperatuur blijven.

Zooals aangegeven in Fig. 18 is de potentiometer door dunne draden, gestoken door den zijwand van den thermostaat, verbonden met de electroden daarbinnen, met den capillair-electrometer, gemonteerd op een doos, waarin een accumulator voor zijn lampje en aan de andere zijde met den werk-accumulator en het Weston element, bevat in de derde doos.

Zooals reeds in deel 5 dezer verhandeling vermeld werd, was een directe bepaling van de concentratie der hydroxyl-ionen, of van p_{OH}, in 8 % phosphaat-oplossingen onontbeerlijk geworden. Het

[1]) J. Amer. Chem. Soc. 1913, 35, 1889.

principe, waarop deze bepalingen gegrond waren, was het volgende:

Door een geplatineerde platina-electrode met zuurstof te verzadigen kan een OH-electrode verkregen worden op dezelfde wijze als een H-electrode gemaakt wordt met waterstof.

Als π_c de potentiaal is van de calomel-electrode met verzadigde KCl-oplossing en π_{OH} die van de OH-electrode, dan is de electromotorische kracht, gemeten op de gewone wijze bij 27°:

$$E = \pi_c + \pi_{\mathrm{OH}} = \pi_c + 0{,}0595 \log \frac{C}{c},$$

wanneer C voorstelt de concentratie van OH, correspondeerende met den electrolytischen oplossingsdruk der OH-electrode en c de OH-ionen concentratie. In zulk een element is de zuurstof-electrode positief, de calomel-electrode negatief.

Een tweede oplossing met een andere hydroxyl-ionen concentratie geeft op dezelfde wijze:

$$E' = \pi_c + \pi'_{\mathrm{OH}} = \pi_c + 0{,}0595 \log \frac{C}{c'}$$

Daaruit volgt:

$$E' - E = \pi'_{\mathrm{OH}} - \pi_{\mathrm{OH}} = 0{,}0595 \log \frac{c}{c'}$$

en na substitutie van $p_{\mathrm{OH}} = - \log c$ en $p'_{\mathrm{OH}} = - \log c'$:

$$E' - E = 0{,}0595 \, (p'_{\mathrm{OH}} - p_{\mathrm{OH}}).$$

Dus, door te meten de electromotorische kracht van de calomel-electrode, gecombineerd, eerst met een oplossing van bekende p_{OH}, b.v. een phosphaat-oplossing van Sörensen, en dan met een 8 % phosphaat-oplossing, geeft deze vergelijking voor $E'-E$ dadelijk de waarde van p'_{OH}.

Dergelijke metingen met twee verschillende oplossingen van Sörensen gaven nagenoeg de juiste waarden.

Zooals echter wel bekend is, geeft een OH-electrode in 't geheel niet zulke constante en nauwkeurige resultaten als een H-electrode. De potentiaal van een OH-electrode is altijd bevonden een 150 millivolt te laag te zijn, wat algemeen toegeschreven is aan de vorming van een sub-oxyd van platina.

Deze constante vermindering wordt echter in bovenstaande formule geëlimineerd. Daarenboven bleek het mogelijk de experimenten zoo in te richten, dat de invloed van het niet constant zijn aanmerkelijk onderdrukt werd.

Ongeveer 10 c.c. van de te onderzoeken vloeistof werden gebracht in een buisje van circa 1 c.m. doorsnee. Door het electrode-buisje in dit kleine volume te dompelen kon een snelle en volkomen verzadiging met zuurstof verkregen worden.

De zuurstof, vrij van waterstof, werd gewasschen in een flesch met 3 °/₀ KI oplossing om mogelijke sporen ozon te verwijderen. Zij werd op de temperatuur van 27° gebracht door waschflesch en caoutchouc buizen zoowel als de andere apparaten (dezelfde als gebruikt voor de metingen van p_H) in den thermostaat te houden.

Na doorvoer van zuurstof gedurende een tien minuten, werd het electrode-buisje uit de te onderzoeken vloeistof getild en op de gewone wijze door middel van het KCl bekertje met de calomel-electrode verbonden; de electromotorische kracht werd dan na ongeveer 1 minuut afgelezen.

Deze bewerking werd afwisselend uitgevoerd met een SÖRENSEN-oplossing (gewoonlijk 5,6 c.c. alkalisch + 4,4 c.c. zuur phosphaat), dan met de 8 °/₀ phosphaat-oplossing, en dan weer met een andere SÖRENSEN-oplossing (9 c.c. alkalisch + 1 c.c. zuur phosphaat). Onmiddellijk daarna werd dezelfde serie van drie waarnemingen eens of twee keer herhaald. Elke bepaling van de onbekende p_{OH} werd dus voorafgegaan en gevolgd met denzelfden tusschentijd door een meting in een vloeistof van bekende p_{OH}. Daar in 't algemeen een geleidelijke verandering in de electromotorische kracht van dezelfde combinatie waargenomen was bij terugkeer daartoe na twee andere bepalingen, kon in elk geval de invloed van deze verandering grootendeels door interpolatie geëlimineerd worden.

Voor de negatieve logarithme van de dissociatie-constante van water in 8 °/₀ phosphaat-oplossing werd zoo gemiddeld gevonden

13,78.

Wat betreft de nog steeds open kwestie, waarom de potentiaal van de OH-electroden gewoonlijk 0,15 Volt te laag gevonden wordt, kan de volgende waarneming mogelijk eenige aanwijzing geven.

Indien de geplatineerde platina-electrode kathodisch gepolariseerd was in verdund zwavelzuur, was de waarde, gevonden voor zijn potentiaal te laag, in overeenstemming met de ervaring van vroegere onderzoekers. Indien echter deze electrode de anode geweest was in zwavelzuur, vertoonde de bepaling van zijn potentiaal een waarde, nagenoeg evenveel te hoog.

De volgende bepalingen werden uitgevoerd met dezelfde 8 °/₀ phosphaat-oplossing ($p_H = 6{,}92$).

Zuurstof-electrode kathodisch gepolariseerd:

$$\overrightarrow{\pi}_H + \overrightarrow{\pi}_{calomel} = 0{,}653 \textit{ Volt}$$

$$\overleftarrow{\pi}_{OH} + \overrightarrow{\pi}_{calomel} = -0{,}421 \textit{ Volt}$$

$$\pi_H + \pi_{OH} = 1{,}08 \textit{ Volt}$$

Zuurstof-electrode anodisch gepolariseerd:

$$\overrightarrow{\pi}_H + \overrightarrow{\pi}_{calomel} = 0{,}653 \text{ Volt}$$

$$\overleftarrow{\pi}_{OH} + \overrightarrow{\pi}_{calomel} = -0{,}736 \text{ Volt}$$

$$\pi_H + \pi_{OH} = 1{,}39 \text{ Volt}$$

De theoretische waarde voor de electromotorische kracht van het zuurstof-waterstof element bij kamertemperatuur is 1,23 Volt.

Dit feit schijnt er op te wijzen, dat het verschil tusschen de potentiaal, waargenomen aan de zuurstof-electrode en de theoretische waarde, te wijten is aan een polarisatieverschijnsel, daar het quantitatief omgekeerd kan worden door omkeering van den toestand van polarisatie der electrode.

13. *Algemeene opmerkingen.*

Het zal duidelijk zijn geworden uit den inhoud van deze verhandeling, dat de theoretische formule

$$\frac{nc}{0{,}434} \log \frac{1}{1-y} + ay = mt$$

door het experiment op verschillende wijzen bevestigd wordt.

Nu het gebleken was, dat de waterstof-ionen de enzym-straling absorbeeren, werd de vraag overwogen, of ook de hydroxyl-ionen deze eigenschap bezitten. Indien dit het geval was, zou de vergelijking moeten zijn

$$\frac{\overset{++}{n}\, \overset{++}{c} + \overset{--}{n}\, \overset{--}{c}}{0{,}434} \log \frac{1}{1-y} + ay = mt.$$

Door herhaling van de experimenten van deel 3, maar nu met oplossingen van verschillende p_H, meestal $p_H = 7{,}21$, werd herhaalde malen getracht deze kwestie uit te maken. Combinatie van den factor $\frac{\overset{++}{n}\, \overset{++}{c} + \overset{--}{n}\, \overset{--}{c}}{0{,}434}$, gevonden voor twee verschillende p_H, zou de noodige vergelijkingen geven om $\overset{+}{n}$ en $\overset{-}{n}$ te berekenen. Zooals echter duidelijk zal zijn uit de beschouwingen in deel 3, hebben de onvermijdelijke kleine experimenteele fouten een nog grooter invloed bij een p_H beneden of boven de $p_H = 7{,}52$ van maximale activiteit. Het bleek onmogelijk experimenten uit te voeren van voldoende nauwkeurigheid voor dit doel. Toch waren de waarden, verkregen voor $\overset{-}{n}$, ofschoon sterk varieerende, in 't algemeen zoo klein, soms

zelfs negatief, dat zij de conclusie toelieten, dat hydroxyl-ionen (d.i. negatieve electriciteit) de urease-straling niet absorbeeren.

Sinds schrijver's eerste studie over Enzym-werking in 1904 (K. Akad. Wetensch. Amsterdam en Zeitschr. physikal. Chemie 49, 4), waarin voor het eerst op de waarschijnlijkheid gewezen werd, dat ook de katalytische werking van waterstof-ionen en van vele andere katalysators aan een straling te danken kon zijn, is de conceptie van katalyse als een stralingsverschijnsel van verschillende zijden opgekomen.

In een serie verhandelingen [1]) heeft LEWIS de theorie uitgewerkt, dat waterstof-ionen katalytisch werken door straling; een molekuul van de gekatalyseerde verbinding zou slechts reageer-vermogen krijgen, als zijn energie door geabsorbeerde straling (ultra-roode warmtestraling) toegenomen was tot den „kritischen" toestand.

In uitvoerige experimenteele onderzoekingen wees NILRATAN DHAR [2]) op de analogie tusschen chemische katalysatoren en licht. Zijn conclusie was, dat „probably the effects of increase of temperature, of light, and of chemical catalysts in a reaction are intimately connected and are possibly identical in nature". Zij schenen alle te werken door het evenwicht te verschuiven tusschen „actieve" en „inactieve" molekulen.

SAMENVATTING.

1. Het enzym urease werkt door een straling, die alleen geabsorbeerd wordt door zijn substraat, ureum, en door H-ionen.

2. De mathematische formuleering van deze conceptie is

$$-dx = m \frac{x}{x + nc} dt,$$

waarin x is de concentratie van de ureum na den tijd t, c de concentratie en n de absorptie-coëfficient van de H-ionen, m een constante, evenredig aan de concentratie van de urease, mits H-ionen concentratie zoowel als temperatuur constant gehouden worden.

Integratie geeft de formule

$$\frac{nc}{0{,}434} \log \frac{1}{1-y} + ay = mt,$$

waarin a is de aanvangs-concentratie van de ureum, en y de fractie van a, die na den tijd t nog aanwezig is.

[1]) Trans. Chem. Soc. 1914, 2330, etc.

[2]) K. Akad. Wetensch. Amsterdam 1916 en Trans. Chem. Soc. 1917, 690.

3. Door talrijke experimenten wordt aangetoond, dat deze vergelijking de omzettingssnelheden van urease-werking voorstelt bij constante temperatuur en p_H. Zij verklaart evengoed de nagenoeg rechte lijnen van de hydrolyse in alkalische als de praktisch logarithmische krommen in zure oplossingen.

4. Wanneer men vergelijkt gelijke concentraties van urease bij verschillende H-ionen concentratie, blijkt de constante m afhankelijk te zijn van p_H; d. i. de activiteit van een gegeven concentratie van urease is een functie van de p_H van de oplossing.

Wordt m als functie van p_H in teekening gebracht, dan is de resulteerende kromme opvallend gelijk aan de karakteristieke krommen voor de ongedissocieerde fractie van een amphoteren electrolyt als functie van p_H.

Deze betrekking kan mathematisch geformuleerd worden en leidt tot de conclusie, dat urease een amphotere electrolyt is, welks activiteit het grootst is, als hij niet gedissocieerd is. De verkregen kromme stelt voor de overmaat in activiteit van ongedissocieerde boven gedissocieerde urease.

5. Deze mathematische formuleering voert tot een approximatieve bepaling van de dissociatie-constanten van urease, welke berekend worden niet veel te verschillen van die van koolzuur en ammoniak.

6. De versnellende werking op urease, door vorige onderzoekers toegeschreven aan koolzuur, wordt aangetoond niet te bestaan. Ammonium-carbonaat + koolzuur vormen een krachtig buffer- mengsel, dat de p_H constant kan houden, een onmisbare voorwaarde voor constante enzym-activiteit in een ureum-oplossing gedurende hydrolyse door urease.

Verdere bevestiging van bovengegeven formule voor het verloop der hydrolyse wordt geleverd door talrijke experimenten met dit buffer-mengsel.

7. De bepaling van de aanvangssnelheden der hydrolyse, wanneer gelijke concentraties van urease inwerken op verschillende concentraties van ureum bij constante p_H en T, levert resultaten, die onverklaarbaar schijnen zonder de stralings-theorie.

Hoe lager de p_H, hoe meer deze aanvangssnelheden toenemen bij toename van de concentratie van de ureum. Bij hooge p_H is er eerst een toename en dan een afname bij verhooging van de ureumconcentratie.

Deze feiten worden aangetoond in volkomen overeenstemming te zijn met de stralings-theorie.

8. De invloed van neutrale stoffen wordt experimenteel en theoretisch onderzocht. Afname zoowel als toename der enzym-werking

door dezelfde stof worden verklaard door den invloed, dien de neutrale stof heeft op de dissociatie-constanten van water of van urease of van beide.

9. De hypothese wordt opgesteld, dat urease-straling, verzwakt door verspreiding of op eenige andere wijze, de synthese veroorzaakt.

Experimenteel bewijs hiervan wordt geleverd door het feit, dat bij hooger p_H, waar de urease wordt aangetoond in verval te zijn, omkeering der hydrolyse herhaalde malen wordt geconstateerd.

10. Een tweede gevolgtrekking van deze conceptie, dat buiten de spheer van hydrolytische werking rondom een urease molekuul een gebied van straling moet bestaan, verzwakt door de verspreiding, en dus van synthese, verklaart het feit, vastgesteld door een serie van nieuwe experimenten, dat bij vermindering van de urease-concentratie beneden een zekere waarde, haar specifieke activiteit verminderd wordt. Immers het is duidelijk dat de synthetische werking van niet in verval zijnde urease alleen dan zich kan openbaren, als de spheren van hydrolytische werking elkander niet voldoende snijden.

11. Een derde gevolgtrekking, dat in een willekeurige urease-oplossing, waarin het enzym in verval is door de gecombineerde inwerking van alkaliteit, temperatuur en tijd, een synthese van ureum uit ammonium-carbonaat, evenredig aan de concentratie der urease, zal worden waargenomen, wordt experimenteel onderzocht en bevestigd.

12. Beschrijving van een apparaat voor de eenvoudige bepaling van H-ionen concentratie bij constante temperatuur.

De bepaling van de OH-ionen concentratie, die noodig is voor de berekening van de dissociatie-formule van urease, wordt uitgevoerd met hetzelfde apparaat, na verandering van de waterstof-electrode in een zuurstof-electrode.

Laboratorium der Nederlandsche Gist- en Spiritus-Fabriek te Delft.

Een volledig verslag van dit onderzoek, met alle experimenteele resultaten, verschijnt dit jaar in de Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas.

Geologie. — De Heer MOLENGRAAFF biedt eene mededeeling aan van den Heer P. KRUIZINGA: „*Eenige nieuwe sedimentaire zwerfsteensoorten van Groningen*”.

(Mede aangeboden door den Heer VAN BEMMELEN).

Voor het verzamelen van sedimentaire zwerfsteenen deden zich ongeveer een tiental jaren geleden wederom bijzonder gunstige omstandigheden voor. Op een drietal plaatsen nl. alle in de stad Groningen op het Noordelijk uiteinde van den Hondsrug gelegen en in de nabijheid van de Noorder Begraafplaats, welke als vindplaats van erratica reeds bekend is geworden, werden belangrijke ingravingen gedaan. Het eerst bij het maken van de grondwerken voor het bouwen van de nieuwe tramremise en kort daarop door den aanleg van een paar nieuwe straten, de Tuinbouwstraat en de Koolstraat.

Bij het graven van sleuven, noodig voor het leggen van de rioolbuizen, werd het Dilivium op het punt, waar eerstgenoemde straat aan de Nieuwe Ebbingestraat aansluit, niet meer bereikt. De aanwezigheid van scherven aardewerk op meer dan 1 meter diepte deed evenwel vermoeden, dat de bovenliggende grond daar was omgewerkt of opgehoogd. Iets verder in de Tuinbouwstraat, kwam echter spoedig het Diluvium te voorschijn en vanaf dat oogenblik naderde deze formatie steeds meer de oppervlakte, totdat ze ongeveer halverwege, ruim een halve meter boven het tegenwoordige niveau der straat verrees en nog slechts door een dunne laag teelaarde werd bedekt. Daarop daalde ze eerst weer beneden straatniveau, waarna ze bij de Nieuwe Boteringestraat nogmaals laatstgenoemde hoogte bereikte. Later werd ze dan ook nog bij gelegenheid van de excursie, welke in 1913 door de Geol. Sectie van het Geol. Mijnbouwkundig Genootschap (28, blz. 83) is ondernomen, aangetroffen in het eerste gedeelte van de Verlengde Tuinbouwstraat, waar ze eveneens slechts door eene laag teelaarde was bedekt.

Op alle 3 bovengenoemde plaatsen werd keileem aangetroffen, welke kalkhoudend, doch ook reeds geoxydeerd is, bovendien nog verschillende grintbanken.

Onder het groot aantal zwerfsteenen, door mij bij deze ingravingen aangetroffen, bevonden zich verschillende interessante stukken. Van de bij Groningen zeldzamere soorten noemde ik reeds (30, blz. 231) de Boven-Silurische kalksteen met *Pristiograptus frequens* Jaek. en

de Saltholmskalk (ook de glauconietische, het zoogen. Glauconietische Terebratula-gesteente) uit het Daniën.

Hier volgen nog een drietal Silurische, welke tot dusverre geen van alle in ons land bekend waren en waarvan de beide laatste bovendien nog niet in het buitenland zijn aangetroffen.

Kalksteen met Strophomena Jentzschi Gag.

Onder het zwerfsteenmateriaal, dat bij het bouwen van de nieuwe tramremise werd aangetroffen, vond ik o. a. een plaatvormig stuk steen van ongeveer 2 cM. dikte en ruim 1 dM. lengte en breedte, waarin een groot aantal dorsale kleppen van eene karakteristieke *Strophomena* voorkomen. Van andere fossielen bleek deze zwerfsteen nog slechts eene overlangsche doorsnede van eene *Pleurotomaria* en een klein pygidium van *Asaphus raniceps* Dalm. te bevatten, zoodat daaruit reeds dadelijk moet volgen, dat dit stuk tot het Onder-Siluur moet worden gerekend.

Het gesteente is een fijnkorrelige, vrij harde kalksteen met verspreid liggende, kleine, afgeronde kwartskorreltjes. Glauconiet heb ik niet aangetroffen. De oorspronkelijke kleur is niet meer waar te nemen, daar deze door verweering is overgegaan in eene min of meer geelachtig grijze. Ook komen nog enkele bruinachtige plekken voor.

Bij het naslaan van de literatuur bleek mij al spoedig, dat eene geheel overeenkomstige *Strophomena* reeds door Gagel uit Oost-Pruisen is beschreven onder den naam *Strophomena Jentzschi* (15 blz. 17, 44 pl. V, fig. 26). Een van de twee stukken, waarin dit fossiel daar gevonden is, bestaat uit bruinachtig grijze, harde kalksteen met iets verweerde, geelachtige plekken. Het is afkomstig van Spittelhof en bevat behalve talrijke dorsale kleppen van bovengenoemd fossiel nog resten eener groote *Strophomena* en eene andere niet nader te herkennen brachiopode. Het andere stuk is afkomstig van Pr. Holland en bestaat uit grofkristallijne kalksteen, waarin slechts ééne dorsale klep van *Strophomena Jentzschi* Gag. voorkomt, benevens koralen en resten van crinoiden. Beide zwerfsteenen meende Gagel later op grond van hun petrographisch karakter tot het Boven-Siluur te moeten rekenen. Zooals echter aanstonds zal blijken, is aangetoond, dat ook deze zwerfsteenen, of ten minste het eerstgenoemde stuk, tot het Onder-Siluur moeten worden gerekend. Het andere daarentegen zou volgens Andersson mogelijk uit het Boven-Siluur afkomstig kunnen zijn en eene naverwante soort bevatten.

Ten einde nu volkomen zekerheid te verkrijgen, omtrent de juistheid van de door mij gedane bepaling, verzocht ik Prof. Andrée

uit Koningsbergen mij zoo mogelijk een van de origineele stukken van Gagel ter vergelijking te willen zenden. Met de grootst mogelijke bereidwilligheid werd daaraan gevolg gegeven, door het zenden van een paar afzonderlijke, goed bewaarde kleppen van Spittelhof, waarvoor ik hem bij dezen nog mijnen hartelijken dank betuig.

Mijn vermoeden werd daardoor volkomen bevestigd. De korte beschrijving van dit fossiel door Gagel gegeven, laat ik hier echter volledigheidshalve nog even volgen:

„Umriss querverbreitert, Schlossrand gleich der grössten Schalen- „breite. Schale anfänglich flach, dann allmählig unter einem rechten „Winkel nach der Ventralseite zu gekrümmt, so dass die Dorsal- „schale convex wird. Oberfläche mit zahlreichen feinen, aber deut- „lichen runden Rippen bedekt, deren Zwischenräume durch 2—3 „sehr feine Radialstreifen angefüllt sind. Ausserdem befinden sich „auf dem flachen Theil der Schale noch eine Anzahl unregelmässiger, „flacher, concentrisch angeordneter Runzeln, ähnlich wie bei Stro- „phomena rhomboidalis. In der Mitte der Dorsalschale befindet sich „oft noch eine kleine, aber deutliche Einsenkung".

De concave ventrale klep is door Gagel evenmin als door mij gevonden.

Omtrent de petrographische overeenkomst tusschen den zwerfsteen van Spittelhof en het door mij gevonden stuk, kon ik echter door mijn vergelijkingsmateriaal geen volkomen zekerheid verkrijgen; wel scheen deze vrij groot te zijn.

De tweede en laatste auteur, door wien zwerfsteenen met *Strophomena Jentzschi* Gag. uit Duitschland zijn beschreven, is Stolley (20 blz. 136) geweest. Zonder nadere opgave van vindplaats, alleen met de vermelding uit Sleeswijk-Holstein, noemt deze nog twee stukken. Het eene bestaat uit lichtgrijzen kalksteen, waarin plaatselijk wormvormige opeenhoopingen van glauconiet korrels aanwezig zijn. Behalve een aantal exemplaren van *Strophomena Jentzschi* Gag., bevat dit stuk slechts *Orthisina plana* Pand. Het andere, vertoont veel overeenkomst met het voorgaande, doch bevat slechts zeer weinig glauconiet en leverde als begeleidend fossiel slechts *Orthisina concava* v. d. Pahl.

In Denemarken is, voor zoover mij bekend, deze *Strophomena* niet in zwerfsteenen aangetroffen.

Slechts eenige jaren evenwel, nadat Gagel de soort beschreven had, werden door J. G. Andersson (19 blz. 69—86) ook een aantal zwerfsteenen met hetzelfde fossiel uit Zweden bekend. Een daarvan is afkomstig van L. Brunnby in het kerspel Stenåsa op Oeland, één van Källunge Myr op Gotland en vier van Gotska Sandön.

Deze stukken wijken echter alle in hooge mate van het Groninger,

zoowel als van de Duitsche af, daardat ze een aantal rolstukken van bruine phosphoriet en bruine tot zwarte phosphoriethoudende zandsteen bevatten. Het zijn dus echte conglomeraten, waarom ze dan ook door ANDERSSON als Strophomena-Jentzschi-conglomeraat worden aangeduid. Dergelijke knollen worden door STOLLEY, noch door GAGEL vermeld, terwijl door hen ook niet over eenig phosphorgehalte wordt gesproken. Ook mijn stuk bevat dit niet. Karakteristiek is nog voor de zwerfsteenen van ANDERSSON, dat enkele phosphorietknollen Boven-Cambrische fossielen bevatten, n.l. *Peltura scarabaeoides* Wahlb., *Sphaerophthalmus* sp. en *Agnostus pisiformis* Linn. en dus afkomstig zijn uit een gebied van Cambrische afzettingen, dat tijdens het begin van het Onder-Siluur aan erosie was blootgesteld. ANDERSSON (l.c. blz. 79) zelf besluit naar mijne meening uit deze zwerfsteenen echter ten onrechte, dat deze van dezelfde plaats afkomstig zijn, vanwaar destijds ook de rolsteenen, welke ze bevatten, zijn gekomen en dat daar ter plaatse dus minstens het geheele Boven-Cambrium moet zijn weggeërodeerd. Ik geloof, dat dit geenszins het geval behoeft te zijn en dat het zelfs waarschijnlijk niet het geval is, doch dat het gebied, vanwaar deze Cambrische rolsteenen afkomstig zijn, min of meer in de omgeving moet gezocht worden van de plaats, vanwaar deze Silurische zwerfsteenen gekomen zijn. In de eerste plaats is daarbij dan te denken aan het kustgebied van het vasteland van Zweden ten Westen en Noordwesten van Gotland.

Ook het cement, dat de phosphorietknollen samenkit, verschilt soms meer of minder van de eerst besproken zwerfsteenen, daar dit volgens J. G. ANDERSSON soms bestaat uit grijzen tot witgevlekten, grofkristallijnen kalksteen en soms uit grijzen, dichten kalksteen, waarin een grooter of kleiner aantal, afgeronde kwartskorrels voorkomen, evenals ook enkele malen glauconiet.

Als begeleidende fossielen worden uit de laatstgenoemde zwerfsteenen vermeld *Orthisina* sp., *Platystrophia biforata* Schloth., *Strepula* sp., *Tetradella* sp., *Asaphus* sp., *Illaenus nuculus* Pomp., *Illaenus* sp., enkele Bryozoën en andere niet nader te determineeren fossielen. Hiervan was *Illaenus nuculus* Pomp. tot dusver slechts bekend uit één door POMPECKJ (16 blz. 69) beschreven zwerfsteen van Oost-Pruisen, waarvan door dezen auteur ook reeds de Onder-Silurische ouderdom vermoed werd. Deze laatste steen bestaat uit bruinachtigen, grofkorreligen kalksteen met vele kwartskorreltjes.

Tenslotte is uit het Noord-Balticum nog één zwerfsteen met *Strophomena Jentzschi* Gag. vermeld door WIMAN (23 blz. 103), n.l. No. 94 van Ekeby. Dit stuk bestaat uit Roode Asaphus-kalk en bevat geen andere fossielen.

De ouderdom van al deze zwerfsteenen kon worden vastgesteld, doordat *Strophomena Jentzschi* Gag. in vaste rots is aangetroffen, eerst door ANDERSSON (l.c. blz. 77) op het Noordelijk gedeelte van Oeland, later door LAMANSKY (22 blz. 177) aan de Wolchow in Rusland en ten slotte door HOLTEDAHL [1]) (29 blz. 46) in Z. Noorwegen bij Vaekkerö en Töien.

LAMANSKY (l.c. blz. 177) vermoedt, dat ook de brachiopode, welke door BRÖGGER (5 blz. 50 pl. XI, fig. Va) als *Strophomena rhomboidalis* Wilck., uit de Expansus-lei en het onderste gedeelte der Orthocerenkalk van Zuid-Noorwegen vermeld is, identiek zou zijn met *Strophomena Jentzschi* Gag. De afbeelding, waarnaar wordt verwezen, gelijkt er evenwel in het geheel niet op, zooals reeds door HOLTEDAHL terecht is opgemerkt.

Op Oeland werd dit fossiel wel is waar zeldzaam, doch constant gevonden in de onderste, glauconietrijke Asaphus-kalk, in Rusland in de drie afdeelingen van de zone B_{III} (B_{III_α}, B_{III_β} en B_{III_γ}) van LAMANSKY. De onderste helft van B_{III_α} wordt nu door laatstgedoemden auteur op grond van zijne onderzoekingen geparalleliseerd met de Onderste Asaphus-kalk van Oeland, het Strophomena-Jentzschi-conglomeraat echter met de Bovenste Asaphus-kalk en de Gigas-kalk van Oeland en met het bovenste gedeelte van LAMANSKY's zône B_{III_β} en met diens zône B_{III_γ} van Rusland, zoodat daaruit volgt, dat *Strophomena Jentzschi* Gag. een grootere verticale verspreiding heeft, dan oorspronkelijk door ANDERSSON kon worden vermoed. In Zuid-Noorwegen is het fossiel gevonden in de zône 3 c.

Ten einde dus te kunnen bepalen, waarmee deze zwerfsteen moet worden geparalleliseerd, is het noodzakelijk, in verband met het verschillend petrographisch karakter van de in aanmerking komende afdeelingen zelve en met het verschillend karakter van elk daarvan in verschillende gebieden, eerst na te gaan, van welk gebied het stuk waarschijnlijk afkomstig zal zijn.

Asaphus raniceps Dalm. komt volgens LINDSTRÖM (11 blz. 9—12) reeds in de Onderste Grijze Orthocerenkalk van Zweden voor en wordt nog gevonden in de Bovenste Grijze Orthocerenkalk.

In Rusland is deze soort volgens SCHMIDT aangetroffen in de zônes *B 2b*—*B 3b*, volgens LAMANSKY (22 blz. 169) in de bovenste lagen van de door dezen auteur onderscheiden afdeeling B_{III_α} tot in de onderste van B_{III_γ}.

In Noorwegen is ze volgens BRÖGGER (5 blz. 92) niet met zekerheid aangetroffen.

[1]) Aanm. Slechts door dezen auteur is tot dusverre eene ventrale klep aangetroffen.

Van het vasteland van Scandinavië zal deze zwerfsteen dan ook zeer waarschijnlijk niet afkomstig zijn. *Strophomena Jentzschi* Gag. toch, is daar nog slechts bekend van Z. Noorwegen en bovendien verschillen de gesteenten van de daar in aanmerking komende zônes van onzen zwerfsteen.

Eveneens valt het Russische Siluur buiten beschouwing, al komt laatstgenoemd fossiel ook in Rusland voor. Ten Westen van Reval is het nog niet aangetroffen. In dat gebied is van de zone B_{III} ook slechts $B_{III\gamma}$ aanwezig, en deze afdeeling bestaat daar uit kalkzandsteen. Uit het Oost-Balticum is dus onze zwerfsteen evenmin afkomstig.

Uit het Noord-Balticum is, zooals reeds gezegd is, slechts één zwerfsteen bekend, welke *Strophomena Jentzschi* Gag. bevat, terwijl het petrographisch karakter daarvan niet met dit stuk overeenkomt. Wel zijn daar stukken grijze kalksteen gevonden, welke behooren tot de Asaphus-kalk van Wiman en welke dus ongeveer even oud kunnen zijn.

Op Oeland bestaat de Onderste Asaphus-kalk uit glauconiethoudende en glauconietvrije kalksteen, waarvan dus het eerste gesteente misschien vrij goed overeen kan komen met de zwerfsteenen van Stolley, doch beide stemmen niet met het Groninger stuk overeen, vooral wat betreft het gehalte aan kwartskorrels.

Door de aanwezigheid van zwerfsteenen met *Strophomena Jentzschi* Gag. op Oeland, Gotland en Gotska Sandön komt echter bovendien nog het gedeelte van de Oostzee ten W. en ten N. van de beide laatste eilanden als plaats van herkomst in aanmerking. Wel is waar wijken de zwerfsteenen, welke vandaar vermeld zijn, ook sterk van het Groninger stuk af, toch moet dit gedeelte van het West- en Midden-Balticum vermoedelijk als plaats van herkomst worden aangenomen. Ook Stolley en Andersson doen dit voor de door hen beschreven stukken, terwijl bovendien de aanwezigheid van dergelijke zwerfsteenen in Oost-Pruisen en wel vooral het stuk, dat door Pompeckj beschreven is en de door Gagel van Spittelhof vermelde steen zeer sterk voor deze aanname pleit.

Waarschijnlijk is dit stuk dan ook afkomstig te achten uit eene smalle strook van de Oostzee, een weinig ten Noorden van Gotska Sandön en op eenigen afstand ten Westen van Gotland.

Uit het voorgaande blijkt derhalve, dat de plaats van herkomst niet nauwkeuriger is aan te geven, zoodat dan ook niet met zekerheid is uit te maken tot welke afdeeling van de zône B_{III} het stuk moet worden gerekend. Voorloopig moet daarom deze steen evenals het Strophomena-Jentzschi-conglomeraat tot B_{III} in haar geheel worden gebracht.

Kalkzandsteen met Asaphus raniceps Dalm.

In de Tuinbouwstraat, werd onder de vele zwerfsteenen één stuk gevonden, dat naar de fossielen, welke het bevat, te oordeelen, moet worden gerekend tot het Onder-Siluur, doch dat een absoluut ongewoon petrographisch karakter bezit, daar het bestaat uit vrij harde, fijnkorrelige zandsteen met een kalkhoudend cement. Een dergelijk gesteente bleek bovendien in de zwerfsteenliteratuur tot dusverre nog geheel onbekend te zijn.

Deze zwerfsteen heeft ongeveer de grootte van een kinderhoofdje en is oorspronkelijk grijs tot blauwgrijs van kleur geweest, zooals nog aan de kern is te zien; aan de buitenzijde is hij evenwel bruingeel verkleurd. Overigens heeft het gesteente weinig door verweering geleden. De kwartskorrels zijn klein, vrijwel kleurloos en afgerond. Glauconiet trof ik niet aan, wel enkele stukjes calciet en ook bevat het gesteente een paar stukjes min of meer afgeronde, grofkorrelige kalksteen, welke aan hun omtrek zwart en in het midden wit zijn. Deze stukjes, bovendien nog gekenmerkt, doordat ze een groot aantal bruine, staafvormige lichaampjes bevatten, zijn vermoedelijk rolsteentjes, daar ze zoo sterk van het omgevende gesteente afwijken; met zekerheid is het evenwel niet uit te maken.

Behalve één exemplaar eener *Orthis*-soort, bevat deze zwerfsteen een klein, doch bijna volledig pygidium van *Asaphus raniceps* Dalm. (Lengte $7^1/_2$ mM., breedte 11 mM.) en talrijke andere, niet nader te bepalen brokstukken van Asaphiden, o.a. een fragment van een hypostoom.

Over het voorkomen van *Asaphus raniceps* Dalm. in de Onder-Silurische afzettingen in Scandinavie en Rusland is bij de beschrijving van de vorige zwerfsteensoort reeds iets medegedeeld, zoodat ik hier kan volstaan met daarnaar te verwijzen.

Uit het bovenstaande blijkt derhalve reeds, dat deze steen tot de oudere lagen van het Onder-Siluur moet worden gerekend en wel tot een van de afdeelingen aequivalent met de Zweedsche Orthocerenkalk.

In Scandinavië of op Bornholm is echter geen gesteente als vaste rots bekend, dat ook maar eenigszins op dezen steen gelijkt. Slechts vanaf Reval is in het Westelijk gedeelte van Estland $B_{III_{\gamma}}$ van Lamansky als kalkzandsteen ontwikkeld. Stukken van dit gesteente komen ook nog aan het strand van het eiland Odensholm voor, zoodat deze afdeeling minstens tot daar hetzelfde petrographisch karakter behoudt. Ze bevindt zich daar reeds onder zeeniveau. Ik bezit echter geen vergelijkingsmateriaal van dit gesteente, zoodat ik

mij omtrent de overeenkomst daarvan met dezen zwerfsteen niet nader kan overtuigen.

Bovendien zijn enkele zwerfsteenen bekend geworden, welke uit kalksteen bestaande, een wisselend gehalte aan afgeronde kwartskorreltjes bezitten en waarvan de ouderdom overeenkomt met B_{III}, zooals uit de beschrijving der vorige zwerfsteensoort valt op te merken. Ik heb daarom gemeend, dat dit stuk misschien als eene zeer kwartsrijke varieteit van de kalksteen met *Strophomena Jentzschi* Gag. en van het Strophomena-Jentzschi-conglomeraat is te beschouwen, vooral omdat ook in het vorige stuk een pygidium voorkomt, dat tot dezelfde *Asaphus*-soort behoort.

Toen ik daarop een nader onderzoek instelde omtrent een mogelijk phosphorgehalte, bleken zoowel het gesteente als de vreemde insluitsels van kalksteen daarop zwak, doch duidelijk te reageeren. Aan deze laatste werd echter de lucht van bitumen niet waarneembaar wanneer daarvan met den hamer stukjes werden afgeslagen en omdat hierin geen fossielen aangetroffen zijn, is derhalve niet uit te maken, of deze stukjes kalksteen, zooals het geval is bij de door Andersson onderzochte zwerfsteenen van het Strophomena-Jentzschi-conglomeraat, tot het Cambrium moeten worden gerekend.

Als waarschijnlijke plaats van herkomst van dezen zwerfsteen moet in elk geval worden aangenomen die strook van de Oostzee, welke ongeveer de voortzetting van den kalkzandsteen in Estland Westwaarts bedekt en zich verder langs de Noordzijde van Gotska Sandön tot ten Westen van Gotland voortzet, aldus het gebied omvattende, waaruit het Strophomena-Jentzschi-conglomeraat afkomstig is.

Kalksteen met Dinobolus transversus Salt.

Een door verweering bruingeel verkleurd stuk fijnkorrelig-kristallijne kalksteen, dat ongeveer de grootte heeft van eene vuist, bevat eene dorsale klep van *Dinobolus transversus* Salt. (1 blz. 59, pl. V, fig. 1—6), welke ondanks de minimale dikte bijzonder fraai bewaard is gebleven. Ook dit stuk, dat eveneens in de Tuinbouwstraat te Groningen werd gevonden, is een geheel onbekende zwerfsteensoort, daar 't juist genoemde fossiel in geen van de andere landen werd aangetroffen.

De lengte der klep is 3 cM., de grootste breedte, welke ongeveer over het midden verloopt, 4,2 cM. De bijna rechte slotrand is 3,3 cM. lang.

De dorsale klep is bijna geheel vlak en vertoont op haar oppervlak talrijke, zeer flauwe, concentrische groeilijnen en eene uiterst fijne radiale streping. Of op het uitwendig oppervlak, zooals

Davidson (l.c. pl. V, fig. 3 en 3a) in eene figuur aangeeft, stekeltjes voorkomen is niet uit te maken.

Van andere fossielen bevat deze zwerfsteen behalve een aantal kleine steelleden van crinoiden, een klepje van *Pholidops implicata* Sow. (1 blz. 80, pl. 8, fig. 13—17), een klepje van *Beyrichia Jonesi* Boll (13 blz. 13, pl. II, fig. 10—12) en een pygidium van *Proetus concinnus* Dalm. (9 blz. 78, 18 blz. 41, pl. IV, fig. 1—9, 3 blz. 22 pl. XVII, fig. 5).

Uit alles blijkt derhalve, dat deze zwerfsteen behoort tot het Boven-Siluur, tot welke zône moet evenwel nog nader worden uitgemaakt.

Pholidops implicata Sow. is in tegenstelling met *Pholidops antiqua* Schloth. in onze, zoowel als in Duitsche en Deensche Boven-Silurische zwerfsteenen waarschijnlijk nog geheel onbekend, wat vermoedelijk ten deele daaraan moet worden toegeschreven, dat verschillende auteurs in beide namen synoniemen (7 blz. 96, 10 blz. 173) hebben gezien. Bij nader onderzoek blijken deze volgens Moberg en Grönwall (24 blz. 30) te zijn gegeven aan fossielen, welke wel is waar zeer na met elkander verwant zijn, doch niettemin duidelijke verschillen vertoonen. Slechts Kiesow (6 blz. 245) vermeldt, dat *Pholidops implicata* Sow. (= *Crania implicata* Sow.) in West-Pruisen in de zwerfsteenen van de Boven-Silurische Beyri- *Pholidops antiqua* talrijk is. Ik vermoed echter, dat ook hij hierbij op *Pholidops antiqua* Schloth. doelt.

In vaste rots is *Pholidops implicata* Sow. alleen bekend van het eiland Gotland (uit de zônes *c*—*h* van Lindström (12 blz. 13). Munthe (27 blz. 12—13) noemt het fossiel uit de door hem onderscheiden lagen 2—4 en Van Hoepen (25 blz. 125) uit γ en ε^{w}_{8}. Wel vermeldt Lindström ook het voorkomen in Schonen (l. c. blz. 26), doch Moberg en Grönwall verklaren, dat de daar voorkomende soort duidelijk verschilt van de Gotlandsche en overeenkomt met *Pholidops antiqua* Schloth. Welke van deze beide fossielen op Oesel en in Estland wordt aangetroffen, is tot dusverre nog niet bekend.

Beyrichia Jonesii Boll is door Kiesow (13 blz. 13, pl. II, fig. 10—12) van Gotland vermeld uit Lindström's zônes *c*—*h*, door Van Hoepen (l. c. blz. 132) uit diens zône ε^{w}_{1}. In Schonen is dit fossiel niet aangetroffen, terwijl omtrent het voorkomen ervan op Oesel en in Estland nog niets bekend is.

Proetus concinnus Dalm. wordt slechts door Schmidt (l. c. blz. 44) uit de Onderste Oeselsche laag (zône *J*) van de Russische Oostzee-provincies genoemd, van Gotland door Lindström (12 blz. 3) uit de zônes *c*—*e* en door Van Hoepen uit diens zône γ_{1} (van Mulde) (l.c.

blz. 142). Daarenboven is dit fossiel met *Beyrichia Jonesii* Boll in zwerfsteenen aangetroffen in gezelschap van *Leperditia Baltica* Eichw. en *Beyrichia spinigera* Boll (2 blz. 39, 17 blz. 502).

Ik geloof daarom te kunnen aannemen, dat deze zwerfsteen waarschijnlijk in ouderdom overeenkomt met de Onderste Oeselsche laag van de Russische Oostzeeprovincies.

Op Oesel bestaat de Onderste Oeselsche laag bijna geheel uit blauwe mergel en dolomiet. Slechts in het Westen komt op het schiereiland Taggamois kalksteen voor (4 blz. 46). De aequivalente lagen op Gotland bestaan daarentegen uit mergel, mergelige kalksteen en kalksteen en de aequivalente lagen op het vasteland van Zweden uit graptolietenlei, zoodat dit laatste gebied dan ook niet als plaats van herkomst in aanmerking kan komen.

Als zoodanig komt derhalve Gotland en het gedeelte van de Oostzee, dat zich tusschen dit eiland en Oesel bevindt, in aanmerking en daarvan waarschijnlijk in de eerste plaats het eiland Gotland met naaste omgeving.

Delft, Mei 1919.

LITERATUUR.

1. Davidson, Th. 1864—1871. „British fossil Brachiopoda. Vol. III: Devonian and Silurian Species." Londen.

2. Krause, A. 1877. „Die Fauna der sogen. Beyrichien- oder Chonetenkalke des norddeutschen Diluviums." Zeitschr. d. d. geol. Ges. Bd. XXIX, S. 1—48.

3. Angelin, N. P. 1878. „Palaeontologia Scandinavica. Pars I." Stockholm.

4. Schmidt, F. 1881. „Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten, nebst geognostischer Uebersicht des ostbaltischen Silurgebietes. Abt. I." Mém. d. l'Acad. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, 7e Ser., T. XXX, No. 1.

5. Brögger, W. C. 1882. „Die silurischen Etagen 2 und 3 im Kristianiagebiet und auf Eker etc." Kristiania.

6. Kiesow, J. 1884. „Ueber silurische und devonische Geschiebe Westpreussens." Sonderabdr. Schr. d. naturf. Gesellschaft in Danzig, N F., Bd. VI, S. 205—303.

7. Roemer, F. 1885. „Lethaea erratica, oder Aufzählung und Beschreibung der in der norddeutschen Ebene vorkommenden Diluvialgeschiebe nordischer Sedimentär-gesteine." Palaeont. Abhandl. herausgeg. von W. Dames und E. Kayser. Bd. II H. 5.

8. Holm, G. 1885. „Bericht über geologische Reisen in Estland, N. Livland und im St. Petersburger Gouvernement in den Jahren 1883—1884." Sonder-Abdr. Verhandl. d. Kais. Miner. Ges.

9. Lindström, G. 1885. „Förteckning på Gotlands Siluriska Crustacéer." Öfversigt af Kongl. Vetensk. Akad. Förh. No. 6.

10. Verworn, M. 1885. „Ueber Patellites antiquus Schloth." Zeitschr. d. d. geol. Ges. Bd. XXXVII, S. 173—176.

11. Lindström, G. 1888. „List of the fossil Faunas of Sweden. I. Cambrium and Lower Silurian." Stockholm.

12. Lindström, G. 1888. „List of the fossil Faunus of Sweden. II. Upper Silurian." Stockholm.

13. Kiesow, J. 1888. „Ueber Gotländische Beyrichien." Sonder-Abdr. Zeitschr. d. d. Geol. Ges. Bd. XL. S. 1—16.

14. Moberg, J. Chr. 1890. „Om en afdelning inom Ölands Dictyonemaskiffer såsom motsvarighet till Ceratopygeskiffern i Norge. Samt Anteckningar om Ölands Orthocerkalk." Sver. Geol. Unders., Ser. C, No. 109.

15. Gagel. C. 1890. „Die Brachiopoden der cambrischen und silurischen Geschiebe im Diluvium der Provinzen Ost- und Westpreussen." Beitr. z. Naturk. Preussens, herausgeg. von der phys.-ökon. Ges. zu Königsberg, No. 6.

16. Pompeckj, J. F. 1890. „Die Trilobitenfauna der Ost- und Westpreussischen Diluvialgeschiebe." Beitr. z. Naturk. Preussens herausgeg. v. d. phys. oekon. Ges. zu Königsberg, No. 7.

17. Krause, A. 1801. „Beitrag zur Kenntniss der Ostracoden-Fauna in silurischen Diluvialgeschieben." Zeitschr. d. d. geol. Ges., Bd. XLIII, S. 488—521.

18. Schmidt, F. 1894. „Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten Abt. IV." Mém de l'Acad. Imp. des Sc. de St. Pétersbourg 7e Ser., T. XLII, No. 5.

19. Andersson, J. G. 1896. „Ueber Cambrische und silurische phosphoritführende Gesteine aus Schweden". Repr. from. Bull of the Geol. Instit. of Upsala No. 4. Vol. II. Part 2, 1895.

20. Stolley, E. 1898. „Einige neue Sedimentärgeschiebe aus Schleswig-Holstein und benachbarten Gebieten". Schriften der Naturw. Ver. f. Schleswig-Holstein. Bd. XI. 5: 133—148.

21. Schmidt, F. 1901. „Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten. Abt. V. Liefr. 2". Mém de l'Acad, Imp. de Sc. de St. Pétersbourg. 8e Ser., T. XII, No. 8.

22. Lamansky, W. 1905. „Die aeltesten silurischen Schichten Russlands. Et. B." Mém du Com. Géol., N. Ser., Livr. 20.

23. Wiman, C. 1907. „Studien über das Nordbaltische Silurgebiet II". Bull. of the Geol. Instit. of the Univ. of Upsala. Vol. VIII, 1906, p. 73—188.

24. Moberg, J. Chr. en Grönwall, K. A. 1909. „Om Fyledalens Gotlandium". Medd. fran Lunds Geol. Fältklubb., Ser. B, No. 3. Lunds Univ. Årsskrift, N. F., Afd. 2., Bd. 5, No. 1. Kongl Fysiogr. Sällsk. Handl., N. F., Bd. 20, No. 1.

25. Hoepen, E. C. N. van. 1910. „De bouw van het Siluur van Gotland". Dissert. Delft.

26. Moberg, J. Chr. 1910. „Historical—Stratigraphical Review of the Silurian of Sweden". Sver. Geol. Unders. Ser. C. No. 229. Årsbok 4. No. 1.

27. Munthe, H. 1910. „The sequence of strata in Southern Gotland". Geol. För. 1 Stockholm Förh., Bd. 32. H. 5. Guide des Excursions du Congr. Geol. en Suède, No. 19.

28. Jonker, H. G. 1913. „Verslag der tweede excursie der Geol. Sectie naar Gaasterland, Groningen en Noord-Drente onder leiding van de leden J. H. Bonnema en H. G. Jonker". Versl. der Geol. Sectie, dl. I, blz. 65—93.

29. Holtedahl, O. 1916. „The Strophomenidae of the Kristiania region." Vidensk. Skrifter. I, Math. Naturw. Klasse, 1915, No. 12.

30. Kruizinga, P. 1918. „Bijdrage tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland". Dissert. Groningen, Verhandeling v/h. Geol. Mijnb. k. Genootsch. voor Nederl. en Koloniën. Geol. Serie. dl. IV. p. 1—271.

Zoölogie. — De Heer WEBER biedt eene mededeeling aan van den Heer P. N. VAN KAMPEN: *„Over de phylogenese van het zoogdierhaar".*

(Mede aangeboden door den Heer SLUITER).

In zijn werk over „Die in Deutschland lebenden Arten der Saurier" (1872) en later [1]), in een afwijzende bespreking van MAURER's bekende theorie over de afleiding van de haren der zoogdieren van huidzintuigen, wijst LEYDIG op overeenstemming in den bouw der haren met de z.g.n. dij- of femoraalorganen der hagedissen, die hij beschouwt als een overgangsvorm tusschen gewone epidermiswoekeringen en haren.

Aan deze opmerking is minder aandacht geschonken dan ze verdiend had. Immers de bouw der genoemde organen, welker functie niet bekend is (misschien spelen ze een rol bij de paring), vertoont inderdaad veel overeenkomst met dien van een haar in vereenvoudigden vorm [2]): het zijn cylindrische staven, uit verhoornde epidermiscellen samengesteld en in een huidfollikel ingezonken. Van haren verschillen ze in hoofdzaak door het ontbreken van een cutispupil en daardoor, dat ze geen differentiatie in merg, schors en cuticula vertoonen. Wel is waar zouden ze volgens MAURER [3]) uit twee soorten van cellen opgebouwd zijn, maar de rangschikking dezer cellen is een geheel andere dan die van de bestanddeelen van het haar.

Daar geen der hypothesen, die haren van huidorganen van lagere Vertebraten trachten af te leiden, en waaronder de genoemde, op een groot feitenmateriaal gebaseerde van MAURER wel de meest bekende is, algemeen ingang heeft gevonden (in zijn overzicht over deze theorieën komt BOTEZAT [4]) dan ook tot het besluit, dat ze geen van alle stand kunnen houden en de haren bij de zoogdieren zelfstandig uit de huid zijn ontstaan), is het wenschelijk na te gaan, of het door LEYDIG uitgesproken denkbeeld misschien een kern van waarheid

---

[1]) Biol. Centralbl., XIII, 1893.

[2]) M.i. ten onrechte vergelijkt LEYDIG ze met een haarbundel, bestaande uit onderling verkleefde haren.

[3]) Die Epidermis und ihre Abkömmlinge. Leipzig, 1895, blz. 212 vv.

[4]) Anat. Anzeiger, XLVII, 1914/15.

kan bevatten. Tegen een directe afleiding der haren van femoraalorganen zou in het midden te brengen zijn, dat deze organen onder de recente Reptiliën slechts bij de Lacertiliers voorkomen en ook hier lang niet algemeen, dikwijls alleen bij het mannetje en bovendien altijd in een zeer beperkt aantal. Elders zijn onder Reptiliën met de dijorganen eenigszins vergelijkbare organen nog slechts bij krokodillen aangetroffen, waar ze volgens VOELTZKOW's beschrijving [1]) tusschen de huidschilden van den rug liggen.

Maar, indien ook al de haren bezwaarlijk direct uit femoraalorganen ontstaan gedacht kunnen worden, men zou zich toch de vraag kunnen stellen, of er niet een verband tusschen beide kan bestaan in dien zin, dat ze van gemeenschappelijken oorsprong zijn. Indien dit het geval is, zou allicht hun afkomst het gemakkelijkst op te sporen zijn bij de laatstgenoemde, eenvoudiger gebouwde organen. Zoo zouden deze dan licht kunnen werpen op den oorsprong van het haar.

De morphologische beteekenis der dijorganen is duidelijker geworden door het onderzoek van SCHÄFER [2]). Deze kan niet alleen bevestigen, wat reeds door vroegere onderzoekers was vermeld, dat nl. bij Lacerta de femoraalorganen van het mannetje in den paartijd sterker ontwikkeld zijn dan daarbuiten, maar hij geeft ook uitdrukkelijk aan, dat er in den paartijd geen verhoorning der cellen plaats vindt. Maar van meer belang is, wat hij vond bij Sceloporus acanthinus: bij deze Iguanide worden in de organen geen verhoornde cellen gevormd, maar in plaats daarvan een secreet, dat bestaat „aus einer völlig zerfallenen, dem Secret von Talgdrüsen ähnlich sehenden Masse." SCHÄFER komt tot de slotsom, dat de dijorganen glandulae celluliparae zijn, verwant aan de niet met haren in verband staande smeerklieren. Verhoorning treedt slechts dan op, wanneer de uitscheiding een langzame is. In verband met deze uitkomst is het van belang, dat MAURER [3]) vermeldt, dat bij Lacerta de inhoud van een deel der cellen der dijorganen een vettig karakter heeft.

Deze feiten wijzen op een nauwen samenhang der femoraalorganen met holokrine huidklieren, en de conclusie, dat ze van zulke klieren zijn af te leiden, ligt voor de hand. Het verschil tusschen beide is niet groot; indien bij een smeerklier de uitscheiding van het vettige secreet vervangen werd door verhoorning der cellen, dan zou een verhoornde staaf gevormd worden, die groote gelijkenis met de dijorganen zou vertoonen. Nu heeft de eleïdine, die bij zoogdieren bij het ver-

[1]) Abhandl. Senckenberg. Naturf. Ges., XXVI, H. 1, 1899.
[2]) Archiv f. Naturgesch., LXVIII, Bd I, 1902.
[3]) l. c., blz. 220.

hoorningsproces optreedt, volgens MAURER een vetachtig karakter [1]), terwijl het aan den anderen kant bekend is, dat de cellen van de smeerklieren der Mammalia eleïdine-korrels bevatten en zelfs gedeeltelijk verhoornen kunnen [2]). Trouwens men moet zich de kliercellen ontstaan denken uit gewone epitheelcellen, die het vermogen tot verhoorning reeds bezaten en het kan niet bevreemden, dat dit vermogen van tijd tot tijd weer aan den dag treedt.

De femoraalorganen van Lacerta zijn dus uit huidklieren ontstaan; den bouw dier klieren hebben ze behouden, chemisch zijn ze echter gewijzigd en dat in verband met de sterke verhoorning, die voor de huid der Reptiliën in het algemeen karakteristiek is.

Indien men de femoraalorganen van huidklieren kan afleiden, dan kan men zich ditzelfde ook van de haren der zoogdieren voorstellen. Alleen is in dit geval de differentiatie verder gegaan en de bouw van het orgaan een meer gecompliceerde, als gevolg van de belangrijker rol, die het haar speelt in het leven der zoogdieren. De haarpapil is secundair ontstaan te denken, in verband met de voor den sterkeren groei noodzakelijk geworden krachtiger voeding.

Maar er is nog een ander verschijnsel, dat door deze hypothese een eenvoudige verklaring vindt. De aanleg van het haar als een massieve epidermisknop komt geheel overeen met die van huidklieren, maar ook met die der femoraalorganen volgens de beschrijvingen van MAURER en SCHÄFER. Eerstgenoemde wijst dan ook reeds, wat de dijorganen betreft, op deze overeenkomst met huidklieren der Amphibiën, maar hecht groote beteekenis aan het verschil tusschen beide, dat daarin bestaat, dat de gladde spiervezels van de klieren der Amphibiën bij de femoraalorganen ontbreken. Hierin kan ik hem niet volgen: deze spiervezels, die bij de huidklieren noodig zijn voor de uitstorting van het secreet, zijn uit den aard der zaak bij de geheel verhoornde dijorganen overbodig en het is dus volkomen verklaarbaar, dat ze verloren gegaan zijn. En hetzelfde geldt in het geval der haren, waar ze eveneens ontbreken.

Een ander punt, waaraan MAURER veel waarde toekent, is de eigenaardige rangschikking der matrix-cellen, die bij den eersten aanleg van haar en huidzintuig op dezelfde wijze te voorschijn komt. Het komt mij echter voor, dat deze rangschikking door druk der omgevende cellen op de groeiende kiem verklaarbaar is en dus gereedelijk in verschillende gevallen onder overeenkomstige omstandigheden optreden kan.

---

[1]) GOETTE (Arch. f. mikr. Anat., IV, 1868) beschrijft ook het voorkomen van vetbolletjes in den jongen epithelialen haarkiem van het schaap.

[2]) Cf. SCHÄFER, Text-Book of Microscopic Anatomy, 1912, blz. 476.

Sinds de onderzoekingen van DE MEIJERE [1]) moet een poging om den oorsprong der haren te verklaren ook met hun verspreiding over de huid rekening houden. Waar bij zoogdieren schubben voorkomen, staan de haren in den regel in groepen daarachter ingeplant. Daarin verschillen ze dus van de dijorganen, die in het midden van schubben staan. Wel is waar is hieraan geen al te groote waarde toe te kennen, maar toch wil ik er in de eerste plaats op wijzen, dat de bovengenoemde, door VOELTZKOW beschreven huidorganen der krokodillen tusschen de huidschilden staan en vervolgens, dat de overeenkomst in plaatsing van haren en femoraalorganen grooter wordt, indien de beschouwingen van PINKUS [2]) naar aanleiding van de door hem beschreven „haarschijven" juist zijn. Indien, zooals hij zich voorstelt, een „Haarbezirk", d. w. z. het complex van schubrudiment, haargroep en haarschijf, in zijn geheel aan een Reptiliënschub beantwoordt, dan komen de haren in het midden van het gebied der schub te liggen, juist zooals de dijorganen. PINKUS, die de haarschijven van tastvlekken van Reptiliën afleidt, kan voor het ontstaan der haren geen verklaring vinden: „Das Säugetierhaar hat kein Homologon in dem Gebiet der Reptilienschuppe; sein Platz ist leer." Door de boven ontwikkelde hypothese wordt dit bezwaar tegen PINKUS' theorie opgeheven.

Op een andere rangschikking der haren heeft MAURER gewezen: nog voordat de haargroepen gevormd zijn, is bij zoogdierembryonen een plaatsing der haren in overlangsche rijen te constateeren. MAURER ontleent hieraan een argument voor zijn boven besproken theorie, daar een overeenkomstige rangschikking ook bij huidzintuigen algemeen is. Dit argument vervalt echter door de waarneming van MAURER zelf [3]), dat ook de eerste kiemen der huidklieren bij Triton en Anuren in rijen optreden.

De huidklieren der Promammalia hebben zich dus bij de Mammalia in divergeerende richting ontwikkeld: deels zijn er de haren, deels de huidklieren der zoogdieren uit ontstaan. Het complex van haar en smeerklieren is af te leiden, hetzij van een vertakte klier, waarvan de follikels een verschillende ontwikkelingsrichting ingeslagen hebben, hetzij, wat mij waarschijnlijker voorkomt, uit de vereeniging van een aantal klieren in één follikel, op dezelfde wijze als haren in een bundel vereenigd kunnen zijn. Voor deze laatste afleiding is aan te voeren, dat ook een aantal femoraalorganen soms

---

1) Morph. Jahrb., XXI, 1894.

2) Arch. f. mikrosk. Anat., LXV, 1905.

3) l. c., blz. 159.

een bundel met gemeenschappelijken follikel vormen: ik vond dit bij Lacerta agilis (zie fig.).



Fig. Lacerta agilis. Bundel van drie femoraalorganen (1—3).

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer T. VAN LOHUIZEN over: „*Het anomale* ZEEMAN-*effect.*"

(Mede aangeboden door den Heer ZEEMAN).

Om uit het atoommodel van BOHR het ZEEMAN-effect te verklaren, zijn reeds verschillende pogingen aangewend [1]). Tot nu toe is alleen het normale LORENTZ-triplet verklaard, vaak met overtollige componenten, welke echter in de theorie van RUBINOWICZ verdwenen zijn. Met de theorie van het anomale ZEEMAN-effect is men nog niet gevorderd, evenmin met de verklaring van het PASCHEN-BACK-effect. Men kan nu echter beproeven een onderdeel van het probleem tot eene oplossing te brengen, opdat wellicht de daaruit verkregen resultaten benut kunnen worden bij de volledige oplossing van het vraagstuk.

Een van de vragen, die zich hier voordoet en welker beantwoording ik mij tot taak heb gesteld, is deze:

Hangt de magnetische splitsing uitsluitend af van de begin- en de eindbaan, waarin het electron zich beweegt, of speelt de overgang daarbij een rol?

Anders gevraagd:

Geldt bij de aanwezigheid van een magnetisch veld nog de formule:

$$\nu = \frac{W_1 - W_2}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

of moet deze vervangen worden door een formule als bijv.:

$$\nu = \frac{W_1 - W_2}{h} \pm \frac{eM}{4\pi\, mc} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zooals BOHR [2]) meende te moeten aannemen.

Ik wil de vraag nog in een anderen vorm stellen, omdat in die formuleering de oplossing het gemakkelijkst te geven is.

Zooals bekend is, kan het trillingsgetal van iedere spectraallijn

---

[1]) N. BOHR, Phil. Mag. 27, p. 506. 1914.
K. HERZFELD, Phys. Zs. 15, p. 193. 1914.
P. DEBEYE, Gött. Nachr. 1916, p. 142, Phys. Zs. 17, p. 507. 1916.
A. SOMMERFELD, Phys. Zs. 17, p. 491. 1916.
A. RUBINOWICZ, Phys. Zs. 19, p. 441 en 465. 1918.

[2]) N. BOHR, Phil. Mag. 27, p. 506. 1914.

worden voorgesteld als het verschil van twee functies, z.g. „sequensen", bijv.:

$$\nu = \psi(i) - \varphi(k) \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \\ k = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

In mijne verhandeling „Le Phénomène de ZEEMAN et les séries spectrales"[1]) heb ik dat uitvoerig uiteengezet en wil daar verder naar verwijzen.

Daarin heb ik o.a. aangetoond, dat voor ieder „complex" van spectraallijnen, d.w.z. alle spectraallijnen wier trillingsgetallen voldoen aan verg. (3) wanneer de functies ψ en φ gegeven zijn en daarin i en k ieder de rij van de geheele positieve getallen doorloopen, geldt een bepaald type van anomaal ZEEMAN-effect, mits men rekening houdt met den invloed van het PASCHEN-BACK-effect. Men kan dus kortweg zeggen, dat ieder type van anomaal ZEEMAN-effect bepaald wordt door den vorm van de functies ψ en φ. Zijn deze functies eenmaal bepaald dan levert het verschil dier functies voor positieve geheele waarden van het argument steeds een spectraallijn met een bepaald type van ZEEMAN-effect.

Zooals in mijn geciteerde verhandeling[2]) uitvoeriger is aangetoond, kan men deze functies dus aanduiden als:

<table>
<tr><td>Enkelvoudig</td><td colspan="6">p</td><td colspan="6">s</td><td colspan="6">d</td><td colspan="6">f</td></tr>
<tr><td>Dubbel</td><td colspan="3">P</td><td colspan="3">P'</td><td colspan="3">S</td><td colspan="3">S'</td><td colspan="3">D</td><td colspan="3">D'</td><td colspan="3">F</td><td colspan="3">F'</td></tr>
<tr><td>Drievoudig</td><td colspan="2">Π</td><td colspan="2">Π'</td><td colspan="2">Π''</td><td colspan="2">Σ</td><td colspan="2">Σ'</td><td colspan="2">Σ''</td><td colspan="2">Δ</td><td colspan="2">Δ'</td><td colspan="2">Δ''</td><td colspan="2">Φ</td><td colspan="2">Φ'</td><td colspan="2">Φ''</td></tr>
</table>

Het symbool $\Pi\Sigma$ is dus de korte schrijfwijze voor:

$$\nu = \Pi(i) - \Sigma(k) \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \\ k = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots \end{array} \right.$$

Voor de bij ieder complex behoorende ZEEMAN-effecten verwijs ik naar (l. c.).

Men kan dus nu de bovengestelde vraag ook zoo formuleeren: Wordt ieder der bovengenoemde functies („sequensen") afzonderlijk veranderd door een magnetisch veld en is dus het ZEEMAN-effect dat waargenomen wordt, het resultaat van de verandering van beide sequensen samen?

1) T. VAN LOHUIZEN, Arch. Musée Teyler (III) 2, p. 165. 1914.

2) Voortaan aan te geven als (l. c.).

Of men zou, wanneer men spreekt van Π-banen, Σ-banen enz., waarmede men dus uitdrukt, dat een electron, dat van een Σ-baan naar een Π-baan springt, een spectraallijn doet optreden, behoorende tot het complex $\Pi\Sigma$, kunnen vragen:

Wordt iedere Π-baan, Σ-baan, enz. in een magnetisch veld ieder voor zich in meerdere banen gesplitst, elk met eene eenigszins verschillende energiewaarde, zoodat de electronen bij sprongen van en naar deze vervormde banen een trilling met een eenigszins veranderd trillingsgetal zouden uitzenden?

Mocht deze vraag bevestigend worden beantwoord, dan zou daaruit volgen, dat, gegeven de splitsingsmanieren van elk der banen (Π, Σ enz.), de waargenomen typen van Zeeman-effect door eenvoudige aftrekking daaruit zouden kunnen gevonden worden, m.a.w. dat het anomale Zeeman-effect zou gehoorzamen aan het z.g. ,,Kombinationsprinzip".

Nu heb ik ter beantwoording van de gestelde vragen, juist het omgekeerde gedaan. Ik heb n.l. gezocht of in het waarnemingsmateriaal over het anomale Zeeman-effect aanwijzingen waren te vinden voor de al dan niet geldigheid van het ,,Kombinationsprinzip."

In het volgende wilde ik eenige van de door mij verkregen resultaten mededeelen.

Als materiaal heeft gediend hetgeen ik in (l. c.) had verzameld. Om een zoo groot mogelijk aantal complexen te kunnen bewerken met een zoo gering mogelijk aantal sequensen heb ik mij voor mijn eerste onderzoek bepaald tot de drievoudige complexen en daarbij gevoegd eenige enkelvoudige complexen met vreemde asymptoot.

Men vindt deze bijeengevoegd in de volgende tabel:

beginbaan / eindbaan	Σ	Δ	Δ''	d
Π	$\Pi\Sigma$	$\Pi\Delta$	$\Pi\Delta''$	Πd
Π'	$\Pi'\Sigma$	$\Pi'\Delta$	$\Pi'\Delta''$	$\Pi'' d$
Π''	$\Pi''\Sigma$	$\Pi''\Delta$	$\Pi''\Delta''$	$\Pi'' d$

Voor de typen van Zeeman-effect, die deze complexen vertoonen, zie (l. c.).

Uit dit materiaal zijn vooreerst eenige algemeene gevolgtrekkingen te maken.

Als het electron springt van een beginbaan naar een Π-baan dan is het ZEEMAN-effect gecompliceerder, dan wanneer het van dezelfde beginbaan springt naar een Π'-baan, en dit is op zijn beurt weer gecompliceerder dan wanneer het van dezelfde beginbaan naar de Π''-baan springt.

Het ligt dus voor de hand aan te nemen, dat de Π-baan in een magnetisch veld zich in meer banen zal splitsen dan de Π'-baan en deze weer in meer dan de Π''-baan.

Dit geldt bij de dubbele series ook voor de P-baan en de P'-baan.

Beschouwt men alleen de $\perp$ gepolariseerde componenten dan gelden daarvoor dezelfde regels, slechts moet „meer" dan vervangen worden door „meer of gelijk".

Het aantal componenten // gepolariseerd, is voor $\Pi' > \Pi''$ voor $P = P'$.

Nog een andere algemeene gevolgtrekking is te maken. Bij sprongen van het electron van Σ (en ook van s en S) banen zijn de $\perp$ en // gepolariseerde componenten steeds verschillend.

Sprongen van de andere beginbanen (Δ, Δ', Δ'' en d) leveren vaak samenvallende $\perp$ en // gepolariseerde componenten. Dit is bijv. het geval bij sprongen

van	Δ	banen	naar	Π, Π' en Π''	banen
„	Δ	„	„	Π'	„
„	Δ''	„	„	Π' en Π''	„
„	d	„	„	Π'	„

Dit bijzonder gedrag van de Σ (resp. s en S) banen, doet de vraag opkomen, of dit misschien verband houdt met de beschouwing van SOMMERFELD[1]):

„Infolgedessen drängt sich folgende geometrische Deutung auf: die p- und d-Terme entsprechen ebenen Bahnen in der Symmetrieebene des Atoms, ähnlich den KEPPLER-Ellipsen; der s-Term hat seinen Grund darin, dass die beim Wasserstoff bestehende Punktsymmetrie durch die Atomstruktur von Li und He aufgehoben ist und dass daher noch andere Bahnen als die in der Symmetrieebene möglich werden".

Men zou dus de Σ (resp. s en S) banen zich $\perp$ aequator kunnen voorstellen en mogelijkerwijze zou het niet in den aequator liggen

---

[1]) A. SOMMERFELD, Zur Quantentheorie der Spektrallinien, München. Ber. 4 Nov. 1916, p. 153.

de reden kunnen zijn, dat het elecrton bij zijn sprong naar een baan in het aequatorvlak geen samenvallende componenten geeft, terwijl het zich laat denken, dat bij sprongen tusschen banen in het aequatorvlak gelegen, de gelegenheid tot samenvallende componenten veel grooter is.

Uit een persoonlijk onderhoud, dat ik dezer dagen met Prof. BOHR hierover had, bleek mij, dat deze gronden had om te veronderstellen, dat de Σ (resp. s en S) banen ook aequatoriaal zijn.

Voorts kan nog opgemerkt worden, dat de complexen waarover dit onderzoek loopt, uitsluitend voorkomen bij chemisch tweewaardige elementen. Bij één- en driewaardige elementen komen geen Grieksche complexen voor.

Na deze meer algemeene opmerkingen wil ik nu uiteenzetten op welke wijze ik het onderzoek naar de eventueele geldigheid van het „Kombinationsprinzip" heb uitgevoerd.

Bij een beschouwing van de verschillende typen van het anomale ZEEMAN-effect voor de bovengenoemde complexen valt het op, dat bij de meeste de afstanden der componenten van de oorspronkelijke lijn veelvouden zijn van de helft van den afstand van twee componenten van het normale LORENTZ-triplet.

Noemt men nu ε de energieverandering, die een baan moet ondergaan, opdat een electron, springende van die baan naar een onveranderde baan, licht uitzendt, overeenstemmende met een der $\perp$ gepolariseerde componenten, van het normale LORENTZ-triplet, terwijl het springende van de onveranderde baan licht van een trillingsgetal uitzendt, gelijk aan dat van de // gepolariseerde middencomponent, dan zal

$$d\nu = \frac{\varepsilon}{h}$$

het verschil in frequentie aangeven tusschen beide genoemde componenten.

Deze ε moet dus evenredig zijn met de $\mathfrak{H}$.

Ik heb nu de hypothese ingevoerd, dat door het magnetische veld ieder der begin- en eindbanen zich splitst in twee of meer banen, die met de oorspronkelijke baan energie-verschillen vertoonen $= \pm n \, . \, \frac{\varepsilon}{2}$ ($n = 0. 1. 2. 3$).

Daarna heb ik nagegaan, welke waarden van n men aan ieder der begin- en eindbanen zou moeten toekennen, om de waargenomen componenten te kunnen verklaren.

Dit leverde de volgende uitkomsten:

De Π baan splitst zich in 7 banen met energieverschillen $0, \pm \frac{\varepsilon}{2}, \pm \varepsilon, \pm \frac{3\varepsilon}{2}$

,, Π'	,,	,,	,,	,, 4	,,	,,	,,		$\pm \frac{\varepsilon}{2}, \pm \varepsilon$
,, Π''	,,	,,	,,	,, 2	,,	,,	,,		$\pm \varepsilon$
,, Σ	,,	,,	,,	,, 2	,,	,,	,,		$\pm \varepsilon$
,, Δ	,,	,,	,,	,, 3	,,	,,	,,	0,	$\pm \varepsilon$
,, Δ''	,,	,,	,,	,, 4	,,	,,	,,		$\pm \frac{\varepsilon}{2}, \pm \varepsilon$
,, d	,,	,,	,,	,, 3	,,	,,	,,	0	$\pm \varepsilon$

Voor de verschillende complexen krijgt men dan de volgende typen voor het ZEEMAN-effect.

$\Pi \Sigma$

$$\left(\frac{5\varepsilon}{2}\right) \quad \overline{2\varepsilon} \quad \overline{\frac{3\varepsilon}{2}} \quad \overline{\varepsilon} \quad \underline{\frac{\varepsilon}{2}} \quad \underline{0} \quad \underline{\frac{-\varepsilon}{2}} \quad \overline{-\varepsilon} \quad \overline{\frac{-3\varepsilon}{2}} \quad \overline{-2\varepsilon} \quad \left(-\frac{5\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{3\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad \varepsilon-(-\varepsilon) \quad \frac{\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad 0-(-\varepsilon) \quad \frac{3\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad \varepsilon-\varepsilon \quad \frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad 0-\varepsilon \quad \frac{-\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad -\varepsilon-\varepsilon \quad \frac{-3\varepsilon}{2}-\varepsilon$$

$$\frac{-\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad -\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \frac{-3\varepsilon}{2}-(-\varepsilon)$$

$\Pi' \Sigma$

$$\overline{2\varepsilon} \quad \overline{\frac{3\varepsilon}{2}} \quad \underline{\frac{\varepsilon}{2}} \quad (0) \quad \underline{\frac{-\varepsilon}{2}} \quad \overline{\frac{-3\varepsilon}{2}} \quad \overline{-2\varepsilon}$$

$$\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \frac{\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad \frac{-\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad \varepsilon-\varepsilon \quad \frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad \frac{-\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad -\varepsilon-\varepsilon$$

$$-\varepsilon-(-\varepsilon)$$

$\Pi'' \Sigma$

$$\overline{2\varepsilon} \qquad \underline{0} \qquad \overline{-2\varepsilon}$$

$$\varepsilon-(-\varepsilon) \qquad \varepsilon-\varepsilon \qquad -\varepsilon-\varepsilon$$

$$-\varepsilon-(-\varepsilon)$$

$\Pi \Delta$

$$\left(\frac{5\varepsilon}{2}\right) \quad (2\varepsilon) \quad \overline{\frac{3\varepsilon}{2}} \quad \overline{\varepsilon} \quad \underline{\overline{\frac{\varepsilon}{2}}} \quad \underline{0} \quad \underline{\overline{\frac{-\varepsilon}{2}}} \quad \overline{-\varepsilon} \quad \overline{\frac{-3\varepsilon}{2}} \quad (-2\varepsilon) \quad \left(\frac{-5\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{3\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad \varepsilon-(-\varepsilon) \quad \frac{3\varepsilon}{2}-0 \quad \varepsilon-0 \quad \frac{3\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad \varepsilon-\varepsilon \quad \frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad 0-\varepsilon \quad \frac{-\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad -\varepsilon-\varepsilon \quad \frac{-3\varepsilon}{2}-\varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad 0-(-\varepsilon) \quad \frac{\varepsilon}{2}-0 \quad 0-0 \quad \frac{-\varepsilon}{2}-0 \quad -\varepsilon-0 \quad \frac{-3\varepsilon}{2}-0$$

$$\frac{-\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad -\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \frac{-3\varepsilon}{2}-(-\varepsilon)$$

$\Pi'\,\Delta$

$$(2\varepsilon) \quad \overline{\tfrac{3\varepsilon}{2}} \quad \underline{\varepsilon} \quad \overline{\underline{\tfrac{\varepsilon}{2}}} \quad \overline{0} \quad \overline{\underline{\tfrac{-\varepsilon}{2}}} \quad \underline{-\varepsilon} \quad \overline{\tfrac{-3\varepsilon}{2}} \quad (-2\varepsilon)$$

$$\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad \varepsilon-0 \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-0 \quad \varepsilon-\varepsilon \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad -\varepsilon-0 \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad -\varepsilon-\varepsilon$$

$$\tfrac{-\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad -\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}-0$$

$\Pi''\,\Delta$

$$\overline{2\varepsilon} \quad \overline{\underline{\varepsilon}} \quad \overline{\underline{0}} \quad \overline{\underline{-\varepsilon}} \quad \overline{-2\varepsilon}$$

$$\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \varepsilon-0 \quad \varepsilon-\varepsilon \quad -\varepsilon-0 \quad -\varepsilon-\varepsilon$$

$$-\varepsilon-(-\varepsilon)$$

$\Pi\,\Delta''$

$$\overline{\tfrac{5\varepsilon}{2}} \quad (2\varepsilon) \quad \overline{\tfrac{3\varepsilon}{2}} \quad \underline{\varepsilon} \quad \overline{\tfrac{\varepsilon}{2}} \quad \underline{0} \quad \overline{\tfrac{-\varepsilon}{2}} \quad \underline{-\varepsilon} \quad \overline{\tfrac{-3\varepsilon}{2}} \quad (-2\varepsilon) \quad \overline{\tfrac{-5\varepsilon}{2}}$$

$$-(-\varepsilon) \quad \tfrac{3\varepsilon}{2}-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad \varepsilon-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad \tfrac{3\varepsilon}{2}-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \tfrac{3\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad \varepsilon-\varepsilon \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad 0-\varepsilon \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad -\varepsilon-\varepsilon \quad \tfrac{-3\varepsilon}{2}-\varepsilon$$

$$\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad \varepsilon-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad 0-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad -\varepsilon-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \tfrac{-3\varepsilon}{2}-\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$0-(-\varepsilon) \quad 0-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad -\varepsilon-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad \tfrac{-3\varepsilon}{2}-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right)$$

$$\tfrac{-\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad -\varepsilon(-\varepsilon) \quad \tfrac{-3\varepsilon}{2}-(-\varepsilon)$$

$\Pi'\,\Delta''$

$$\overset{?}{2\varepsilon} \quad \overline{\tfrac{3\varepsilon}{2}} \quad \underline{\varepsilon} \quad \overline{\tfrac{\varepsilon}{2}} \quad \underline{0} \quad \overline{\tfrac{-\varepsilon}{2}} \quad \underline{-\varepsilon} \quad \overline{\tfrac{-3\varepsilon}{2}} \quad \overset{?}{-2\varepsilon}$$

$$\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \varepsilon-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad \varepsilon-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \varepsilon-\varepsilon \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}-\varepsilon \quad -\varepsilon-\varepsilon$$

$$\tfrac{\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}-(-\varepsilon) \quad \tfrac{\varepsilon}{2}-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad -\varepsilon-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad -\varepsilon-\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\tfrac{-\varepsilon}{2}-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right)$$

$$-\varepsilon-(-\varepsilon)$$

$\Pi''\,\Delta''$

$$(2\,\varepsilon) \quad \left(\tfrac{3\,\varepsilon}{2}\right) \quad \overline{\underline{\tfrac{\varepsilon}{2}}} \quad \underline{0} \quad \overline{\underline{\tfrac{-\varepsilon}{2}}} \quad \left(\tfrac{-3\varepsilon}{2}\right) \quad (-2\varepsilon)$$

$$\varepsilon-(-\varepsilon) \quad \varepsilon-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad \varepsilon-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \varepsilon-\varepsilon \quad -\varepsilon-\left(\tfrac{-\varepsilon}{2}\right) \quad -\varepsilon-\tfrac{\varepsilon}{2} \quad -\varepsilon-\varepsilon$$

$$-\varepsilon-(-\varepsilon)$$

Πd

$\left(\frac{5\varepsilon}{2}\right)$	$\overline{2\varepsilon}$	$\overline{\frac{3\varepsilon}{2}}$	? ε	$\underline{\overline{\frac{\varepsilon}{2}}}$	(0)	$\underline{\overline{\frac{-\varepsilon}{2}}}$	? $-\varepsilon$	$\overline{\frac{-3\varepsilon}{2}}$	$\overline{-2\varepsilon}$	$\left(\frac{-5}{2}\right.$
$\frac{3\varepsilon}{2}-(-\varepsilon)$	$\varepsilon\ (-\varepsilon)$	$\frac{3\varepsilon}{2}-0$	$\varepsilon-0$	$\frac{3\varepsilon}{2}-\varepsilon$	$\varepsilon-\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon$	$0-\varepsilon$	$\frac{-\varepsilon}{2}-\varepsilon$	$-\varepsilon-\varepsilon$	$\frac{-3\varepsilon}{2}$
		$\frac{\varepsilon}{2}-(-\varepsilon)$	$0-(-\varepsilon)$	$\frac{\varepsilon}{2}-0$	$0-0$	$0-\frac{\varepsilon}{2}$	$-\varepsilon-0$	$\frac{-3\varepsilon}{2}-0$		
				$\frac{-\varepsilon}{2}-(-\varepsilon)$	$-\varepsilon-(-\varepsilon)$	$\frac{-3\varepsilon}{2}-(\ \varepsilon)$				

$\Pi' d$

(2ε)	$\overline{\frac{3\varepsilon}{2}}$	$\overline{\varepsilon}$	$\underline{\overline{\frac{\varepsilon}{2}}}$	$\underline{0}$	$\underline{\overline{\frac{-\varepsilon}{2}}}$	$\overline{-\varepsilon}$	$\overline{\frac{-3\varepsilon}{2}}$	(-2ε)
$\varepsilon-(-\varepsilon)$	$\frac{\varepsilon}{2}-(-\varepsilon)$	$\varepsilon-0$	$\frac{\varepsilon}{2}-0$	$\varepsilon-\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon$	$-\varepsilon-0$	$\frac{-\varepsilon}{2}-\varepsilon$	$-\varepsilon-\varepsilon$
			$\frac{-\varepsilon}{2}-(-\varepsilon)$	$-\varepsilon-(-\varepsilon)$	$\frac{-\varepsilon}{2}-0$			

$\Pi'' d$

(2ε)	$\overline{\varepsilon}$	$\underline{0}$	$\overline{-\varepsilon}$	(-2ε)
$\varepsilon-(-\varepsilon)$	$\varepsilon-0$	$\varepsilon-\varepsilon$	$-\varepsilon-0$	$-\varepsilon-\varepsilon$
		$-\varepsilon-(-\varepsilon)$		

Onder iederen component is aangegeven uit welken sprong of sprongen hij is gedacht te zijn ontstaan. Een — $\frac{\text{boven}}{\text{onder}}$ den component geeft aan dat hij $\frac{\perp}{//}$ gepolariseerd is. Komen beide strepen voor, dan vallen beide componenten samen of is de polarisatie onvolkomen. Tusschen ( ) zijn geplaatst de z.g. overtollige componenten, die bij de waarneming niet gevonden zijn. Over de bijgeplaatste vraagteekens zal verderop gesproken worden.

Allereerst een en ander over de overtollige componenten. Verreweg de meeste zijn uiterste componenten. Daar meestal de uiterste componenten, die waargenomen zijn, zeer zwak zijn, is het mogelijk dat de theoretisch gevonden componenten zoo zwak zijn, dat zij tot nu toe niet konden worden waargenomen. Deze componenten toch ontstaan door sprongen van en naar de sterkst vervormde banen en deze zijn volgens Sommerfeld minder waarschijnlijk dan de minder vervormde, zoodat het aantal sprongen van het electron van deze sterk vervormde banen naar verhouding veel kleiner is en dus de voortgebrachte component veel zwakker.

Deze verklaring kan echter niet dienen voor het overtollig zijn van de middencomponenten van $\Pi'\Sigma$ en Πd.

Het zou echter ook mogelijk kunnen zijn, dat het „Kombinationsprinzip" aan een beperkende voorwaarde was gebonden. Prof. Bohr was n.l. van meening, zooals mij uit een onderhoud over deze quaestie bleek, dat het electron bij zijn springen ook nog gebonden moest worden aan de voorwaarde dat het moment van hoeveelheid beweging in begin- en eindbaan niet meer dan $1 \times \frac{h}{2\pi}$ mocht verschillen. Het is mij tot nu toe nog niet gelukt, deze voorwaarde als beperking van het „Kombinationsprinzip" in te voeren. Dat er echter een beperkende bepaling, hoe dan ook, moet bestaan, schijnt mij niet twijfelachtig toe.

Dat toch echter het niet optreden van een middelcomponent in sommige gevallen aan de waarneming kan worden toegeschreven, moge uit het volgende voorbeeld blijken:

In mijn verhandeling (l.c.) vindt men het Zeeman-effect voor $\Pi'\Delta''$ opgegeven als een octet zonder middelcomponent, hier als een nonet met middelcomponent.

Mijn eerste opgave was o.a. gebaseerd op de waarnemingen van Miller [1]), die geen middelcomponent heeft gevonden, terwijl Wendt [2]) bij dezelfde lijnen de middelcomponent wel vindt: „bei dem zweiten Begleiter ist die mittlere Komponente übersehen". (p. 559).

Daaruit moge dus blijken, dat het geenszins onmogelijk is, dat sommige van de waargenomen typen van Zeeman-effect onvolledig zijn, en dat wellicht sommige der door mij gevonden „overtollige" componenten bij fijnere waarneming nog zullen blijken aanwezig te zijn.

Bij de uiterste componenten van $\Pi'\Delta''$ is een vraagteeken geplaatst. Deze componenten zijn zoowel door Wendt (l. c.) als Miller (l. c.) gevonden, echter zijn de afstanden tot de middel-component iets kleiner dan overeenkomt met 2ε. De polarisatietoestand kon door Miller wegens geringe intensiteit niet bepaald worden, Wendt vindt $\perp$.

De andere vraagteekens vindt men bij Πd. Wendt vindt hiervoor 10 componenten, terwijl Miller er 12 heeft waargenomen. Deze waarnemer maakt hierbij echter de opmerking (l. c. p. 117):

„Die durch Klammern zusammengefassten Linienpaare liefen in

---

[1]) W. Miller, Zeeman-effekt an Mg. Ca. u. s. w. Ann. d. Physik, 24, p. 105, 1907.

[2]) G. Wendt, Untersuchungen an Quechsilberlinien. Ann. d. Physik, 37, p. 535, 1912.

eine Linie zusammen, wenn beide Arten von Schwingungen zugelassen waren".

Brengt men dit in rekening dan kunnen de vraagteekens vervallen en vervangen worden door $\overline{\underline{\varepsilon}}$ en $\overline{\underline{-\varepsilon}}$.

De 0-component blijft dan nog onverklaard.

Een andere factor, die ter verklaring overblijft, is de polarisatietoestand der componenten.

Ofschoon is op te merken, dat evenals bij het normale triplet, ook hier bij de anomale ZEEMAN-effecten, de uiterste componenten steeds $\perp$ gepolariseerd zijn, zoo moet ik bekennen, dat het mij tot nu toe nog niet gelukt is, een eenvoudigen regel voor den polarisatietoestand der componenten te vinden.

Wat de intensiteit betreft, zoo is boven reeds de veronderstelling uitgesproken, dat naarmate de electronen springen van of naar sterk excentrische banen, de intensiteit der voortgebrachte componenten geringer zou zijn. Jammer genoeg laat het waarnemingsmateriaal niet toe deze veronderstelling in alle bijzonderheden te toetsen, daar de opgaven van verschillende waarnemers vaak tegenstrijdig zijn.

Wel geeft MILLER (l. c. p. 112) bijv. voor de intensiteiten van

$\Pi\,\Delta$	1	2	2	6	2	2	1
$\Pi'\,\Delta$	1	1	4	4	4	1	1
$\Pi''\,\Delta$	<1	4		8	4		<1

en blijkt hieruit een sterke afname van intensiteit naar de buitenste componenten (waarbij mijne „overtollige" componenten, die nog zwakker zijn, goed aansluiten). Ook het feit, dat de middelcomponenten sterker zijn, is in goede overeenstemming daarmede, dat elk dezer componenten, door meerdere verschillende sprongen kan worden voortgebracht.

Algemeen is echter op grond van de bovengenoemde onderlinge tegenstrijdigheden dit onderzoek nog niet door te voeren. De oorzaken van deze intensiteitsverschillen zijn door ZEEMAN [1]) onderzocht, doch het is uit de publicaties der verschillende waarnemers zelden op te maken, welke omstandigheden hunne verschillen in intensiteit hebben veroorzaakt en wat of de betrouwbare intensiteiten zijn. Zoolang dat niet met zekerheid kan worden vastgesteld zal een onderzoek als het bovenbedoelde niet mogelijk zijn. Uit de uitkomsten van een dergelijk onderzoek zouden belangrijke gevolgtrekkingen zijn te maken over de al of niet juistheid der door mij in deze mededeeling opgestelde hypothesen.

---

1) P. ZEEMAN, Proc. Amsterdam, Oct. 1912 en Researches in magneto-optics, p. 94 v., Macmillan 1913.

Uit het tot dusver gevondene meen ik te mogen besluiten, dat er aanwijzingen te vinden zijn in het waarnemingsmateriaal voor de geldigheid van het „Kombinationsprinzip" ook voor het anomale ZEEMAN-effect. Het is echter niet buitengesloten, dat een beperkende bepaling in den zin door BOHR (zie boven) gegeven, maakt, dat dit principe niet altijd zuiver te voorschijn treedt.

In ieder geval meen ik te hebben aangetoond, dat de „sequensen" ieder afzonderlijk in het magneetveld veranderen en dat het waargenomen ZEEMAN-effect het resultaat is van de veranderingen van beide sequensen samen.

In verband daarmede ben ik ook van meening dat de vergelijking van BOHR

$$\nu = \frac{W_1 - W_2}{h}$$

in het magnetisch veld hare geldigheid behoudt.

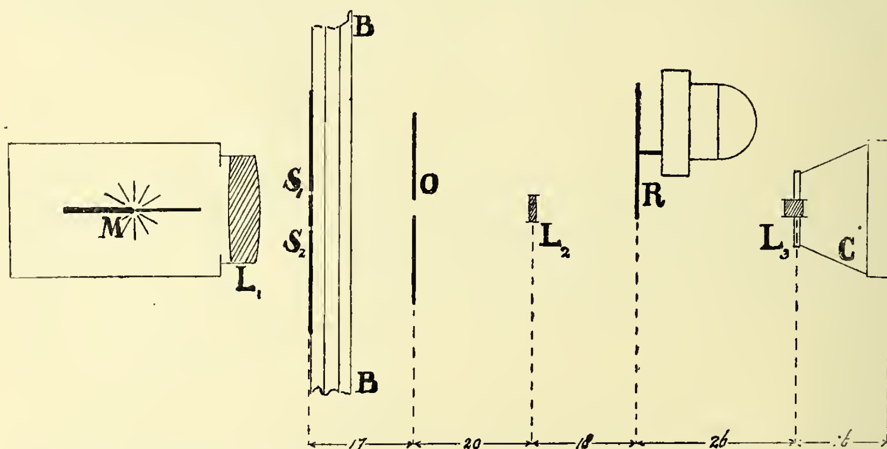
Den Haag, 7 Mei 1919.

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt, mede namens Mej. DR. A. SNETHLAGE, een mededeeling aan: „*De voortplanting van het licht in bewegende, doorschijnende, vaste stoffen. II. Metingen over het Fizeau-effect in kwarts*". (*Vervolg*).

11. *Directe bepaling van de snelheid van de balk.*

In I § 3 is de wijze aangegeven waarop de maximum-snelheid werd bepaald. Wij hebben die echter ook nog direct gemeten volgens de volgende methode, die echter eerst bij de proeven met glas toegepast werd, maar hier een plaats vindt, omdat zij de snelheidsbepaling in de onderstelling van een met standvastige hoeksnelheid rondwentelend vliegwiel heeft bevestigd.

Aan de balk BB is een zwart schermpje verbonden met twee spleetvormige openingen S_1 en S_2, waarin draden zijn gespannen



voor nauwkeurige plaatsbepaling. De spleet S_1, wij letten voorloopig alleen op een der spleten, beweegt zich in het lichtveld van den condensor L_1. Met behulp van eene achromatische lens L_2 wordt een scherp beeld van S_1 ontworpen in het vlak R van de cirkelvormige plaat van een bij een grooten snaargalvanometer gebezigden lichtonderbreker. Dit laatste toestel, waarop onze aandacht werd gevestigd door den Heer WERTHEIM SALOMONSON en dat door hem tot onze beschikking werd gesteld, bestaat uit een electromotor met mechanischen centrifugaalregulator. Een der 5 assen van het apparaat draait 25-maal per seconde rond. De aluminiumplaat R (middellijn 30 cM.) heeft in den omtrek 40 insnijdingen, elk ongeveer 1 m.m.

breed, zoodat 1000 opflikkeringen per seconde ontstaan. De afstand van twee insnijdingen bedraagt ongeveer 23 m.m., zoodat licht gedurende 1/20000 seconde wordt doorgelaten.

Een beeld van de stilstaande spleet, bij draaiende schijf ontworpen op de photographische plaat van de camera C, is gereproduceerd in b_1 op de Plaat, Fig. 1. Men ziet de beide kruisdraden en rechts van de spleet den rand van de cirkelvormige plaat R, waarvan het middelpunt links ligt. De donkere kringen worden teweeggebracht door terugkaatsingen, maar hebben voor ons geen beteekenis.

Beweegt de spleet zich en draait de schijf dan wordt telkens na een duizendste seconde het licht door de insnijding in R doorgelaten en de spleet door middel van de lens L_3 gephotografeerd.

De beelden van de spleet gaan schuin staan, daar tijdens het verschuiven van de balk de insnijding in de schijf voortdurend hooger komt bij haar beweging.

Gemakkelijk ziet men in dat de helling van het beeld bepaald wordt door de verhouding van de snelheid van de insnijding tot die van de balk of liever tot die van het beeld op de schijf. Uit de afstanden van S_1 en R tot L_2 en van L_3 tot R en de plaat is de reductie, die de snelheid van de balk in het beeld ondergaat onmiddellijk te schatten of deze is direct door photographeeren eener verdeelde schaal in het vlak van S_1 S_2 te meten. De grootte van de helling van het spleetbeeld (Plaat Fig 2) geeft al dadelijk eene benaderde waarde van de snelheid van de balk, die men trouwens nog eenvoudiger uit den afstand van overeenkomstige punten van b'_1 b''_1 kan vinden.

Voor een nauwkeuriger bepaling van de snelheid komt de tweede spleet S_2, welke op 4,15 cM. van S_1 staat, te pas. Stel dat voor de benaderde waarde van de snelheid van de balk omstreeks 1000 cM./sec. gevonden is, dan is S_1 derhalve na ieder duizendste seconde over ongeveer 1 cM. verschoven en komt na 4 duizendste seconde S_2 ongeveer op de plaats waar eerst S_1 stond. Derhalve zal op de foto in het algemeen tusschen de beelden van S_1, een beeld van S_2 n.l. a_1'' verschijnen. Uit de foto kan men nauwkeurig den onderlingen stand der spleetbeelden afleiden, en weet dan dat om den afstand van 4,15 cM. af te leggen 4 + een breukdeel, uit den onderlingen stand af te meten, duizendsten seconden noodig zijn. Om de spleten van elkaar te onderscheiden is alleen over S_1 een dwarsdraadje gespannen.

We krijgen op de foto slechts 2 beelden van elk der spleten, omdat alleen binnen een beperkten kegel afbeelding door de verschillende lenzen mogelijk is.

5

Daar men de snelheid van de balk wenscht te kennen bij een bepaalde bewegingsrichting wordt nog de lichtafsluiter (I § 4), die anders voor het objectief van den waarnemingskijker staat, in O (zie figuur boven) geplaatst. Hierdoor is men zeker dat op het juiste oogenblik het licht door den toestel gaat. De onnauwkeurigheid van de bepaling van de snelheid blijkt hoogstens $\frac{3}{4}$ % te bedragen.

Wij vestigen nog de aandacht op eene bijzonderheid van de beschreven bepaling van de snelheid, die theoretisch, hoewel niet praktisch, interessant schijnt.

De meting geschiedt namelijk met een *bewegende meetstaaf* (lengte in rust $= S_1 S_2$), eene eigenaardigheid, die wij ons niet herinneren bij eene andere methode praktisch te hebben zien gebruiken.

Wij zijn dank verschuldigd aan de Heeren W. de Groot en G. C. Dibbetz Jr. voor hunne assistentie bij het theoretische en experimenteele werk en aan den Heer J. van der Zwaal voor de hulp bij de lastige reguleering van den toestel en de vervaardiging der hulptoestellen.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene Mededeeling van den Heer G. NORDSTRÖM: „*Opmerking over het niet uitstralen van een overeenkomstig kwantenvoorwaarden bewegende elektrische lading*". (Supplement N°. 44 van de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Men hoort vaak zeggen: De atoomtheorie van BOHR is in strijd met de klassieke elektrodynamika, daar ze aanneemt dat een elektron dat overeenkomstig kwantenvoorwaarden beweegt geen energie uitstraalt in den vorm van elektro-magnetische golven. Een aldus geformuleerde bewering lijkt mij echter niet juist aan te geven, waarin de tegenstelling tusschen de aanname van BOHR en de klassieke elektrodynamika ligt. In het volgende zal ik trachten deze zienswijze te motiveeren. Eerst volgen eenige algemeene beschouwingen.

Als men in een overigens ledige ruimte elektrische ladingen heeft en de beweging daarvan eenduidig vaststelt, dan wordt het elektromagnetische veld hierdoor niet eenduidig bepaald met behulp der veldvergelijkingen van MAXWELL-LORENTZ. Om eenduidigheid te verkrijgen, moeten zekere grensvoorwaarden vastgesteld worden en op deze zullen wij onze opmerkzaamheid vestigen. Hoedanig het veld ook moge zijn, het kan voorgesteld worden door de elektrodynamische potentialen: de vektorpotentiaal $\mathfrak{A}$ en de skalaire potentiaal φ, welke ook kunnen worden samengevat in een vierdimensionale vektorpotentiaal met komponenten:

$$\varphi_x = \mathfrak{A}_x \quad , \quad \varphi_y = \mathfrak{A}_y \quad , \quad \varphi_z = \mathfrak{A}_z \quad , \quad \varphi_t = \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De potentialen bepalen eenduidig de veldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ op grond der vergelijkingen [1])

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= rot\, \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{E} &= -grad.\, \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \qquad (c = \text{lichtsnelheid}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Daarentegen zijn de potentialen $\mathfrak{A}$, φ niet eenduidig bepaald door het veld. Men kan op grond hiervan hen de voorwaarde opleggen:

[1]) Zie bijv. M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität II, 2[te] Aufl., p. 36.

$$div\, \mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

en krijgt dan voor de gezamenlijke potentiaalkomponenten (ingeval men rationeele eenheden aanwendt) de differentiaalvergelijkingen):

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\pi}{dz^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial t^2} = -\sigma_\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$(\alpha = x, y, z, t).$$

Hier beteekenen σ_x, σ_y, σ_z de komponenten van den elektrischen stroom, σ_t de dichtheid van elektriciteit. Ingevál de beweging der elektriciteit bepaald is, zijn σ_x, σ_y, σ_z, σ_t bekende funkties van x, y, z, t. De algemeene oplossing der differentiaalvergelijkingen (3) kan dan op de volgende wijze aangegeven worden:

x_0, y_0, z_0 mogen de koördinaten zijn van een punt, waar φ_α gezocht wordt. De afstand van het punt (x_0, y_0, z_0) tot een punt (x, y, z) geven wij aan met r:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Deze formule bepaalt wel niet het teeken van r maar dat zullen wij voorloopig onbepaald laten.

Een eenheidsvektor met de komponenten

$$\frac{x - x_0}{r}, \quad \frac{y - y_0}{r}, \quad \frac{z - z_0}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

geven wij aan door $\mathfrak{r}$. De richting van $\mathfrak{r}$ is klaarblijkelijk afhankelijk van de keuze van het teeken van r. Laat F een willekeurig gesloten oppervlak zijn, dat ook het punt x_0, y_0, z_0 omsluit. Een oppervlakelement van het oppervlak F, opgevat als een loodrecht naar buiten gerichte vektor geven wij aan door $d\mathfrak{F}$. Als wij deze symbolen invoeren, kunnen wij de algemeene integraal der differentiaalvergelijking (3) als volgt schrijven [1]):

$$\varphi_\alpha(x_0, y_0, z_0, t) = \pm \frac{1}{4\pi} \left\{ \int dV \frac{\sigma_\alpha}{r} + \int d\mathfrak{F} \left(\frac{1}{r} grad\, \varphi_\alpha + \frac{\mathfrak{r}}{cr}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} + \frac{\mathfrak{r}}{r^2}\varphi_\alpha \right) \right\}_{t - \frac{r}{c}} . (6)$$

De oppervlakte integraal moet uitgestrekt worden over het gesloten oppervlak F, de ruimte integraal over de omsloten ruimte V, (die ook het punt x_0, y_0, z_0 omvat). De index $t - \frac{r}{c}$ beteekent, dat in het rechter lid σ_α, φ_α, grad φ_α, $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}$ betrekking hebben op het van

[1]) Een afleiding van formule (6) vindt men in Finska Vetenskapssocietetens Förhandl. L. I. 1908—09, Afd. A. n⁰. 6. Als men bij de afleiding het teeken van r niet vaststelt, vindt men gemakkelijk het dubbele teeken in het rechterlid.

punt tot punt varieerend tijdstip $t - \frac{r}{c}$. Het dubbele teeken voor het rechterlid moet aangebracht worden, zoolang het teeken voor r niet vastgesteld is, maar vrij gekozen kan worden; het $+$ teeken geldt voor positieve, het $-$ teeken voor negatieve r. Kiest men het $+$ teeken, dan is $t - \frac{r}{c}$ een vroeger tijdstip dan t en φ_α moet dan opgevat worden als vertraagde potentiaal. Kiest men het $-$ teeken, dan is $t - \frac{r}{c}$ een later tijdstip en φ_α is op te vatten als vervroegde potentiaal.

Elke funktie $\varphi_\alpha(x, y, z. t)$ *die aan de differentiaalvergelijking* (3) *voldoet, kan dus naar goedvinden beschouwd worden als een vertraagde of als een vervroegde potentiaal, als men slechts de bijdrage tot de potentiaal welke het grensoppervlak F levert* (dat men ook naar het oneindige verschuiven kan) *in rekening brengt.*

Op grond hiervan kan ook elk elektromagnetisch veld, d. w. z. elk veld waarvoor de vergelijkingen van Maxwell-Lorentz gelden, voor een tijdstip t berekend worden naar goedvinden òf uit den toestand op den tijd $t - \frac{(r)}{c}$ òf uit den toestand op het oogenblik $t + \frac{(r)}{c}$, als slechts de bijdrage van het grensoppervlak in acht genomen wordt. Deze bijdrage heeft natuurlijk in beide gevallen ongelijke waarde.

Als men het oppervlak F naar het oneindige laat verschuiven en als grensvoorwaarde vaststelt dat de oppervlakte integraal de waarde nul heeft als de potentiaal beschouwd wordt als een vertraagde potentiaal, krijgt men de gewone oplossing van het probleem om het veld te berekenen uit de ladingen. Maar deze oplossing is slechts een particuliere, er zijn oneindig vele andere.

Men moge mij verontschuldigen, dat ik over deze zaak zoo uitvoerig heb uitgeweid. Er schijnt mij niet altijd voldoende acht op geslagen te worden.

Wij zullen nu aantoonen, dat elke periodieke beweging der elektriciteit toelaat een veld aan te nemen dat geen energie uitstraalt. De afzonderlijke punten der elektrische ladingen identifieeren wij met behulp van 3 parameters ξ, η, ζ. Elk stel waarden ξ, η, ζ geeft dus een bepaald punt in de elektriciteit aan, dat meegaat met de beweging daarvan. De beweging wordt volkomen aangegeven door de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta, t), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta, t), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta, t), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

d. w. z. voor vastgestelde ξ, η, ζ zijn de koördinaten x, y, z funkties van den tijd. Wij denken nu dat de door de vergelijkingen (7) voorgestelde beweging volkomen bepaald is. Wij noemen die *beweging* 1. Van x, y, z nemen wij dus aan dat ze bekende funkties zijn van ξ, η, ζ, t en wel voor alle waarden van t vanaf $-\infty$ tot $+\infty$. Wij berekenen het elektromagnetische veld door middel van *vertraagde* potentialen en kiezen zoodanige grensvoorwaarden dat de oppervlakte integraal in (6) nul wordt voor elke potentiaalkomponent φ_α, als het oppervlak F naar het oneindige verschuift. Dan is het veld eenduidig bepaald door de beweging der electriciteit. Het verkregen veld noemen wij *veld* 1. Daarin hebben wij klaarblijkelijk een energieuitstraling.

Verder zullen wij eene andere beweging der electriciteit beschouwen, *beweging* 2, die wij uit beweging 1 verkrijgen door het teeken van t om te keeren.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta, -t), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta, -t), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta, -t), \end{aligned}\right\} \quad \text{beweging 2.}$$

Bij de beweging 2 worden klaarblijkelijk alle banen in tegengestelde richting doorloopen als in beweging 1. Voor beweging 2 berekenen wij eveneens het elektromagnetische veld door middel van *vertraagde* potentialen en met *dezelfde grensvoorwaarden* als vroeger, We krijgen dan weer een veld met energieuitstraling en we noemen dat veld *veld* 2.

Als beweging 1 periodiek is, is beweging 2 dit ook en de uitstraling gedurende eene periode is dan voor veld 1 en 2 even groot. Van veld 2 zullen wij overgaan tot een nieuw veld, *veld* 3, dat wij krijgen door het teeken voor den tijd t en de magnetische veldkomponenten $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ om te keeren. Zooals bekend is, blijven de veldvergelijkingen van MAXWELL-LORENTZ geldig bij een dusdanige teekenwisseling. Daar t van teeken wisselt, wordt de beweging der elektriciteit omgekeerd. *De beweging van de electriciteit in veld* 3 *is dus precies dezelfde als in veld* 1; wij hebben in beide gevallen beweging 1. *Op* grond van de omkeering van het teeken voor $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ (terwijl $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$ hun teeken houden) keert de richting van den energiestroom om, zoodat we in veld 3 een *instraling* van energie krijgen. Voor periodieke beweging der elektriciteit is de

instraling gedurende een periode even groot als de uitstraling in veld 1 en 2.

Men vindt verder gemakkelijk dat veld 3 berekend kan worden uit *vervroegde* potentialen, waarbij de bijdrage van het oneindige nul is. Worden de potentialen echter als vertraagde opgevat, dan is de bijdrage van het oneindige niet nul.

Wij superponeeren nu veld 1 op veld 3, wat immers mogelijk is, daar de veldvergelijkingen lineair zijn. In beide afzonderlijke velden heeft de elektriciteit dezelfde beweging, die ook blijft bestaan in het gekombineerde veld. Daarentegen wordt door de superpositie de dichtheid van elektriciteit overal verdubbeld. Om dit op te heffen verminderen we de veldsterkte in het gekombineerde veld tot op de helft. Daardoor wordt de dichtheid der elektriciteit in dezelfde verhouding verkleind en wij krijgen in het nieuwe *veld* 4 precies dezelfde elektriciteitsverdeeling en -beweging als in veld 1. Als de beweging periodiek is, geeft klaarblijkelijk de energiestroom in veld 4 gedurende eene periode een totale uitstraling nul. Men heeft een soort staande elektromagnetische golven.

Daar de elektriciteitsbeweging in veld 4 volkomen identiek is met die elektriciteitsbeweging, van welke wij uitgingen, hebben wij aangetoond, dat *elke periodieke beweging der elektriciteit de aanname toelaat van een elektromagnetisch veld zonder energieuitstraling.* Men ziet zonder meer in, dat de stelling ook geldt als de elektriciteitsbeweging niet exakt periodiek is, maar b.v. bestaat uit een planetenbeweging met periheliumverschuiving.

De vraag is nu maar, of de theorie van Bohr eenig nut kan hebben van het resultaat, waartoe wij zijn gekomen, en deze vraag moet wel ontkennend beantwoord worden. Als de electronen in een atoom in alle eeuwigheid in dezelfde banen liepen, zou niets de aanname beletten van een electromagnetisch veld zooals veld 4. Maar de sprongen van een toegelaten baan tot eene andere veroorzaken moeilijkheden. Een eenvoudig onderzoek toont aan dat in veld 4 de energiedichtheid voor groote afstanden r evenredig is met $\frac{1}{r^2}$ zoodat de energie van het geheele veld oneindig groot is. Op grond hiervan wordt de energieverandering bij het overspringen van een elektron heel anders dan die, welke Bohr moest aannemen, en het lijkt mij niet mogelijk dat hier overeenstemming bereikt kan worden. De aangevoerde beschouwingen hebben dus nauwelijks positieve beteekenis voor de theorie van Bohr, maar wel schijnen ze mij van eenig nut te kunnen zijn om een meer alzijdig inzicht te krijgen, waar de moeilijkheden der theorie van Bohr

liggen. Een resultaat dat zij hiermede naar mijn meening geven is reeds genoemd in het begin van deze opmerking en ik zou dit aldus willen formuleeren: De gewone bewering, dat het onverklaarbaar zou zijn dat een elektron dat eene met de voorwaarden der quantenleer overeenkomende beweging uitvoert, geen energie zou uitstralen, schijnt mij op een niet voldoend algemeene beschouwingswijze te berusten. Een ruimer blik op de kwestie lijkt mij de moeilijkheid weliswaar niet te kunnen opheffen, maar wel die te kunnen verplaatsen.

Leiden, 18 April 1919.

Sterrekunde. — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. WEEDER c. i.: „*De buiging der cirkels van een meridiaankijker*".

(Mede aangeboden door den Heer J. C KAPTEYN).

Onder den invloed van de zwaartekracht ondergaat de cirkelrand van een meridiaan-instrument kleine vervormingen, die tengevolge hebben, dat, gerekend van den nulstreep, de hoekwaarden der deelstrepen afhangen van de richting des kijkers.

Omtrent de grootte van de veranderingen in bepaalde hoeken van den verdeelden cirkel, als deze in zijn vlak gedraaid wordt, kan men de uitkomst van BESSEL, berekend voor den meridiaancirkel van REPSOLD in de sterrewacht te Koningsbergen, met omstreeks 50 cM. straal en 10 spaken, vinden in de Astron. Nachr. Bd. 25 op pag. 42, volgens welke een streep in het verlengde van een spaak in horizontale richting wegens de buiging des cirkels onder den last van het eigen gewicht over den hoek 0".6726 is doorgezakt, zoodat de bovenste helft des cirkels in dien stand 1".35 grooter zou zijn dan in den horizontalen stand van dat cirkelvlak. Ten opzichte van deze rekenuitkomst komt het mij evenwel voor, dat BESSEL in § 14 der bovengenoemde verhandeling ten onrechte met 2 vermenigvuldigde, nadat hij met dien factor 2 aan het einde van § 12 reeds had rekening gehouden. Door de einduitkomsten van BESSEL te substitueeren in zijn eindvergelijkingen van § 13 blijkt ook, dat de eersten gehalveerd moeten worden, en zijne becijferingen voor de buiging in het verlengde van een horizontale spaak inderdaad 0",336 opleveren bij bovengenoemd instrument.

Nu scheen voor mij de omstandigheid, dat er door de deelfoutbepalingen aan den meridiaancirkel te Leiden veel waarnemingsmateriaal beschikbaar is om de buigingsconstanten voor de cirkels van dat instrument er uit af te leiden, reeds voldoende beweegreden, om aan BESSEL's verhandeling over dit onderwerp bizondere aandacht te schenken. De volledigheid waarmede hij daarin zijne denkbeelden uiteenzet, en de nauwkeurigheid, door welke de becijferingen zijner toepassing in den regel uitmunten, hebben mij eerst medegesleept en vervolgens bewogen, het vraagstuk der buiging voor zulk een cirkel verder te ontwikkelen in formules ten gebruike voor

cirkels met een *even* spaken-aantal of andere afmetingen van den cirkelrand. De analytische ontwikkeling der formule voor de buiging volgens den rand van een spaakeinde tot het volgende, door Bessel gegeven [§ 8 formule (18)], vormt den hoofdzakelijken inhoud dezer mededeeling.

Met deze formule worden door mij ook de beperkende veronderstellingen overgenomen, onder welke zij afgeleid is. In het kort zijn deze: het gietmetaal hebbe in alle deelen gelijke elasticiteit en dichtheid, en de sectoren zijn ook in vorm aan elkander gelijk; de spaken zijn door platte vlakken begrensd en hebben tot doorsnede een gelijkbeenig trapezium, welks evenwijdige zijden en hoogte gelijkmatig van naaf tot randstuk in lengte afnemen; de opeenvolgende spaken zijn verbonden door rechte stukken van standvastige doorsnede, die samen een gelijkzijdigen veelhoek vormen, welke zijn hoekpunten in de spaken heeft. Het randstuk zij op de cirkelas afgedraaid, zoodat zijn doorsnede ook over de geheele lengte standvastig is. Al deze stukken zijn door Bessel behandeld als lijnen in één plat vlak, aan welke in elk punt zulk een gewicht en traagheidsmoment zijn toegeschreven, als beantwoorden aan de door dat punt voorgestelde staafdoorsnede; de straal des cirkels, die het randstuk voorstelt, is gelijk genomen aan den afstand van het zwaartepunt der randdoorsnede tot de cirkelas.

Zooals steeds in de elasticiteitstheorie voor gevallen als dit toelaatbaar is, zijn van de elastische verschuivingen hoogere machten dan de eerste in de formules weggelaten. Die verschuivingen zijn dus hier met de versnelling der zwaartekracht evenredig en zouden verdwijnen, indien men het zwaarteveld kon opheffen. Er kunnen ook dan nog aanzienlijke spanningen voorkomen, en deze neemt Bessel wel in zijne algemeene formules op, maar zoolang zij het lineaire der zwaartekrachtswerking niet verstoren, veranderen zij bij draaiing der cirkels in het vertikale vlak de hoeken der deelstrepen niet; ik laat om die reden de termen in de formules van Bessel, op die spanningen betrekking hebbende, terzijde.

Er volgt uit de erkenning, dat de te beschouwen elastische verschuivingen met de zwaartekracht evenredig zijn, eene uitdrukking voor de hoekverandering van een deelstreep w wegens buiging. In den stand des cirkels, bij welken I_w de helling is van streep w, zijn de componenten van de versnelling der zwaartekracht g naar richtingen volgens die streep en loodrecht daarop $g \sin I_w$ en $g \cos I_w$ en voor hare buiging kan men schrijven:

$$V(w) \sin I_w + H(w) \cos I_w$$

$V(w)$ en $H(w)$ stellen hierin de buigingen van streep w voor, als

zij vertikaal naar beneden of horizontaal naar rechts gericht is voor iemand, die de randverdeeling aanziet. Wegens de gelijk- en gelijkvormigheid der m sectoren hebben $V(w)$ en $H(w)$ gelijke waarden voor de m strepen van overeenkomstige plaatsing. Ik begin daarom w te rekenen bij het einde van een spaak met nul en eindig bij $\frac{2\pi}{m} = \vartheta$. Het zij de i-de spaak, die in de richting der toenemende graadcijfers aan streep w voorafgaat, en de helling van deze spaak zij u_i, dan is $l_w = u_i + w$ en dit in de buigingsuitdrukking overgebracht en ontwikkeld, geeft voor haar:

$$\{V(w) \cos w - H(w) \sin w\} \sin ui + \{V(w) \sin w + H(w) \cos w\} \cos u_i.$$

Tot eene uitdrukking van gelijke beteekenis komt Bessel aan het eind van § 9 door de beschouwing der evenwichtsvoorwaarden van het elasticiteitsvraagstuk.

Om echter de overeenstemming te verkrijgen van de bovenstaande met de buigingsformule (18) van Bessel [§ 8] vervang ik l_w door $\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) + \left(w - \frac{\vartheta}{2}\right)$, ontwikkel, en schrijf:

$$\left.\begin{aligned} \lambda F(w) &= V(w) \cos\left(w - \frac{\vartheta}{2}\right) - H(w) \sin\left(w - \frac{\vartheta}{2}\right) \\ \lambda G(w) &= V(w) \sin\left(w - \frac{\omega}{2}\right) + H(w) \cos\left(w - \frac{\vartheta}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

Voor streep w wordt de buiging nu voorgesteld door:

$$\lambda F(w) \sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) + \lambda G(w) \cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

De factor λ is het reciprook van den elasticiteitscoëfficient.

Ter wille van het overzichtelijk verband ga ik nu schetsen, hoe Bessel dit elasticiteitsvraagstuk heeft behandeld en wat symmetriebeschouwingen leeren omtrent de door hem berekende grootheden. Volgens de beschrijving der figuur van den cirkel behooren tot elken sector 4 metaalstukken samenkomende in 2 knooppunten. De beide deelen van eene spaak zijn afzonderlijk te behandelen wegens het knooppunt met de dwarsverbindingen; het tweede knooppunt ligt aan het spaakuiteinde, waar de spaak met twee randstukken samenkomt. Het naafeinde van de spaak wordt als een ingeklemd punt beschouwd; op die plaats verandert de richting der spaak door de buiging niet, zoodat zij kan dienen om de veranderde richtingen in de knooppunten er mede te vergelijken. In dat vaste punt komen twee krachtcomponenten en een koppelmoment

voor; kende men deze drie onbekenden, dan zouden de overeenkomstige drie grootheden in dit spaakstuk aan het einde bij het eerste knooppunt te berekenen zijn, alsmede de beide componenten der verplaatsing van het eerste knooppunt en de draaiing der 4 in dat punt samenkomende stukken. Voor elk, aan dit knooppunt grenzend, beginpunt van het 2de spaakstuk en van één dwarsstuk worden de daar werkende spanningswaarden (twee krachtcomponenten en het koppelmoment) als 6 nieuwe onbekenden ingevoerd; in die 9 onbekenden laten verplaatsing en draaiing van het 2de knooppunt zich uitdrukken, en ook die in het volgende eerste knooppunt, en tevens de drie spanningscomponenten in de eindpunten van beide stukken. Aan het tweede knooppunt kan men nu nog voor het beginpunt van het randstuk dat dit knooppunt met het volgende verbindt, de daar heerschende drie spanningswaarden als nieuwe onbekenden invoeren, zoodat er in elken sector 12, totaal $12m$ onbekenden hebben gediend ter verkrijging van uitdrukkingen voor de krachten, momenten, verplaatsingen en draaiingen aan de uiteinden der samenstellende deelen. Ter bepaling van deze $12m$ onbekenden heeft men voor elk der beide knooppunten de drie evenwichtsvergelijkingen te vervullen, hetgeen $6m$ vergelijkingen oplevert.

Voorts zijn de verplaatsingswaarden der beide knooppunten op twee wijzen uit te drukken, 1°. in de spanningsgrootheden van den eigen sector, 2°. in die van den voorafgaanden sector; hieruit vloeien de andere $6m$ betrekkingen voort. Al deze betrekkingen zijn lineair zoowel in de spanningen als in de verplaatsingen. Bij de wijze van oplossing door Bessel gevolgd, worden omgekeerd alle spanningen uitgedrukt in de verplaatsingen van de 2de knooppunten, en zoo voor elken sector een drietal vergelijkingen verkregen, die als onbekenden de 3 verplaatsingsgrootheden voor het randknooppunt uit den eigen sector en bovendien nog die voor de twee voorafgaande en de twee volgende randknooppunten bevatten. De bekende termen dier $3m$ vergelijkingen bestaan uit constanten vermenigvuldigd met den sinus of den cosinus van de helling u_i der spaak van den sector waarvoor zij gelden, terwijl de coëfficiënten der overeenkomstige onbekenden voor alle sectoren dezelfde constante grootheden zijn. Eene algemeene methode voor de oplossing van zulke cyclische stellen van vergelijkingen past Bessel ten slotte toe, om de verplaatsingswaarden in de knooppunten van den rand te becijferen.

In de uitdrukking voor de buiging van eene deelstreep, die Bessel afleidde, maar niet verder ontwikkelde, komen deze 3 grootheden, die de verplaatsing van het voorafgaande randknooppunt bepalen, als constanten voor; zij worden in zijne formule door r_i, p_i en q_i voorge-

steld; r_i als component van verplaatsing in radiale richting van het middelpunt af, p_i als verplaatsingscomponent in de tangentiale richting der toenemende verdeeling en q_i als draaiing in het knooppunt in den zin van de beweging der uurwerkwijzers. Bovendien bevat die formule nog drie spanningswaarden uit het zooeven geschetste vraagstuk, die door ζ_i'', η''_i en z''_i voorgesteld zijn, en die beteekenen: ζ_i'' de volgens de koorde werkende krachtcomponent van het voorafgaande knooppunt op het randstuk, η_i'' de door dat knooppunt op het randstuk uitgeoefende krachtcomponent in de richting van den pijl, en z_i'' het moment van het koppel op het randstuk in zijn beginpunt werkende en positief gerekend evenals de draaiingen. Daar de accenten dienden ter onderscheiding van deze spanningsgrootheden en die in de spaak- en verbindingsstukken en de laatste niet voorkomen in de buigingsformule (18), neem ik ze niet over. Evenals de buiging kan elk dezer grootheden ontbonden worden; men kan n.l. stellen $r_i = r \sin u_i$ $p_i = p \cos u_i$ en $q_i = q \cos u_i$ waar r, p en q voor alle sectoren gelijk zijn.

In het algemeen zijn er in de uitdrukking voor eenige grootheid g_i die veranderlijk is bij draaiing van den cirkel, zoowel termen met $\cos u_i$ als met $\sin u_i$ aanwezig, en geeft die ontbinding dus: $g_i = g_s \sin u_i, + g_c \cos u_i$. Beschouwt men den cirkel in dien stand van symmetrie waarin twee spaken horizontaal zijn, dan is voor deze $g_i = + g_c$ of $= - g_c$. Over de radiale verplaatsing r_i aan het spaakeinde kan men opmerken, dat zij wegens de symmetrie ten opzichte van de vertikaal door het middelpunt gelijk moet zijn voor $u_i = 0^\circ$ en $u_i = 180^\circ$; dat kan alleen als $r_c = 0$ is. Dezelfde symmetrie verlangt dat de grootheden p_i en q_i bij vertikalen spaakstand ($u_i = 90^\circ$) nul zijn, omdat zij anders zouden wijzen op het bestaan van elastische verschuivingen in eene richting loodrecht op de lijn van symmetrie. Waar nu r_c, p_s en q_s gelijk nul zijn, laat ik bij r_s, p_c en q_c de s of c weg. Voor de 3 spanningswaarden geldt deze vereenvoudiging niet; men heeft derhalve:

$$\zeta_i = \zeta_s \sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) + \zeta_c \cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

en ten opzichte van η_i en z_i hebben η_s en η_c, z_s en z_c, de overeenkomstige beteekenis.

Er bestaat in de grootheden van dit vraagstuk ook eene tegengestelde symmetrie ten opzichte van de horizontale lijn door het middelpunt, indien de figuur een ten aanzien van die lijn symmetrischen stand heeft.

In punten der figuur, die voor deze lijn elkanders spiegelbeeld

zijn, zullen door het zwaarteveld elastische verplaatsingen ontstaan, waarvan de horizontale componenten alleen verschillen van teeken en de vertikale geheel gelijk zijn. Men overtuigt zich hiervan door den toestand zich voor te stellen, waarbij de versnelling der zwaartekracht $-g$ is, en door vervolgens in de gedachte zwaarteveld en cirkel tezamen 180° om het middelpunt draaien te laten.

Voor de beide standen van symmetrie volgt uit deze voorwaarden, dat de horizontale component der elastische verplaatsing oneven is in beide co-ordinaten x en y, terwijl de vertikale component eene even functie van beide coördinaten moet zijn. Ook zal men er eigenschappen voor de elastische krachten aan kunnen ontleenen; zij zijn ten opzichte van de y-as elkanders spiegelbeeld, indien de deelen waarop zij worden uitgeoefend elkanders spiegelbeeld zijn; ten opzichte van de x-as zijn zij met die volgens het spiegelbeeld in evenwicht. Hiermede weet ik nog niet goed te slagen in het afleiden van eenige bepaalde betrekkingen tusschen de spanningsconstanten ϑ_s, η_s, z_s en ϑ_c, η_c, z_c, waarvan de getallenwaarden voor de becijfering der cirkelbuiging volgens formule (18) van Bessel bekend moeten zijn.

Nadat in die formule gesubstitueerd is:

$$r_i = r \sin u_i = \quad r \cos\frac{\vartheta}{2} \sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) - r \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$p_i = p \cos u_i = + p \sin\frac{\vartheta}{2} \sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) + p \cos\frac{\vartheta}{2} \cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$q_i = q \cos u_i = + q \sin\frac{\vartheta}{2} \sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) + q \cos\frac{\vartheta}{2} \cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\zeta_i'' = \zeta_s \sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) + \zeta_c \cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\eta_i'' = \eta_s \sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) + \eta_c \cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$z_i'' = z_s \sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right) + z_c \cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$$

en nadat de termen daaruit zijn weggelaten, die op den spanningstoestand onafhankelijk van het zwaarteveld betrekking hebben, geeft zij bij splitsing in termen met $\sin\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$ tot factor of met $\cos\left(u_i + \frac{\vartheta}{2}\right)$ tot factor, voor de beide buigingsfunctiën de onderstaande uitdrukkingen:

$$F(w) = -\, r \cos\frac{\vartheta}{2} \sin w + (p - q) \sin\frac{\vartheta}{2} \cos w + q \sin\frac{\vartheta}{2} +$$

$$+ \zeta_s . \left[\mathfrak{a} \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \dot{\mathfrak{a}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \mathfrak{A}\right] +$$

$$+ \eta_s . \left[\mathfrak{b} \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \dot{\mathfrak{b}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \mathfrak{B}\right] +$$

$$+ z_s . \left[\mathfrak{c} \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \dot{\mathfrak{c}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \mathfrak{C}\right] +$$

$$+ \left[\mathfrak{g}' \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \dot{\mathfrak{g}}' \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \mathfrak{G}'\right]$$

$$G(w) = +\, r \sin\frac{\vartheta}{2} \sin w + (p - q) \cos\frac{\vartheta}{2} \cos w + q \cos\frac{\vartheta}{2} +$$

$$+ \zeta_c . \left[\mathfrak{a} \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \dot{\mathfrak{a}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \mathfrak{A}\right] +$$

$$+ \eta_c . \left[\mathfrak{b} \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \dot{\mathfrak{b}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \mathfrak{B}\right] +$$

$$+ z_c . \left[\mathfrak{c} \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \dot{\mathfrak{c}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \mathfrak{C}\right] +$$

$$+ \left[- \mathfrak{g} \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \dot{\mathfrak{g}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \mathfrak{G}\right]$$

De functiën in beide uitdrukkingen, die ζ_s of ζ_c, η_s of η_c, z_s of z_c tot factor hebben, zijn dus dezelfde. De duitsche letters $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; $\dot{\mathfrak{a}}$, $\dot{\mathfrak{b}}$, $\dot{\mathfrak{c}}$; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{g}$, $\dot{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}'$, $\dot{\mathfrak{g}}'$, $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{G}'$ stellen in 't algemeen functiën der veranderlijke w en der constante ϑ voor. Men vindt ze opgegeven door Bessel in § 5, (pag. 15—16) als integralen die, genomen over het randstuk in zijn geheel, evenveel constanten geven voorkomende in de 3 vergelijkingen (14*), die het verband uitdrukken tusschen de 3 spanningsgrootheden aan het beginpunt van een randstuk en de 6 grootheden, die de verplaatsing der beide uiteinden van dat randstuk bepalen. De punt boven die letters beteekent niets anders dan een onderscheid, geen differentiaalquotient. Bij de bovenvermelde vereenvoudigde onderstellingen kunnen de 15 integraties alle worden volbracht; ik deed dit en verkreeg voor de 5 combinaties in $F(w)$ en $G(w)$ voorkomende het volgende:

$$\omega . \varkappa . \left\{\mathfrak{a} \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) + \dot{\mathfrak{a}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) - \mathfrak{A}\right\} =$$

$$= \sin\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) . \left(- 1\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} \cos\vartheta + \varkappa\right) + \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - w\right) . \left(- \tfrac{1}{2} w + \tfrac{1}{4} \sin\vartheta\right)$$

$$- w \cos\frac{\vartheta}{2} + (1-\varkappa)\sin\frac{\vartheta}{2}$$

$$\omega\,.\,\varkappa\,.\left\{\mathfrak{b}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)+\dot{\mathfrak{b}}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)-\mathfrak{B}\right\}=$$

$$=\sin\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right).\left(-\tfrac{1}{2}w-\tfrac{1}{4}\sin\vartheta\right)+\cos\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right).\left(1\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\cos\vartheta-\varkappa\right)$$

$$-w\sin\frac{\vartheta}{2}-(1-\varkappa)\cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$\omega\,.\,\varkappa\,.\left\{\mathfrak{c}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)+\dot{\mathfrak{c}}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)-\mathfrak{C}\right\}=$$

$$=-\sin\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)\cos\frac{\vartheta}{2}+\cos\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)\sin\frac{\vartheta}{2}-w$$

$$\frac{1}{\Delta h}.\varkappa\,.\left\{\mathfrak{g}'\sin\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)+\dot{\mathfrak{g}}'\cos\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)-\mathfrak{G}'\right\}=$$

$$=\sin\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right).\left(-\tfrac{1}{4}w^2+\tfrac{1}{8}\cos\vartheta+2\tfrac{1}{8}-\varkappa\right)+$$

$$+\cos\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right).\left[\left(1\tfrac{1}{4}-\varkappa\right)w-\tfrac{1}{8}\sin\vartheta\right]$$

$$-(2-\varkappa)\sin\frac{\vartheta}{2}+w\cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$\frac{1}{\Delta h}\,.\,\varkappa\,.\left\{-\mathfrak{g}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)-\dot{\mathfrak{g}}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right)+\mathfrak{G}\right\}=$$

$$=\sin\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right).\left[-\left(1\tfrac{1}{4}-\varkappa\right)w-\tfrac{1}{8}\sin\vartheta\right]$$

$$+\cos\left(\frac{\vartheta}{2}-w\right).\left(-\tfrac{1}{4}w^2-\tfrac{1}{8}\cos\vartheta+2\tfrac{1}{8}-\varkappa\right)$$

$$-w\sin\frac{\vartheta}{2}-(2-\varkappa)\cos\frac{\vartheta}{2}$$

In deze formules beteekenen $\varkappa$, ω, Δ en h constanten voor den cirkel; h is de straal gerekend van het middelpunt tot het zwaartepunt van de randdoorsnede, Δ is het gewicht van 1 cm^3 van het metaal, ω is de grootte der randdoorsnede, en in de constante $\varkappa$ uitgedrukt is het traagheidsmoment van de doorsnede gelijk aan $h^2\,\omega\,\varkappa$. Ten opzichte van de waarden p, q en r, die voor de elastische verplaatsingen en ζ, η en z, die voor de spanningen zijn ingevoerd, heb ik nog op te merken, dat aan r en p de werkelijke verplaatsingen $\lambda\,h\,r$ en $\lambda\,h\,p$, aan q de werkelijke draaiing $\lambda\,q$, aan ζ en η

de werkelijke spanningskrachten ζ en η, en aan z het werkelijke spanningsmoment $h\,z$, beantwoorden, waar λ evenals boven de relatieve verkorting is van het materiaal onder den druk van de gewichtseenheid per cm².

Ook is de buiging naar Bessel uitgedrukt in deelen van den straal h.

De uitwerking geeft dus betrekkelijk eenvoudige functiën, die het verloop der buiging doen kennen van spaak tot spaak. Ik zal ze verder niet herleiden, doch nu de constante spanningswaarden, die in de formule voorkomen, uitdrukken in de 3 onbekende verplaatsingsgrootheden en in gegevens van den cirkel; deze onbekenden r, p en q zijn slechts door oplossing van het geheele stelsel van cyclische vergelijkingen te vinden, omdat de bizondere maten van de spaken en de dwarsverbindingen daarop hun invloed doen gelden. Een algemeene behandeling komt voor deze niet in aanmerking; men kan hunne getallenwaarden voor den te onderzoeken cirkel naar Bessel's voorbeeld becijferen of ze aanmerken als constanten, uit de formule af te leiden door deze aan meetuitkomsten aan te sluiten.

Voor de spanningswaarden ζ_s, η_s, z_s en ζ_c, η_c en z_c is dit anders; men kan ze algemeen oplossen met behulp van de drie vergelijkingen (14*) van § 7 der Bessel'sche verhandeling, en deze oplossing leerde mij de bizonderheid kennen, dat ζ_c en η_s gelijk zijn en niet anders beteekenen, dan de kracht die met het gewicht van het halve randstuk in evenwicht is; een uitkomst die aan Bessel blijkbaar is ontgaan, daar in zijne toepassing in § 13 (p. 39—40) voor de eerste $-5228.68\,\Delta$, voor de tweede $-5227.96\,\Delta$ in rekening is gebracht.

Ik zal hier alleen de uitkomsten mededeelen, waartoe ik door oplossing der 3 lineaire vergelijkingen voor elk stel spanningsgrootheden gekomen ben:

$$\zeta_s = \tfrac{1}{2}\,\frac{T_1}{N}\,h\,\omega\,\Delta \quad ; \quad \eta_s = -\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,h\,\omega\,\Delta \quad ; \quad z_s = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{T_2}{N}\,h\,\omega\,\Delta.$$

Schrijvende σ voor $\dfrac{-r+p-q}{h\Delta}$ en τ voor $\dfrac{-q}{h\,\Delta}$, merk ik met het oog op de dimensie van een dezer verplaatsingsgrootheden, q bijv. op, dat q een hoek gedeeld door λ voorstelt. Men heeft dus in q een gewicht per eenheid van oppervlak te zien en in $\dfrac{q}{h}$ een gewicht per eenheid van volume, evenals in Δ. Uitgedrukt in $\vartheta, \varkappa, \sigma$ en τ verkreeg ik:

$$N = \vartheta^2 + \vartheta \sin \vartheta - 8 (1 - \varkappa) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$T_1 = \vartheta^2 + \vartheta \sin \vartheta . \{7 - 4\varkappa (1 - \sigma)\} + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} . \{\vartheta^2 - 16 + 8\varkappa (1 - \tau)\}$$

$$T_2 = \sin \frac{\vartheta}{2} . [\vartheta \{\vartheta^2 - 10 + 2\varkappa (3 - 2\tau)\} + 2 \sin \vartheta . \{3 + \varkappa (-1 + 2\tau + 4\sigma)\}] +$$

$$+ \cos \frac{\vartheta}{2} . [\vartheta^2 (3 - 2\varkappa) - \vartheta \sin \vartheta . (1 + 4\varkappa\sigma)]$$

Voor het 2[de] stel spanningsgrootheden aan de spaakeinden zijn mijne uitkomsten:

$$\zeta_c = - \tfrac{1}{2} \vartheta h \vartheta \Delta \quad ; \quad \eta_c = - \tfrac{1}{2} . \frac{\vartheta\left(3 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) - \sin \vartheta (3 + 4\varkappa\sigma)}{\vartheta - \sin \vartheta} h \omega \Delta ,$$

en

$$z_c = \tfrac{1}{2} \left[\vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} - 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \left(1 + \frac{\eta_c}{h \omega \Delta} \right) \right] h \omega \Delta .$$

Scheikunde. — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan: „*Over den onverzadigden alkohol uit de aetherische olie van versch gefermenteerde theeblâren*".

In 1895 onderzocht ik, in gemeenschap met mijn toenmaligen assistent den Heer C. E. J. LOHMANN, de aetherische olie uit versch gefermenteerde thee [1]), waarvan het ons, dank zij de medewerking van eenige theeplanters, gelukt was een kleine hoeveelheid te bereiden. De opbrengst aan deze aetherische olie is uiterst gering; 15 K.G. versch blad leveren slechts 1 c.M^3.

Wij konden toen in de olie de aanwezigheid van een bij 153°—155° kokenden onverzadigden alkohol aantoonen van de samenstelling $C_6H_{12}O$, dus een hexyleenalkohol. Door oxydatie kon daaruit een naar ranse boter riekend zuur verkregen worden, welks calciumzout bij de analyse een uitkomst gaf, die op de aanwezigheid van boterzuur wees. Gebrek aan materiaal verhinderde ons uit te maken of het gevormde zuur normaal dan wel isoboterzuur was. Later, kort voor mijn vertrek uit Indië, ben ik in de gelegenheid geweest mij een grootere hoeveelheid, ± 120 cM^3, van de aetherische thee-olie te verschaffen, die mij in staat stelde het onderzoek weder op te nemen en meer in 't bijzonder na te gaan of er bij de oxydatie van den onverzadigden alkohol werkelijk een der boterzuren gevormd wordt. De kennis van den aard van dat zuur is natuurlijk voor de kennis van de structuur van dien alkohol van overwegend belang.

De ruwe olie werd, na behandeling met loog, om het methylsalicylaat [2]) (welks aanwezigheid wij in 1896 aangetoond hadden) en event. andere esters [3]) te verzeepen, verschillende malen gefractionneerd. De grootste fracties kookten van 154—156° en van 156—158°.

Deze werden vereenigd en in vacuo gedistilleerd; de hoofdfraktie kookte van 75—80° bij 28—30 mM.

Het SG bij 19° was 0.8465, $n_{D^{19}}$ 1.43756.

De elementair-analyse gaf 71.17 °/₀ C en 12.74 °/₀ H terwijl $C_6H_{12}O$ 71.91 °/₀ C en 12.10 °/₀ H vereischt.

---

[1]) Verslag omtrent den staat van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg over het jaar 1895, blz. 119.

[2]) Idem over 1896, blz. 168.

[3]) Het afgescheiden salicylzuur was niet reukeloos. De reuk herinnerde aan dien van phenylazijnzuur.

De vloeistof werd nu met droog natriumsulfaat behandeld en opnieuw in vacuo gedistilleerd, zonder dat echter de analyse van het daarop verkregen product betere resultaten gaf (71.08 % C. en 12.59 % H).

De onverzadigde thee-alkohol addeert, zooals vroeger werd aangetoond, gretig broom, de hoeveelheid broom welke geaddeerd werd was echter geringer dan voor een stof van de formule $C_6H_{12}O$ te verwachten is en bedroeg daarvan slechts 87 %.

Een tweetal nieuwe bepalingen gaven het volgende resultaat:

I. 1.017 G. van den alkohol addeeren in chloroformoplossing afgekoeld met ijswater 1.363 G. broom.

II. 0.529 G. addeeren 0.707 G., waaruit blijkt dat resp. slechts 83.2 % en 83.5 % van de berekende hoeveelheid geaddeerd wordt.

Daar ik vermoedde, dat de onverzadigde alkohol wellicht met een hexylalkohol verontreinigd kon zijn, heb ik getracht een grootere hoeveelheid van het vloeibare broomadditieproduct [1]) door verhitting in vacuo op 100° daarvan te bevrijden, om vervolgens door behandeling met zinkstof den hexyleenalkohol in zuiveren toestand te verkrijgen. Daar echter het broomadditieproduct onder die omstandigheden broomwaterstof afsplitste, moest ik van mijn voornemen afzien.

Behandeling van den onverzadigden alkohol met phenylisocyanaat leverde geen gekristalliseerd product, daarentegen gaf α-naphtylisocyanaat een bij 76° smeltend α-naphtylurethaan, waarvan het smeltpunt, na herhaald omkristalliseeren uit petroleumaether, tot 80° kon worden opgevoerd.

Door behandeling met phtaalzuuranhydride gaf de thee-alkohol een vloeibaren, zuren phtaalzuren ester waarvan het zilverzout bij 140° smelt.

De oxydatie van den thee-alkohol met kaliumpermanganaat, in neutrale zoowel als door natriumcarbonaat alkalisch gemaakte oplossing, verloopt zeer vlot en uit 11,5 G. konden (met 50 G. kaliumpermanganaat in 4 % oplossing) ongeveer 3 cM^3 zuur verkregen worden, dat evenals vroeger weer een aan boterzuur herinnerenden geur bezat. Bij distillatie van het zuur werd echter, behalve een geringe voorloop, waarin mierenzuur aangetoond kon worden, als hoofdfractie eene bij 125—145° kokende vloeistof verkregen, terwijl eenig hooger kokend, naar zweet riekend product in de fractionneerkolf achterbleef. De hoofdfractie, nogmaals gedistilleerd, gaf een van 140°—145° kokende vloeistof, die door koken met water en calciumcarbonaat in een calciumzout werd omgezet, dat bij de analyse 21.2 % Ca gaf.

---

[1]) Dit wordt, in vloeibare ammoniak afgekoeld, niet vast.

Deze uitkomst, alsmede het kookpunt van het verkregen zuur, wijzen er op dat dit uit propionzuur bestaat, welks calciumzout 21.5 % Ca bevat. Door verhitting van het ammoniumzout werd een bij 78° smeltend amide verkregen, dat met propionamide gemengd geen verlaagd smeltpunt vertoonde.

De uit de thee-olie verkregen hexyleen-alkohol zou dan een hexeen. 3. ol. 6 dus $CH_3 . CH_2 . CH : CH . CH_2 . CH_2OH$ kunnen zijn. Nu is door H. WALBAUM [1]) uit de Japansche pepermuntolie een hexyleen-alkohol verkregen, waaraan hij op grond van zijn onderzoek de structuur van een $\beta\gamma$ hexenol toekent. Deze alkohol zou dan identisch met dien uit de thee-olie zijn.

Bij oxydatie met kaliumpermanganaat levert het $\beta\gamma$ hexenol als hoofdproduct propionzuur, met chroomzuur een hexyleenzuur; het α-naphtylurethaan er uit verkregen smelt bij 80°, terwijl het smeltpunt van het zilverzout van den zuren phtaalzuren ester bij 126° ligt. Bij de additie van broom wordt slechts 70 % van de geëischte hoeveelheid opgenomen.

De smeltpunten van het door WALBAUM verkregen zilverzout en het mijne komen wel is waar niet overeen, maar overigens pleiten de eigenschappen van den thee-alkohol er voor om aan te nemen, dat deze grootendeels uit $\beta\gamma$ hexenol bestaat. Waarom echter bij de oxydatie met kalium-permanganaat vroeger een zuur werd verkregen, welks calciumzout een gehalte van slechts 18.6 % calcium had, vermag ik op 't oogenblik niet op te helderen. Het zuur was toen *niet* gedistilleerd, omdat de hoeveelheid daartoe te gering was, en kan bijv. hexylzuur bevat hebben waardoor het calciumgehalte van gevormd propionzuur verlaagd werd, dan wel bestaat de mogelijkheid, dat de verhitting met loog, welke de ruwe thee-olie thans onderging om het methylsalicylaat te verwijderen, een verspringen van de dubbele binding heeft veroorzaakt. Het onderzoek alsmede dat naar de andere bestanddeelen van de thee-olie wordt voortgezet [2]).

Naschrift. Sinds de aanbieding van bovenstaande mededeeling mocht ik op mijn verzoek van de firma SCHIMMEL en Co. te Leipzig eene kleine hoeveelheid van den onverzadigden alkohol uit de Japansche pepermuntolie ontvangen, waarvoor ik ook te dezer plaatse gaarne mijn dank betuig. Het daaruit verkregen bij 80° smeltende

---

[1]) Journ. f. prakt. Chemie, **96**, 245 (1917).

[2]) De aeth. olie van de thee is voor eenigen tijd ook het onderwerp geweest van een onderzoek van Dr. DEUSS (Mededeelingen van het Proefstation voor Thee XLII, 21 1917), die echter slechts onze waarneming bevestigde, dat er een onverzadigde alcohol benevens methylsalicylaat in voorkomt.

α-naphtylurethaan gaf met dat uit de thee-olie gemengd geen verandering van het smeltpunt. De er uit bereide zure phtaalzure ester leverde een zilverzout, dat bij 128° smolt. Door omkristalliseeren uit alkohol kon het smeltpunt opgevoerd worden tot 134° (onscherp). Gemengd met het uit den thee-alkohol verkregen zilverzout, smolt het mengsel bij 138°.

Ik meen thans wel te mogen aannemen, dat de door mij verkregen onverzadigde alkohol uit de thee-olie identisch is met het $\beta\gamma$-hexenol, dus een hexeen-3-ol-6. is.

Utrecht, Org. Chem. Laboratorium der R. Universiteit.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer K. F. NIESSEN over: *„Theorie eener methode ter afleiding van de energieverdeeling in een eng spectraalgebied uit de energieverdeeling, waargenomen in een interferometer".*

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

1.

MICHELSON heeft de richting aangegeven, waarin men naar een dergelijke methode zoeken moet [1]). Hij beschouwt eerst twee absoluut monochromatische bundels, welke hij onder een phaseverschil met elkaar laat interfereeren. Vindt dit plaats in den interferometer van MICHELSON, waarin het referentievlak op een afstand l voor den verschuifbaren spiegel moge liggen, dan is het phaseverschil der stralen, die loodrecht op de spiegels zijn ingevallen $\frac{2l}{\lambda} \times 2\pi$ (of $4\pi lm$, als men met het golvenaantal m werkt, waaronder we het aantal golven in de lengteeenheid verstaan). De kijker wordt op oneindig ingesteld en in het midden van het gezichtsveld (want daar interfereeren de loodrecht ingevallen stralen) wordt een intensiteit $J(l)$ waargenomen, die met behulp van de formule [2])

$$J(l) = 2 J_1 + 2 J_1 \cos 4\pi lm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

uit de gelijke intensiteiten J_1 der interfereerende bundels berekend kan worden. Een willekeurigen lichtbundel kan men in oneindig veel absoluut monochromatische bundels verdeeld denken van de sterkte

$$J_1 = \psi(\lambda)\, d\lambda \quad \text{of} \quad J_1 = \chi(m)\, dm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

indien men het golvenaantal m gebruikt. Daar intensiteiten, te danken aan verschillende frequenties zich scalair samenvoegen, zal dit licht, in den interferometer van MICHELSON toegelaten, in het beschouwde punt de intensiteit $J(l)$ teweegbrengen, gegeven door:

---

[1]) Phil. Mag. (5) 31, pag. 338, 1891.

[2]) DRUDE, Lehrb. der Optik, pag. 123.

$$\left.\begin{aligned}
J(l) &= 2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\psi(\lambda)\,d\lambda + 2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\psi(\lambda)\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\,d\lambda \quad \text{of}\\
J(l) &= 2\int_{m_2}^{m_1}\chi(m)\,dm + 2\int_{m_2}^{m_1}\chi(m)\cos 4\pi\, lm\,dm \quad \text{of}\\
J(l) &= 2\int_{-a}^{+a}\varphi(x)\,dx + 2\int_{-a}^{+a}\varphi(x)\cos 4\pi l(\overline{m}+x)dx.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Hierin zijn λ_1 en λ_2 de lengten van de kleinste en van de grootste der aanwezige golven, dus m_2 en m_1 de uiterste frequenties aan weerszijden, terwijl $\overline{m}$ het gemiddelde van beide is, zoodat $m = \overline{m} + x$ gesteld kan worden.

Voor $\chi(\overline{m}+x)$ is voorts $\varphi(x)$ geschreven. Het frequentiegebied $2a$ van den bundel onderstelt Michelson zeer klein, zoodat hij alleen een praktisch monochromatischen bundel onderzoekt. Er zij al aanstonds op gewezen, dat wij deze beperking in onze redeneering niet zullen gebruiken.

Omdat $\overline{m}$ bij de integratie een constante is, kan de laatste verg. van (3) in den vorm

$$J(l) = 2\int_{-a}^{+a}\varphi(x)\,dx + 2\cos 4\pi\, l\overline{m} \times C(l) - 2\sin 4\,\pi\, l\overline{m} \times S(l). \;.\; (4)$$

gebracht worden; hierin zijn $C(l)$ en $S(l)$ de volgende functies van l:

$$C(l) = \int_{-a}^{+a}\varphi(x)\cos 4\pi\, lx\,dx, \qquad S(l) = \int_{-a}^{+a}\varphi(x)\sin 4\pi\, lx\,dx. \;.\; (5)$$

Ons doel is de functie $\chi(m)$, dus $\varphi(x)$ te bepalen.

Volgens de integraalstelling van Fourier is in het algemeen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\xi\alpha\,d\xi + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\xi\alpha\,d\xi \;.\; (6)$$

Hierin kan voor $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\xi\alpha\,d\xi$ in de plaats gesteld worden $\int_{-a}^{+a}\varphi(x)\cos 4\pi\, lxdx$, aangezien $\varphi(x)$ voor $-a > x > +a$ toch nul is.

Analoog kan $\int_{-}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \xi a d\xi$ vervangen worden door $\int_{-a}^{+a} \varphi(x) \sin 4\pi\, lx\, dx$ dus $S(l)$. Voor a is klaarblijkelijk $4\pi l$ genomen. Verg. (6) gaat nu over in:

$$\varphi(x) = 4\int_0^\infty C(l) \cos 4\pi\, lx\, dl + 4\int_0^\infty S(l) \sin 4\pi\, lx\, dl \quad . \quad . \quad (7)$$

De functie $\varphi(x)$ zal dus bekend zijn, als men C en S als functies van l kent, dus als men C en S voor elke waarde van l experimenteel kan bepalen.

Gegevens om hiertoe te geraken zijn te ontleenen aan de „zichtbaarheidskromme" van MICHELSON, wier ordinaten hij definieert als $V = \frac{J_{max.} - J_{min.}}{J_{max.} + J_{min.}}$ (waarin $J_{max.}$ en $J_{min.}$ de intensiteiten in de opeenvolgende maxima en minima van het stelsel interferentiefranjes voorstellen). Blijkens (4) is V een functie van $C(l)$ en $S(l)$; nemen wij aan, dat $V(l)$ uit fotometrische waarnemingen voldoende nauwkeurig bekend was, dan beschikken wij dus over een betrekking tusschen $C(l)$ en $S(l)$, maar ieder afzonderlijk kunnen wij die grootheden, zonder meer gegevens, niet bepalen. Slechts in enkele eenvoudige gevallen, die een tweede voorwaarde betreffende $C(l)$ of $S(l)$ inhielden, heeft MICHELSON den vorm van $\varphi(x)$ uit dien van $V(l)$ afgeleid.

Het doel van ons onderzoek is nu, een middel aan te geven, waardoor men in ieder willekeurig geval een tweede betrekking tusschen $C(l)$ en $S(l)$ kan vinden en derhalve $\varphi(x)$ kan oplossen.

In verg. (4) kunnen we $J(l)$ voor een gegeven waarde van l experimenteel bepaald denken. Ook $\int_{-a}^{+a} \varphi(x)\, dx$ kan gemeten worden, dit is nl. de intensiteit, die een der bundels in het midden van het gezichtsveld veroorzaakt, als hij niet tot interferentie gebracht wordt met den anderen. Om deze grootheid te bepalen heeft men dus slechts een der spiegels te bedekken. Verg. (4) kan dus beschouwd worden als een vergelijking met twee onbekenden C en S, te nemen voor die waarde van l, waarvoor J gemeten is.

We zullen voor dezelfde waarde van l een tweede vergelijking tusschen C en S moeten zoeken om beide grootheden te kunnen oplossen. Dit middel zal evenwel falen, als in de tweede vergelijking C en S op dezelfde manier gecombineerd voorkomen als in verg.

(4), dus als zij weer afkomstig zijn van $\int_{-a}^{+a} \varphi(x) \cos 4\pi l(\overline{m}+x)\,dx$,
waarbij met l een varieerbare parameter is bedoeld, die niet meer dezelfde physische beteekenis van zoo even behoeft te hebben.

Prof. ORNSTEIN droeg mij op te onderzoeken, of een dergelijke vergelijking niet te verkrijgen zou zijn uit de intensiteitsverdeeling in het buigingsbeeld bij het echelon. Het resultaat van dit onderzoek is, dat, zoo de intensiteitsformule, onverschillig van welk instrument, C of S bevat, zij hen steeds beide moet bevatten en wel in de combinatie, waarin zij reeds in verg. (4) voorkwamen, tenzij men zich van een nader aan te geven kunstgreep bedient. Zonder dezen zijn C en S niet op te lossen en is $\varphi(x)$ dus niet te bepalen.

2.

We zullen eerst bewijzen, dat voor absoluut monochromatisch licht de intensiteit altijd een even functie van het golvenaantal is, als we voorop stellen, dat het licht zich in het apparaat normaal voortplant, d.w.z. dat een phaseverandering gepaard gaat met een evenredige wegverandering, zoodat b.v. reflectie tegen een dichtere middenstof, metaal- en totale reflectie moeten worden uitgesloten.

Een punt Q, waar we de intensiteit meten, ontvangt zijn licht van zekere punten P van het instrument, die op hun beurt weer belicht worden door de bron L. De punten P verkeeren in verschillende phasen, omdat zij het licht van de bron, ieder langs een anderen weg ontvangen. Daar we overal de normale voortplanting van het licht hebben aangenomen, zullen de phaseverschillen uitsluitend afhangen van verschillen van wegen, uitgedrukt in aantallen golven, en zullen zij dus evenredig zijn aan $\frac{1}{\lambda}$ of m, waarbij de evenredigheidsfactoren afhangen van lengten, hoeken, brekingsindices, enz. Van dispersie zullen we afzien, daar deze in het later te ontwerpen instrument toch wordt buitengesloten. De wegen, die het licht van uit de punten P nog moet afleggen om in het waarnemingspunt Q te komen, zullen ook optisch niet even lang zijn, zoodat zich bij de reeds bestaande phaseverschillen andere voegen, die weer wegens de normale voortplanting van het licht uitsluitend zullen berusten op wegverschillen en dus evenredig aan m zullen zijn, zoodat de uitwijkingen, die de punten P tenslotte in Q teweegbrengen, onderling phaseverschillen vertoonen, die evenredig aan m zijn. Stelt men deze uitwijkingen voor als projecties van vectoren, wier hoek met de as van projectie gelijk is aan de

bijbehoorende phase, dan zullen punten P, over welke lichtwegen loopen van L naar Q, die in aantal golven even lang zijn, vectoren geven, die over elkaar vallen.

Deze zijn in fig. 1 tot één vector vereenigd. Zoo kan de werking van elk instrument, waar slechts normaal voortgeplant licht gebruikt wordt, in ieder punt Q bepaald worden met behulp van een vectorwaaier, die in zijn geheel om O draait volgens de richting van het pijltje. De intensiteit zal het quadraat zijn van de resultante der vectoren. Stel, dat men voor alle punten $P_0, P_1, P_2, \dots P_l$ de phasen van hun verstoringen in Q vergelijkt met de phase van de verstoring, gegeven door een punt P_0, welks vector AO_0 zij, dus een punt, waarover de kortste optische weg loopt van de bron naar het waarnemingspunt, dan is $\angle A_0OA_1 = c_1m$, $\angle A_0OA_2 = c_2m$, enz., waarbij de constanten c_1, c_2, enz. afhangen van allerlei lengten, hoeken en brekingsindices. De richting van den vector OA_0 zullen we kortheidshalve de tijdrichting noemen, daar ze alleen van den tijd afhangt; zij zal in onze redeneering een groote rol blijken te spelen en wij zullen haar voortaan steeds verticaal teekenen en de as van projectie weglaten. We hebben hier een waaier geteekend, welks tophoek klein is; in werkelijkheid zal deze wel meerdere malen 2π bevatten. Vectoren immers, correspondeerende met wegen LQ, die een geheel aantal golven in lengte verschillen, zullen in de figuur wel over elkaar vallen, doch niet als één vector geteekend worden. Dit geschiedt alleen, zoo de wegen optisch precies even lang zijn. Ook behoeven de eindpunten der vectoren geen doorloopende kromme te vormen.

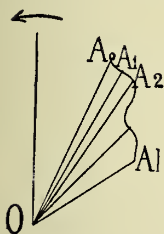


Fig. 1.

Laten we ter verduidelijking den waaier construeeren voor een echelon. Hij bestaat uit eenige kleinere waaiers, welke spaaksgewijze in O staan gerangschikt en wier aantal gelijk is aan het aantal platen van het echelon. In fig. 2 zijn er slechts drie van geteekend.

Alle punten P_1, gelegen in een verticale lijn op het voorvlak eener plaat liggen optisch even ver van de bron [1]) en tevens even ver van het punt Q. Hun vectoren worden dus vereenigd tot één enkelen vector OA_1 welks lengte dus evenredig is aan de lengte der verticale lijn [2]). Een willekeurig punt van den linkerrand der eerste plaat kan als het punt P_0 van zooeven beschouwd worden.

[1]) Het licht valt in volgens de richting d in fig. 3.

[2]) Op deze manier kan men ook den invloed nagaan van diafragma's, vóór de platen gezet, waar later even van gebruik zal gemaakt worden.

De indices bij de punten P van fig. 3 geven aan, welke vector in fig. 2 van hun verticale lijn afkomstig is. Wordt het echelon

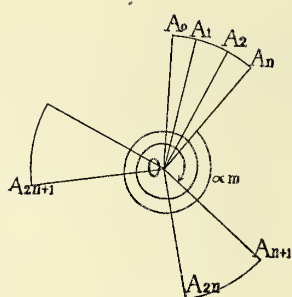


Fig. 2.

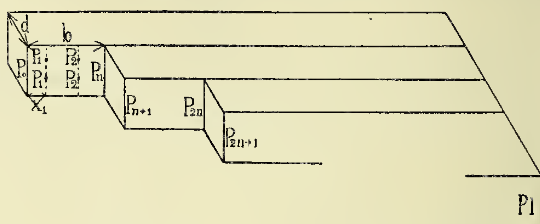


Fig. 3.

onder een hoek θ met de normaal bekeken, dan zullen de stralen uit P_1 en P_0 onder een phaseverschil $\frac{x_1 \sin\theta}{\lambda} 2\pi$ interfereeren $\angle A_1OA_0$ is dus $\frac{2x_1 \sin\theta}{\lambda}\pi$ of zoo men in de vroegere notatie dezen gelijk c_1 stelt, blijkt dus $c_1 = 2\pi x_1 \sin\theta$, dus een constante[1]) te zijn, die uitsluitend van afstanden afhangt; $\angle A_2OA_0 = \frac{2x_2 \sin\theta}{\lambda}\pi$, $\angle A_nOA_0 = \frac{2b \sin\theta}{\lambda}\pi$, als b de breedte der glasplaten is. De andere waaiers zijn met den eersten congruent, terwijl de laatste straal van een waaier steeds een zelfden hoek am met den eersten van den volgenden maakt; $\angle am$ toch is het phaseverschil, te danken aan het verschil van twee lichtwegen, de eene gaande van een punt van den rechterrand eener plaat tot Q en de andere van den linkerrand der volgende plaat tot hetzelfde punt Q. Zijn μ en d de brekingsindex en de dikte van elke plaat, dan is: $a = \mu d - d \cos\theta$, dus weer een constante[1]), van lengtematen en physische constanten afhangende.

Keeren we nu tot het algemeene geval terug.

Valt op het instrument licht van een tweemaal kleinere golflengte, dan zal de waaier tweemaal verder uitgetrokken worden, daar alle hoeken met de tijdrichting evenredig aan m zijn. Vooral bij het echelon blijkt duidelijk, hoe daardoor de resulteerende vector en hiermee de intensiteit in het waarnemingspunt Q van grootte zal veranderen. De intensiteit is dus een functie van het golvenaantal m, en om te bewijzen, dat dit een even functie hiervan is, zullen we m van teeken omkeeren. Dit is slechts een mathematische kunstgreep, waarachter geen physische beteekenis moet gezocht worden. Punten

[1]) d. w. z. onafhankelijk van m.

P_1, die in hun beweging eerst c_1m achter waren bij P_0 en wier vector dus onder een hoek c_1m rechts van de tijdrichting lag, zullen P_0 nu als het ware c_1m vóór zijn en een vector geven, die weer een hoek c_1m met de tijdrichting vormt, doch nu links van deze is gelegen. Daar de hoek tusschen elken vector en de tijdrichting evenredig was aan m, zullen alle vectoren zich dus in deze richting spiegelen en zal de vorm van den waaier en daarmee de resultante, dus de intensiteit onveranderd blijven. Derhalve is bij elk instrument, waarin het licht zich normaal voortplant, de intensiteit een even functie van het golvenaantal. Hierbij is absoluut monochromatisch licht ondersteld, daar bij samengesteld licht de intensiteit geen functie van het golvenaantal meer is wegens het integreeren naar m tusschen bepaalde grenzen.

3.

Nu zullen we in het instrument echter ook terugkaatsingen tegen een dichtere middenstof toelaten. De phase verspringt hierbij plotseling π; een dergelijke plotselinge phaseverandering zullen we een phasesprong noemen. Stel dus, dat eenige punten P' van het instrument verlicht worden, door stralen, die een oneven aantal malen zulk een reflectie ondergaan hebben. Hun vectoren maken nu niet meer den hoek $c'm$, doch den hoek $c'm + \pi$ met de tijdrichting. Het punt P_0 gaf vroeger een vector, met behulp van welks richting de tijdrichting gedefinieerd werd. Komt het punt P_0 echter ook tot de punten P' te behooren, dan zal ook zijn vector over een hoek π draaien, dus de tegengestelde richting van vroeger verkrijgen. Daar de andere groep punten van het apparaat normaal voortgeplant licht blijven ontvangen, blijven hun vectoren de hoeken cm met P_0's vroegeren vector vormen.

Definieeren we nu de tijdrichting opnieuw en wel als de richting van den vector, afkomstig van dat punt P_0 van het apparaat, over hetwelk de kortste optische weg loopt van de lichtbron L naar het waarnemingspunt Q, afgezien van alle mogelijke phasesprongen, dan zal de tijdrichting in de volgende beschouwingen steeds de standvastige richting zijn, ten opzichte waarvan we den stand der vectoren bepalen. We zullen haar weer steeds verticaal naar boven gericht denken. Een redeneering, die op deze tijdrichting is gebaseerd, zal dus zoowel gelden voor het geval, dat dit punt P_0 licht ontvangt, dat van phase is versprongen, als voor het geval, dat er normaal voortgeplant licht op valt. De constanten c laten we hun waarde behouden, daar zij slechts van afstanden afhangen; echter

behoeft cm niet meer het phaseverschil der interfereerende stralen te zijn; dit kan $cm + \pi$ geworden zijn.

Na deze uitvoerige beschouwingen, die, zooals later zal blijken, de kern der methode raken, gaan we in het geval van twee puntengroepen P en P' den waaier in het punt Q construeeren.

Een punt P_1 en een punt P_1' geven vectoren, die resp. de hoeken $c_1 m$ en $c'_1 m + \pi$ met de tijdrichting vormen. Als we nu m van teeken omdraaien, zal de eerste groep vectoren weer gespiegeld worden in de tijdrichting; een vector uit de tweede groep zal echter den hoek $\pi - c'_1 m$ in plaats van den hoek $\pi + c_1' m$ met de tijdrichting gaan vormen en dus klaarblijkelijk gespiegeld worden in het verlengde der tijdrichting. In laatste instantie zullen alle vectoren dus weer in dezelfde lijn gespiegeld worden, waardoor de waaier van vorm en dus de intensiteit van grootte onveranderd blijft, welke laatste dus weer een even functie van m is. De stelling kan dus als volgt worden uitgebreid.

In elk instrument, waar het licht slechts phasesprongen van een geheel aantal malen π kan ondergaan, is de intensiteit bij het gebruik van absoluut monochromatisch licht een even functie van het golvenaantal.

Aan deze voorwaarden voldoet het licht uiteraard in alle buigingsapparaten, ook meest in die, welke op interferentie berusten. Hier kan echter, zooals later blijken zal, door het geschikt optreden van phasesprongen o.a. bij reflecties tegen metalen spiegels de intensiteit wel eens een niet-even functie van het golvenaantal worden.

4.

Beschouwen we nu het geval van een uit meerdere frequenties continu samengestelden bundel. Stel, dat het mogelijk was een tweede vergelijking tusschen C en S voor een gegeven parameter l op te stellen met behulp van een der gebruikelijke apparaten, waar we een gunstige werking van de phasesprongen bij de metaalreflecties afwezig zullen onderstellen; wat bij de meeste, zoo niet bij alle gebruikelijke instrumenten werkelijk het geval is. We kunnen nu gemakkelijk aantoonen, dat beide grootheden C en S in dezelfde combinatie als in verg. (4) moeten optreden. Bevat toch de nieuwe vergelijking b.v. C, d.w.z. $\int_{-a}^{+a} \varphi(x) \cos 4\pi lx \, dx$, dan zou zij voor absoluut monochromatisch licht $J \cos 4\pi lx$ bevatten, waarvoor men ook schrijven kan $J \cos 4\pi l (m - \overline{m})$. Doch voor enkelvoudig licht moet

de intensiteit een even functie zijn in m, zooals we zagen; dus kan $J \cos 4\pi l (m - \overline{m})$ slechts in die combinatie voorkomen, die haar terugbrengt tot $J \cos 4\pi lm$, welke even is in m, d.w.z. men moet haar slechts aantreffen in vormen van de gedaante:

$$\cos 4\pi l\overline{m}\, J \cos 4\pi l (m - \overline{m}) - \sin 4\pi l\overline{m}\, J \sin 4\pi l (m - \overline{m}) \quad \text{of}$$

$$\cos 4\pi l\overline{m}\, J \cos 4\pi lx - \sin 4\pi l\overline{m}\, J \sin 4\pi lx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Om omgekeerd de intensiteitsformule voor enkelvoudig licht uit te breiden tot die voor samengesteld licht heeft men in de eerste J door $\varphi(x)\, dx$ te vervangen en daarna naar x te integreeren. De groepeering (8) gaat daarbij over in $\cos 4\pi l\overline{m}\, C - \sin 4\pi l\overline{m}\, S$, juist die van verg. (4). Hiermee is dus bewezen, dat geen dezer instrumenten een tweede vergelijking tusschen C en S kan leveren, die onafhankelijk is van verg. (4). C en S zijn dus niet uit hun combinatie te scheiden, $\varphi(x)$ is dus oogenschijnlijk niet op te lossen [1].

5.

Het ligt nu voor de hand, na te gaan, of de functie $\varphi(x)$ soms wel bepaald kan worden, zoo het licht in een of ander instrument een phasesprong α kan ondergaan, welke van π verschilt, daargelaten of deze aan metaalreflecties of andere verschijnselen is te danken. Stel, dat een deel der punten P, nu voorzien van dubbele en driedubbele accenten, zulk licht ontvangt. De hoeken der correspondeerende vectoren met de tijdrichting zouden $c_1''m$, $c_2''m$..., $c_1'''m$, $c_2'''m$.... zijn, zoo het licht zich in dezelfde richtingen, doch overal op normale wijze voortplantte; nu zijn zij dus $c''m + \alpha$ of $c'''m + \alpha + \pi$, al naar gelang op het beschouwde punt P'' of P''' licht valt, dat behalve den phasesprong α resp. nog een even (waaronder nul) of

[1] Terloops zij opgemerkt, dat C en S niet op andere wijze gecombineerd voorkomen in de intensiteitsformule, die voor het echelon de intensiteitsverdeeling over het geheele brandvlak van den kijker bepaalt. Deze hangt voor de verschillende punten van een parameter af, dien we l' zouden kunnen noemen. Ik heb door een berekening, die hier wordt weggelaten, bewezen, dat deze functie van l' voldoet aan een differentiaalvergelijking van de tweede orde, waarin alleen als coefficienten optreden combinaties van C en S van de soort, als in verg. (4), te nemen voor eenige waarden van l, verband houdende met l'. Zoo was zuiver analytisch de afhankelijkheid bewezen tusschen de intensiteiten in het buigingsbeeld van het echelon en die in het interferentiebeeld bij den interferometer van MICHELSON. Ofschoon de intensiteitsformule voor het echelon sterk gewijzigd kon worden door te onderstellen, dat voor de glasplaten diafragma's van bijzonderen vorm waren geplaatst, bleef een dergelijke differentiaalvergelijking van de tweede orde toch van kracht en daarmee de afhankelijkheid dus onverbroken.

een oneven aantal reflecties tegen dichtere middenstoffen heeft ondergaan. Men heeft hier dus met vier groepen van punten te maken, welke indeeling uit het voorafgaande duidelijk zal zijn. Beschouwt men uit elk dier groepen één punt, resp. P, P', P'', P''', dan maken hun vectoren met de tijdrichting de hoeken cm, $c'm + \pi$, $c''m + \alpha$, $c'''m + \alpha + \pi$. De phasesprong α is positief gerekend zoo het een sprong terug is en negatief in het tegengestelde geval. Verwisselt men nu m van teeken, dan worden deze vectoren resp. gespiegeld in de tijdrichting t, de richting t', die een hoek π met de eerste vormt, de richting a, die een hoek α maakt met de tijdrichting en die, welke een hoek $\alpha + \pi$ met de tijdrichting vormt, zijnde a' in fig. 4. De vectoren kunnen dus ten slotte in twee groepen gesplitst worden, waarvan de eene om de lijn tt', de andere om een lijn aa', hiermee een hoek α makende, gespiegeld wordt. Daar $\alpha \neq \pi$ is ondersteld, zal de waaier nu wel vervormd worden en zal de intensiteit niet meer dezelfde blijven. Deze is dus geen even functie meer van het golvenaantal. Bij een dergelijk instrument zullen C en S dus juist niet op de wijze van verg. (4) in de intensiteitsformule mogen optreden, hetgeen weer via de intensiteit, geldend voor enkelvoudig licht, is te bewijzen. Nu is de scheiding van C en S dus niet meer principiëel onmogelijk en dus zoeken we in de goede richting om de functie $\varphi(x)$ te bepalen. Ten slotte zij nog opgemerkt, dat een phasesprong in het gedeelte LP van den lichtweg LPQ hetzelfde effect zal geven als een even groote gelijk gerichte, in het deel PQ, welke opmerking van belang zal blijken te zijn voor den interferometer van MICHELSON. In het voorgaande is ondersteld, dat de phasesprong α zijn grootte en teeken behield bij de teekenverandering van m; hiertoe moet hij dus een constante of een even functie van m zijn. Alleen een instrument, waarin hij een constante is, d. w. z. onafhankelijk van m, zal praktisch voor ons bruikbaar zijn. Ons doel toch is bundels van de meest uiteenloopende constitutie te onderzoeken en het zou niet doenlijk zijn voor elke lichtsoort een afzonderlijken phasesprong in rekening te moeten brengen. Om die reden zullen we bv. geen gebruik kunnen maken van metaalreflecties. Aan den anderen kant zal men er echter bezwaarlijk buiten kunnen, want in bijna alle interferometers komen verzilverde glasplaten of metalen spiegels voor. Dit bezwaar is echter geringer dan het schijnt. Onderwerpt men nl. elk der vier monochromatische bundels, die de puntengroepen P, P', P'', P''' van zooeven verlichtten en dus reeds de toen besproken phasesprongen moesten ondergaan, bovendien elk

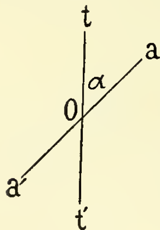


Fig. 4.

nog aan een metaalreflectie, die voor het viertal op identiek dezelfde wijze moge geschieden, dan zal dit voor elk der bundels een zelfden phasesprong β beteekenen. Door dezen laatsten wordt de waaier niet meer vervormd, daar hij in zijn geheel over een hoek β draait, aangezien immers alle punten P aan de nieuwe phaseverandering hebben deelgenomen. Wel zal bij een viertal bundels van andere frequentie de waaier over een anderen hoek β' gedraaid worden, doch waaiers voor verschillende frequenties opgemaakt, moeten toch niet vectorieel worden samengesteld, omdat twee verschillende lichtsoorten nooit kunnen interfereeren. Dus ook als samengesteld licht op het apparaat valt, zullen metaalreflecties voor de intensiteit zonder gevolg blijven, zoo elk der bundels deze een gelijk aantal keeren op identiek dezelfde wijze ondergaan; deze laatste eigenaardigheid treft men, om redenen van praktischen aard, in de gebruikelijke interferometers steeds aan. Hetzelfde geldt voor de phasesprongen, die bij totale reflecties plaats hebben.

6.

We moeten dus een instrument bedenken, waarin vooreerst de voorwaarde van identieke metaalreflecties en van identieke totale reflecties is vervuld, doch dat bovendien de eigenschap bezit, voor de eene helft belicht te worden door stralen, die, afgezien van metaal- en totaalreflecties geen of slechts phasesprongen van π hebben ondergaan, en voor de andere helft belicht te worden door stralen, die, afgezien van metaal- en totaalreflecties, nog eens extra aan een phasesprong α onderworpen zijn geweest, welke van π verschilt en onafhankelijk van het golvenaantal moet zijn; de stralen van de eerste en de tweede soort moeten bovendien coherent zijn om te kunnen interfereeren.

Vragen we ons nu af, over welke constante phasesprongen we tot nog toe de beschikking hebben, dan is het antwoord:

1°. een phasesprong van π bij reflecties tegen een dichtere middenstof,

2°. een phasesprong van π, zoo een evenwijdige lichtbundel wordt samengeknepen om door een brandpunt te passeeren [1]),

3°. een phasesprong van $\frac{\pi}{2}$ vooruit, zoo een evenwijdige bundel door een brandlijn moet gaan [1]).

De laatste twee sprongen hebben resp. in het brandpunt en de brandlijn plaats; alleen de laatste verschilt van π en hem alleen

---

[1]) Gouy, Ann. de Chimie et de Physique (6), 24. 1891.

kunnen we dus voor ons doel gebruiken. We zullen ons dus bedienen van twee cylinderlenzen, wier brandlijnen samenvallen; ze zijn in fig. 5 met de beschrijvende lijnen loodrecht op het vlak van de teekening gedacht en aan dezen stand zullen we ons bij alle volgende figuren houden. Lijnen, die boven of in het vlak van teekening gedacht worden, zullen voluit getrokken, terwijl lijnen, die er onder bedoeld zijn, gestippeld zullen worden. Stralen, die aan den bovenkant evenwijdig aan het teekenvlak loopen (b.v. a), kunnen door de cylinderlenzen nooit aan den onderkant gebracht worden, daar de lenzen geen brekend vermogen hebben in de richting hunner beschrijvende lijnen. Analoog voor stralen b onder en evenwijdig aan het teekenvlak. De cylinderlenzen zullen van dusdanige qualiteit moeten zijn, dat zij het interferentieverschijnsel niet verstoren.

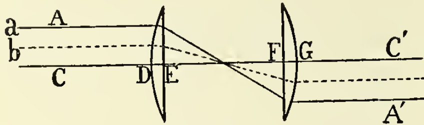


Fig. 5.

Het is niet mogelijk zonder meer dit stel cylinderlenzen in een der armen van den interferometer van Michelson te plaatsen, daar dan het licht het stelsel lenzen tweemaal doorloopt en de resulteerende phasesprong toch weer π wordt. Vergelijk fig. 6, waarin de vaste en de beweegbare spiegel de beide helften van het instrument zijn, bestaande resp. uit de punten P'' en P; het lenzensysteem ligt nu zoowel op den weg LP'' als op den weg $P''Q$ en we zagen, hoe phasesprongen in beide deelen van den lichtweg aequivalent zijn, zoo hun richting dezelfde is, b.v. als beide voorwaarts zijn gericht, als hier, waardoor zij zich dus tot π vereenigen. De interferometer van Michelson moet dus voor ons doel worden gewijzigd. Fig. 7 geeft aan, hoe dit kan geschieden.

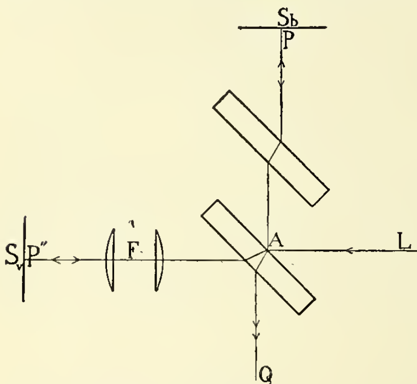


Fig. 6.

De spiegels van den interferometer van Michelson zijn vervangen door totaalreflecteerende prisma's, waardoor bereikt wordt, dat het licht slechts éénmaal door de lenzen gaat. Daar beide bundels precies dezelfde totale reflecties ondergaan, behoeven we de hierbij optredende phasesprongen niet in rekening te brengen. Voorziet men van den index r of d een straal, die uit een van de spleet S afkomstigen straal bij diens reflectie op de verzilverde glasplaat, resp. door reflectie of doorlaten is ontstaan, dan toont de figuur, hoe b.v. de gere-

flecteerde component $1r$ van een straal 1 onmiddellijk naast den doorge-

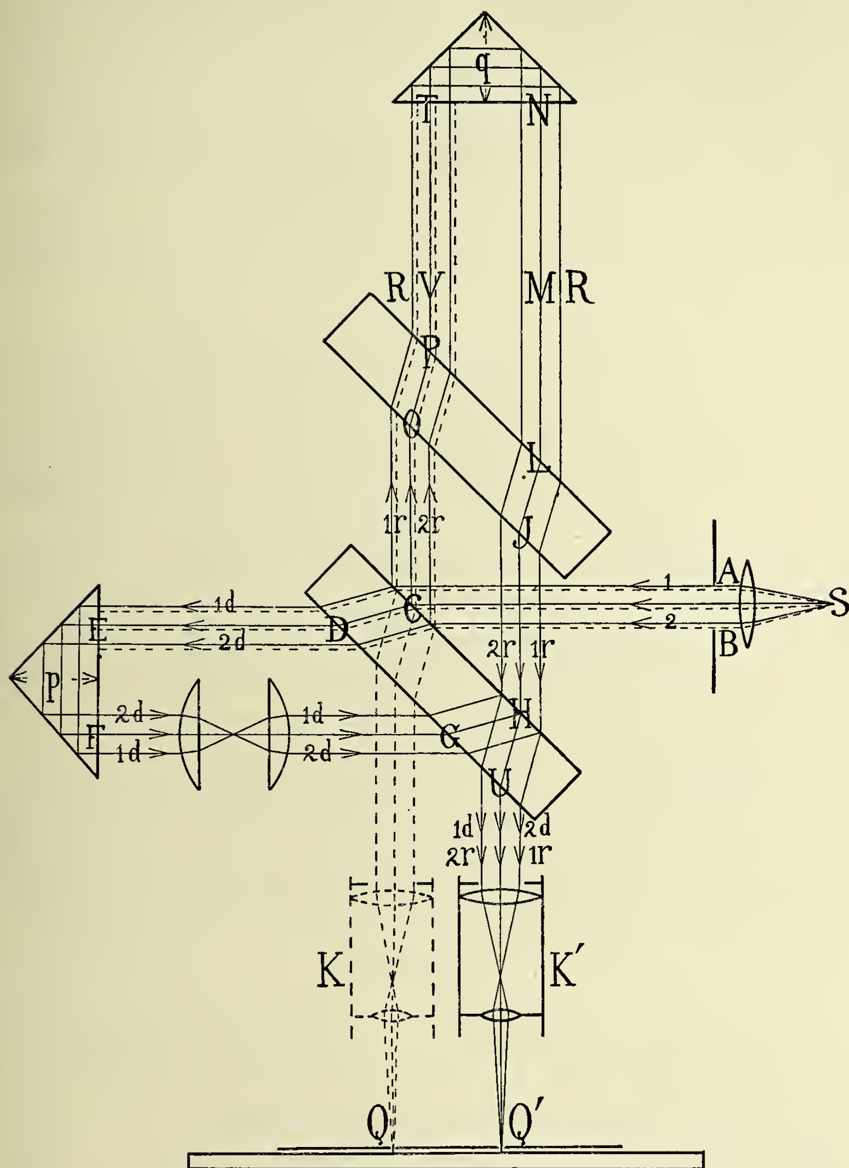


Fig. 7.

laten component $2d$ van een anderen straal 2 uit het apparaat treedt, zoo de stralen 1 en 2 van af de punten A en B in een zelfde horizontaal vlak zijn gelegen en SA en SB gelijke hoeken maken met den straal SC, die door de optische centra gaat. Daar de stralen 1 en 2 coherent zijn, kunnen b.v. de componenten $1r$ en $2d$ met elkaar interfereeren. De uittredende stralen kunnen dus paarsgewijze met elkaar interfereeren en daar de stralen, welke een dergelijk paar

vormen, onmiddellijk naast elkaar loopen, zal in het brandvlak van het objectief een scherp interferentiebeeld ontstaan. Dit wordt nu niet, zooals gewoonlijk, met het oculair als loupe bekeken, doch het oculair moet er een reëel vergroot beeld van vormen, dat buiten den kijker valt en waarvan alleen het centrale gedeelte door ons zal worden gebruikt. Al het licht, dat loodrecht op de prisma's is ingevallen, zal in één punt Q' worden samengebracht.

Om de intensiteit in het punt Q' te berekenen, is het geschikt een referentievlak RR in te voeren, dat door de volgende vergelijkingen wordt bepaald:

$$ED = CO + PV \quad , \quad FG = HJ + LM' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

met welke grootheden geometrische en geen optische lengten zijn bedoeld.

Ook de twee volgende opmerkingen zullen het berekenen van het phaseverschil tusschen de interfereerende bundels zeer vergemakkelijken:

1°. Zij de afstand van het voorvlak tot de overstaande ribbe gelijk p voor het vaste en gelijk q voor het beweegbare prisma, dan legt elke straal, zoo hij loodrecht op het voorvlak invalt, in het prisma een weg af van de lengte $2p$ of $2q$, al naar gelang dit in het vaste of in het beweegbare prisma geschiedt.

2°. Het lenzensysteem maakt van een vlakken golf weer een vlakken golf, zoodat in fig. 5 de optische afstand van A naar A' gelijk is aan dien van C naar C'. In fig. 7 zal het lenzensysteem het licht dus evenveel vertragen als een glasplaat van de dikte $2d$, als de dikte van iedere lens in het midden d bedraagt. Behalve deze vertraging veroorzaakt het lenzensysteem nog den phasesprong $\frac{\pi}{2}$ vooruit, die juist een versnelling beteekent. Het licht moet dus om van C over het vaste prisma naar U te komen, driemaal de glasplaat door, stel dus een weg 3δ in glas afleggen, verder de wegen van de volgende lengten in de bijvermelde media:

DE in lucht, $2p$ in glas, $(FG - 2d)$ in lucht, en $2d$ in glas.

Het licht, dat van C uit over het beweegbare prisma het punt U bereikt, moet ook driemaal een glasplaat door, dus weer een weg 3δ in glas afleggen en verder de volgende afstanden in de bijvermelde media: $(CO + PV)$ in lucht, VT in lucht, $2q$ in glas, NM in lucht, $(ML + JH)$ in lucht. Vergelijkt men den eersten weg met dezen laatsten, terwijl men gebruik kan maken van verg. (9), dan blijkt de weg in den tweeden (den verlengbaren) arm van den interferometer $2(q-p) + 2\,VT + 2d(1-\mu)$ langer te zijn dan die in den eersten.

Brengt men nu nog den voorwaartschen phasesprong $\frac{\pi}{2}$ bij het passeeren van de brandlijn in aanmerking (de weg wordt hierdoor schijnbaar verkort), dan wordt het phaseverschil der interfereerende stralen bij U: $4\pi\, VT + 4\pi\,(q - p + d - \mu d) + \frac{\pi}{2}$ of $4\pi\, l'm + \frac{\pi}{2}$ als men stelt:

$$p - q + (\mu - 1)\, d = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

en

$$VT - v = l' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

Ook tusschen de stralen $1r$ en $2d$ bestaat dit phaseverschil, hetgeen uit de figuur en uit de voorafgaande opmerkingen volgt.

De intensiteit voor samengesteld licht wordt nu, naar analogie met verg. (3):

$$J'(l') = 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m)\, dm + 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \cos\left(4\pi\, l'm + \frac{\pi}{2}\right) dm \quad \text{of}$$

$$J'(l') = 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m)\, dm - 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \sin 4\pi\, l'm\, dm \quad \text{of} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

$$J'(l') = 2\int_{-a}^{+a} \varphi(x)\, dx - 2 \sin 4\pi\, l'\overline{m}\; C(l') - 2 \cos 4\pi\, l'\overline{m}\; S(l') \quad . \qquad (13)$$

C en S komen niet meer voor in de combinatie van verg. (4). Dit is aan de cylinderlenzen te danken. J' zal voortaan de intensiteit zijn, gemeten in Q', dus met den gewijzigden, J die, behoorende bij den ongewijzigden interferometer. Ook tusschen l en l' zal een dergelijk onderscheid worden gemaakt: l heeft betrekking op den oorspronkelijken interferometer en is de afstand van den verschuifbaren spiegel tot het referentievlak; l' is een grootheid, die in den nieuwen interferometer den stand van het beweegbare prisma karakteriseert en de intensiteit beheerscht. Om nu C en S voor een gegeven waarde l_1 te berekenen uit verg. (4) en (13) zou men in den eenen interferometer den spiegel, in den anderen het prisma zoo moeten plaatsen, dat de grootheden l en l' beide de waarde l_1 verkrijgen. Dit zou praktisch onuitvoerbaar zijn, zoo men met de twee interferometers afzonderlijk werkte. We zullen ze dus tot één instrument trachten te vereenigen, waarin de grootheden l en l' beide optreden en van zelf reeds gelijk zijn. Dit lijkt me praktisch even onuitvoerbaar als het instellen van beide interferometers op éénzelfde waarde l_1 der parameters. Het is me echter gelukt door nog een

kleine verandering in den interferometer aan te brengen een combinatie der interferometers te ontwerpen, waarbij de grootheden l en l' uiteraard steeds eenzelfde bedrag verschillen, dat scherp te meten is. We zullen verder den weg aanwijzen, hoe dit verschil is te bepalen en daarna aantoonen, dat het constant zijn hiervan ons in staat stelt met dit instrument even gemakkelijk te werken en evenveel te bereiken als met de ideale combinatie der interferometers het geval zou zijn.

Men zou nl. uit den gewijzigden interferometer direct den oorspronkelijken terug krijgen, wanneer de voorvlakken der prisma's werden verzilverd. Beide instrumenten kunnen dus in één enkel worden vereenigd door van de voorvlakken der prisma's de bovenhelft doorzichtig te laten, maar de onderhelft te verzilveren. Laat de scheidingslijn van beide helften in het vlak van teekening liggen, dan worden de stralen, die boven dit vlak loopen en dus voluit zijn geteekend, totaal gereflecteerd en in een punt Q' vereenigd, zoo zij loodrecht op de prisma's invielen. Stralen, die onder het teekenvlak loopen en dus gestippeld zijn aangegeven, zullen door de verzilverde onderhelften worden teruggekaatst en door een anderen kijker K in een ander punt Q worden bijeengebracht, wanneer ook zij loodrecht op de prisma's invallen. Men heeft hier dus eigenlijk beide interferometers boven elkaar geplaatst, wat mogelijk was, dank zij de eigenschap der cylinderlenzen om nooit een straal, die boven en evenwijdig aan het teekenvlak loopt, hieronder te brengen. Stralen, die het teekenvlak snijden, zouden wel van het eene in het andere instrument kunnen overloopen, doch deze worden niet in de punten Q of Q' vereenigd en het zal blijken, dat we alleen in die punten de intensiteit hebben te meten. Ten overvloede kan men het voorvlak van elk prisma in drie zones verdeelen, de bovenste doorzichtig, de middelste absorbeerend en de onderste verzilverd, waardoor als het ware een ruimte tusschen beide interferometers ontstaat, afhangende van de hoogte der middelste zone. De bovenste en onderste zones moeten groot blijven, daar al het hierop loodrecht invallende licht in de punten Q en Q' wordt geconcentreerd en we in deze punten een sterk geprononceerd intensiteitsverloop willen hebben, als straks het beweegbare prisma wordt verschoven [1]).

We zagen reeds, dat de intensiteit in het punt Q' bepaald werd

[1]) Desnoods denke men zich lange prisma's en met behulp van spiegels twee beelden van S gemaakt, het eene boven het teekenvlak gelegen en dienende voor de verlichting der bovenste zones, het andere beneden het vlak gelegen en de onderste zones verlichtende.

door verg. (12) of (13). De intensiteit in het punt Q wordt door verg. (4) weergegeven, waarin l de afstand van den beweegbaren spiegel tot het referentievlak was en waarvoor dus VT van fig. 7 moet genomen worden. We zullen de lengte van VT dus l noemen. Resumeerende vinden we dus in Q' en Q resp. de intensiteiten:

$$\left.\begin{aligned} J\,(l') &= 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m)\,dm - 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m)\,\sin 4\pi\, l'm\,dm \\ J\,(l) &= 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m)\,dm + 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m)\,\cos 4\pi\, lm\,dm \\ &\text{waarbij } l' = l - v \text{ als } v = p - q + (\mu - 1)\,d \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Een diafragma met twee fijne gaatjes op de plaats der punten Q en Q' laat twee bundeltjes licht van bovengenoemde intensiteit vallen op een fotografische plaat. Gaat men het beweegbare prisma langzaam verschuiven, dan veranderen de intensiteiten dier bundeltjes wegens het veranderen van de parameters l en l' in (14). Het verschil l—l' blijft echter constant, nl. gelijk v, welke grootheid blijkens (10) een instrument-constante is. Wordt de fotografische plaat bij een geringe beweging van het prisma door een koppeling over groote afstanden in zijn eigen vlak verschoven en zorgt men, dat de verschuiving van de plaat steeds evenredig is aan die van het prisma en voorts, dat de verschuiving van het prisma steeds met eenparige snelheid[1]) geschiedt, dan zullen de twee lichtbundeltjes op de fotografische plaat twee strepen achterlaten, waar de zwarting punt voor punt anders is, en die, zoo ze naderhand met den photometer en thermozuil van Dr. MOLL photometrisch worden uitgemeten, ons twee krommen geven, die van groot belang zullen zijn voor de bepaling van de gewenschte functie $\varphi(x)$.

We zullen de krommen, die bij het uitmeten der strepen ontstaan zijn, $Z(cl)$ of $Z'(cl')$ noemen, al naar gelang haar ordinaten het verloop der zwarting aangeven in de onderste of de bovenste streep, die dus in Q of in Q' is gemaakt. Geeft $\frac{1}{c}$ de verhouding aan van de verschuiving van het prisma en de hiermee correspondeerende van de fotografische plaat en neemt men in de bovenste streep dat punt als nulpunt N aan, hetwelk zich in Q bevond, toen het prisma door den stand $l = 0$ heenging, dan zal op die streep in een punt, welks abscis cl bedraagt, gemeten van dat nulpunt af, licht zijn

[1]) Om den belichtingstijd bij elken stand van het prisma hetzelfde te houden.

gevallen, welks intensiteit bij den stand l van het prisma behoort en dus door verg. (4) wordt aangegeven. De zwarting is hiermee evenredig; wanneer f dus een evenredigheidsfactor is, zal voor de onderste streep gelden:

$$J(l) = f\,Z(cl) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Analoog

$$J'(l') = f\,Z'(cl') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

voor de bovenste streep, als hierop als nulpunt N' dat punt gekozen wordt, dat in Q' was, toen het prisma door den stand $l' = 0$ heen ging, dus toen $l = v$ was volgens (14), of $VT = v$ (fig. 7).

De verg. (14) gaan nu over in:

$$f\,Z(cl) = 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m)\,dm + 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \cos 4\pi\, lm\, dm \quad \ldots \quad (17)$$

$$f\,Z'(cl') = 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m)\,dm - 2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \sin 4\pi\, l'm\, dm \quad \ldots \quad (18)$$

De functies fZ en fZ' schommelen bij het vergrooten van l en l' om dezelfde constante waarde: $2\int_{m_2}^{m_1}\chi(m)dm$; zij zullen hiertoe asymptotisch naderen, want voor groote waarden van l en l' worden $\int_{m_2}^{m_1}\chi(m)\cos 4\pi\, lmdm$ en $\int_{m_2}^{m_1}\chi(m)\sin 4\pi\, l'mdm$ nul, wegens het voortdurend omslaan van het teeken van den cos. of den sinus, zelfs wanneer men slechts over een klein interval naar m heeft te integreeren.

Volgens verg. (17) zal de ordinaat Z het grootste maximum bereiken voor $l = 0$. Deze kan men uit het verloop der Z kromme scherp bepalen, zoo men met veelkleurig licht te doen heeft. Het voetpunt dezer ordinaat is het nulpunt N. Deze bewerking komt overeen met het instellen op het witte punt bij den interferometer van MICHELSON, wanneer men wit licht gebruikt en den beweegbaren spiegel met het referentievlak wil laten samen vallen. Het instellen kan uiteraard veel juister grafisch dan visueel geschieden.

Daar $f\,Z_{max.} = 4\int_{m_2}^{m_1}\chi(m)dm$, volgt uit de verg. (17) en (18):

$$2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \cos 4\pi\, lm\, dm = f\,Z(cl) - \tfrac{1}{2} f\,Z_{max.} \quad \ldots \quad (19)$$

$$2\int_{m}^{m_1}\chi(m)\sin 4\pi l'm\,dm = -fZ'(cl') + \tfrac{1}{2}fZ_{max.} \quad . \quad . \quad (20)$$

$Z_{max.}$ is hierin de gemeten ordinaat van het hoogste punt der Z kromme; het voetpunt van die ordinaat was het nulpunt N, van waaruit cl dus moet gemeten worden langs de abscissenas der Z kromme. Trekt men nu een lijn evenwijdig aan deze as en op een afstand $\frac{1}{2}Z_{max.}$ hiervan verwijderd, dan zullen er van de ordinaten stukken overblijven, wier lengte weer een functie van cl zal zijn, welke functie we $I(cl)$ zullen noemen.

Dus volgens (19) en (20) is nu:

$$I(cl) = Z(cl) - \tfrac{1}{2}Z_{max.} = \frac{2}{f}\int_{m_2}^{m_1}\chi(m)\cos 4\pi lm\,dm \quad . \quad . \quad (21)$$

Trekt men dezelfde lijn door de Z' kromme, dan zullen de overblijvende stukken der ordinaten een functie $II(cl')$ afbeelden, zoodat

$$II(cl') = Z'(cl') - \tfrac{1}{2}Z_{max.} = -\frac{2}{f}\int_{m_2}^{m_1}\chi(m)\sin 4\pi l'm\,dm. \quad . \quad (22)$$

Het nulpunt N' op de abscissenas der Z' kromme kan men bepalen door de volgende overweging. De functie $II(cl')$ is nul voor $l' = 0$, doch heeft meerdere nulpunten, zoodat men nog niet weet, welke hiervan als N' te nemen is; uit verg. (22) blijkt echter, dat de functie oneven is in l'. Bepaalt men dus van de functie II het nulpunt, t. o. z. waarvan de andere nulpunten symmetrisch liggen, dan heeft men het punt $cl' = 0$, dus het nulpunt N' op de abscissenas gevonden. Dit is nu het nulpunt, van waaruit cl' op de as der Z' kromme moet worden gemeten. Vooral bij veelkleurig licht zal deze symmetrie sterk in het oog vallen. De redeneering sluit in, dat men ook bij negatieve waarden van l' moet hebben waargenomen, d. w. z. dat men moet beginnen met het beweegbare prisma iets dichter bij te zetten, dan met $l' = 0$ dus met $l = v$, of $VT = v$ zou correspondeeren. Begint men dus met het prisma nog vóór het referentievlak R te plaatsen en het van hieruit met eenparige snelheid te verschuiven, dan begint men zoowel bij een negatieve waarde van l als van l', zoodat de beginpunten der strepen negatieve abscissen hebben.

Terloops merken we op, dat de grootheid v nauwkeurig bepaald kan worden uit de ligging der nulpunten N en N'.

De fotografische plaat werd n.l. elk oogenblik door twee lichtbundels getroffen, wier intensiteiten van twee parameters l en l'

afhingen, terwijl het verschil dier parameters, zoo ze op hetzelfde oogenblik betrekking hebben, constant is, nl. $= v$. Voor punten der Z en Z' krommen, die aldus gelijktijdig ontstaan zijn, zullen de abscissen cl en cl' dus steeds evenveel, n.l. cv, verschillen.

De beginpunten der krommen zijn dergelijk gelijktijdig ontstane punten [1]; men heeft dus slechts hun abscissen te meten, genomen tot de gevonden nulpunten op de assen en het verschil hiervan te nemen om cv te vinden [2].

Kiest men nu in de grafisch gevonden functies I en II de variabelen gelijk, d. w. z. past men van af de punten N en N' gelijke stukken cl en cl' af op de assen (onafhankelijk dus van de vroegere beteekenis van l en l'), dan vindt men uit verg. (21) en (22):

$$2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \cos 4\pi lm\, dm = fI\,(cl) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$2\int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \sin 4\pi lm\, dm = -fII(cl) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Onze bedoeling was oorspronkelijk $C(l)$ en $S(l)$ uit verg. (4) en (13) op te lossen en te substitueeren in (7). Dit zou neerkomen op het invoeren van $C(l)$ en $S(l)$ in verg. (23) en (24), om ze hieruit te bepalen en dan te substitueeren in verg. (7). Hetzelfde resultaat, de formule voor $\varphi(x)$, kan nu wel vlugger bereikt worden door te bedenken, dat volgens de integraalstelling van FOURIER:

$$\varphi(x) = \chi(m) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos am\, da \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\xi) \cos \xi a\, d\xi + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin am\, da \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\xi) \sin \xi a\, da.$$

Men kan nu voor ξ kiezen m en $a = 4\pi l$ stellen en bedenkt men nog, dat $\chi(m) = 0$ is voor $m_1 < m < m_2$, dan gaat de vergelijking over in:

$$\chi(m) = 4\int_0^\infty \cos 4\pi lm\, dl \int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \cos 4\pi lm\, dm + 4\int_0^\infty \sin 4\pi lm\, dl \int_{m_2}^{m_1} \chi(m) \sin 4\pi lm\, dm.$$

Gebruik makende van verg. (23) en (24) kan men deze vervangen door

$$\chi(m) = 2f\int_0^\infty I\,(cl) \cos 4\pi lm\, dl - 2f\int_0^\infty II\,(cl) \sin 4\pi lm\, dl.$$

[1] Men kan ook het licht plotseling even onderscheppen.

[2] Had men achter het lenzensysteem nog een glasplaat van de dikte x geplaatst, dan zou $v = p - q + (\mu - 1)(d + x)$. In het meten van v ligt dus een verscherpte methode opgesloten tot het bepalen van de dikte eener glasplaat, al is deze vrij dik.

Daar het ons slechts om den vorm der kromme χ te doen is, kan men $2f = 1$ stellen, waardoor overblijft:

$$\chi(m) = \int_0^\infty I(cl) \cos 4\pi\, lm\, dl - \int_0^\infty II(cl) \sin 4\pi\, lm\, dl \quad . \quad . \quad (25)$$

$I(cl)$ en $II(cl)$ zijn hierin geregistreerde functies, die volgens verg. (21) en (22) voor groote waarden van l nul zijn. Wil men de fijnere structuur van praktisch monochromatisch licht onderzoeken, dan moeten de Z en Z' krommen eerst voor wit licht worden opgenomen. Hieruit toch volgt scherp de afstand der nulpunten N en N' tot de beginpunten der krommen. Het prisma wordt nu weer op dezelfde plaats gebracht als zooeven bij het begin der meting [1]) en op een andere fotografische plaat worden nu de Z en Z' krommen voor het minder samengestelde licht geregistreerd; de nulpunten N en N' liggen nu op dezelfde afstanden van de beginpunten als zooeven; zij zouden zonder de vorige meting echter moeilijk te herkennen zijn geweest; bij absoluut monochromatisch licht zou er zelfs in het geheel geen verschil tusschen de maxima of tusschen de nulpunten zijn te bespeuren geweest.

Door het witte licht echter is de fotografische plaat als het ware geijkt. Het bekend zijn der nulpunten maakt zelfs bij het meest enkelvoudige licht een handelwijze, als boven beschreven werd, mogelijk en stelt ons ook hier in staat de gewenschte functie $\chi(m)$ theoretisch althans exact te benaderen. In de praktijk kan deze benadering niet tot het uiterste worden doorgevoerd, daar bij te hooge gangverschillen de lichtbundels incoherent worden wegens het onregelmatig trillen van de lichtbron, een bezwaar, dat elke methode, die op interferentie berust, zal aankleven.

Deze grens voor het oplossend vermogen eener interferentiaal-spectroscoop kan natuurlijk ook hier niet worden overschreden. Doch alle gegevens, die interferentie-verschijnselen ons kunnen verschaffen omtrent de samenstelling van schijnbaar monochromatisch licht worden volgens de besproken methode mathematisch op de eenvoudigste wijze verwerkt en leiden tot het opbouwen eener functie, die de gezochte energieverdeeling $\varphi(x)$ het dichtst nabij komt [2]).

Michelson verwerkt zijn gegevens eerst tot een zichtbaarheids-kromme V en besluit hieruit tot de waarde van $C^2 + S^2$, maar moet

[1]) Hierbij kan men bv. gebruik maken van de duidelijke beweging van de fotografische plaat.

[2]) Om de benadering nog nauwkeuriger te maken, zou men òf de lichtbron regelmatiger moeten doen trillen, òf een geheel ander instrument moeten bezitten, dat niet op interferentie berust en welks oplossend vermogen zelfs dat van de interferentiaal spectroscoop overtreft.

nu $S = 0$, d.w.z. een symmetrische energieverdeeling, aannemen om verder te kunnen komen. Hij verkrijgt dan[1]) $C(l) = P \times V(l)$ en zal uit verg. (7) dus vinden:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= 4P \int_0^\infty V(l) \cos 4\pi\, lx\, dl \\ \text{waarin} \quad P &= \int_{-a}^{+a} \varphi(x)\, dx \text{ dus een constante is.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Wij behoeven deze hypothese niet te maken; daarin ligt juist de groote beteekenis der methode. Leggen we ons die beperking toch even op, dan zullen wij vinden, dat de krommen I en II onderling afhankelijk worden. Volgens verg. (23) en (24) is n.l.

$$2 \cos 4\pi\, l\overline{m}\, C(l) - 2 \sin 4\pi\, l\overline{m}\, S(l) = fI(cl)$$

$$2 \sin 4\pi\, l\overline{m}\, C(l) + 2 \cos 4\pi\, l\overline{m}\, S(l) = -fII(cl)$$

zoodat $S = 0$ leiden zou tot:

$$-II(cl) = tg\, 4\pi\, l\overline{m} \times I(cl).\ ^{2})$$

Verder was de grootheid V een moeilijk te schatten grootheid, die eigenlijk alleen uit fotometrische waarnemingen kan worden bepaald; uit haar ingewikkelde definitie $V = \dfrac{J_{max.} - J_{min.}}{J_{max.} + J_{min.}}$ blijkt, dat zij niet continu verloopt en dus nooit zal zijn te registreeren, doch punt voor punt moet worden bepaald. Verg. (26), berustende op de zichtbaarheidskromme van Michelson, geldt dus alleen voor een symmetrische energieverdeeling, is zelfs in dit geval nog niet exact, terwijl de V kromme moeilijk en slechts zeer vaag is te verkrijgen.

Resumeerende komen we dan tot de slotsom, dat we in de besproken opstelling een middel hebben gevonden om de energieverdeeling, zoowel over een eng als over een uitgestrekt spectraal gebied af te lezen uit twee registreerbare krommen, onverschillig of de energieverdeeling een symmetrische of een asymmetrische functie

[1]) Na eenige verwaarloozingen, vermeld in noot 2.

[2]) Dit substitueerende in verg. (25), zou men $\varphi(x)$ alleen met behulp van de kromme I hebben uitgedrukt en in dit speciale geval de cylinderlenzen dus schijnbaar niet noodig hebben gehad; doch om m te kennen moet men II minstens voor één waarde van cl kennen; dus zelfs in dit eenvoudige geval is het gebruik der cylinderlenzen nog onvermijdelijk, als men mathematisch streng te werk wil gaan. Michelson heeft ter bepaling van $J_{max} - J_{min}$ bij het differentieeren naar l $C(l)$ en $S(l)$ als constanten beschouwd; ook vindt men bij $S = 0$ $C(l) = P \times V(l)$ alleen voor die waarden van l, welke voldoen aan $S(l) = -tg\, 4\pi\, lm \times C(l)$, dus wel voor oneindig veel, maar niet voor continu oneindig veel waarden van l, hetgeen de mathesis toch eischen zou om verg. (26) te laten volgen uit verg. (7).

is; in het eerste geval zijn de geregistreerde krommen afhankelijk, in het tweede geval onafhankelijk van elkaar.

Het dient opgemerkt te worden, dat de metaalreflecties in het instrument van fig. 7 niet identiek dezelfde zijn. De r component is tegen het zilverlaagje gekaatst onder een hoek van 45° in lucht, en de d component onder een kleineren hoek in glas. Vermoedelijk zullen de hierbij optredende phasesprongen wel dezelfde zijn, anders kon MICHELSON verg. (4) niet hebben opgesteld. Mocht deze onderstelling onjuist zijn, dan geeft fig. 8 een opstelling aan, waarin dit euvel verholpen is; de zilverlaagjes bij Z en Z' worden nu alleen onder een hoek van 45° getroffen. De voorvlakken der prisma's moeten nu zoowel boven als beneden doorzichtig zijn, en de cylinderlenzen moeten boven het vlak van teekening staan. De verzilvering in Z (fig. 8) en in C (fig. 7) moet van dien aard zijn, dat de lichtsterkten der in den kijker tredende bundels gelijk zijn, niettegenstaande de een reflecties in de lenzen heeft ondergaan. Met behulp van een glasplaat G kan men de intensiteiten gelijk houden. Verschillen de intensiteiten der bundels in den gewijzigden interferometer van die in den oorspronkelijken, dan moet in verg. (25) een der termen van een evenredigheidsfactor voorzien worden, die experimenteel eerst is te bepalen.

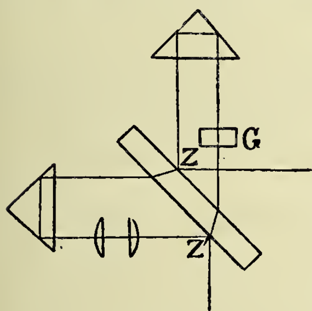


Fig. 8.

Angstvallig hebben we er voor gezorgd, dat de interfereerende bundels geen relatieven phasesprong t. o. z. van elkander kregen door ongelijke metallieke of totale reflecties, zoodat de phasesprong, dien de eene bundel op den anderen vóórkrijgt, alleen verkregen is in de brandlijn der cylinderlenzen $\left(\text{groot } \frac{\pi}{2}\right)$ en dus niet van de golflengte afhangt. Hierdoor wordt het instrument bruikbaar voor alle mogelijke lichtsoorten en voor spectraalgebieden van willekeurige grootte, gesteld dat de lenzen achromatisch zijn gemaakt.[1]) Het resultaat der methode, uitgedrukt in verg. (25), is dus volkomen exact voor alle mogelijke spectraalgebieden en energieverdeelingen, zoo men den phasesprong $\frac{\pi}{2}$ slechts met behulp van cylinderlenzen teweegbrengt.

[1]) Opdat in fig. 7 de photografische plaat QQ' eens voor altijd kan worden ingesteld. Eventueele dispersie zou den constanten phasesprong $\frac{\pi}{2}$ ook niet beïnvloeden!

Is men tevreden met een benaderende methode, die alleen exact is voor een praktisch monochromatischen bundel, en wel voor een van één bepaalde frequentie, dan kan men den phasesprong $\frac{\pi}{2}$ wel zonder cylinderlenzen bereiken, n.l. met behulp van een scheefhoekig parallelepipedum, waarin het licht totaal wordt gereflecteerd. Men kan nu met den ongewijzigden interferometer van Michelson werken (men heeft het paralellepipedum slechts in een der armen te zetten en een rechthoekig in den anderen; fig. 9), maar moet nu met licht werken, dat van te voren òf in òf loodrecht op het teekenvlak is gepolariseerd. Voor Natriumlicht b.v., welks trillingsrichting loodrecht op het teekenvlak staat, moet $\angle \varphi = 51°20'21''$ zijn; dan bedragen de 4 phasesprongen n.l. te zamen $\frac{3\pi}{2}$ [1]). Echter hangt φ niet zoo sterk van de golflengte af, dan dat hetzelfde paralellepipedum ook niet voor naburige spectraallijnen zou zijn te gebruiken. Na eenige berekeningen vindt men nl. $\cos 2\varphi = \frac{\pm (n^2 - 1) \cos 67\frac{1}{2}° - 1}{n^2}$, waarin n de brekingsindex is.

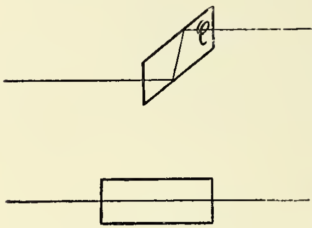


Fig. 9.

Tenslotte betuig ik Prof. Ornstein en Prof. Julius hartelijk dank voor hun wenken en belangstelling, bij dit onderzoek ondervonden. Het onderzoek, dat Prof. Ornstein mij oorspronkelijk opdroeg, was de eerste stap op den weg, waarlangs ik tenslotte den kunstgreep gevonden heb, die in staat zou blijken te zijn het vraagstuk theoretisch volkomen op te lossen.

Ik heb den logischen gedachtengang, die hiertoe geleid heeft, ook in de mededeeling gevolgd, omdat dan vanzelf door de beschouwingen over de vier puntengroepen P, P', P'', P''' als tweede stelling bewezen kon worden, dat de gezochte energieverdeeling door geen der gebruikelijke instrumenten kan bepaald worden, hoe men de hiermee gedane waarnemingen ook combineert. De phasesprong, onafhankelijk van de golflengte en verschillende van π, was dus niet alleen een mogelijke, doch ook een noodzakelijke kunstgreep om tot het gestelde doel te komen.

Instituut voor Theoretische Natuurkunde.

Utrecht, Mei 1919.

[1]) Voor $\frac{\pi}{2}$ zou het paralellepipedum een onbruikbaren vorm krijgen; brekingsindex = 1,5153 voor licht crownglas.

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt mede namens den Heer A. L. TH. MOESVELD eene mededeeling aan over: *„De invloed van druk op de oplosbaarheid van stoffen".* VI.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan over: *„Verdere proeven met vloeibaar helium.* O. *Een nieuw geval van suprageleiding, Thallium, enz."*

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan over: *„Verbetering van de cascade voor het verkrijgen van lage temperaturen".*

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt een mededeeling aan van de Heeren P. E. VERKADE en N. L. SÖHNGEN over: *„De aantasting van cis-transisomere onverzadigde zuren door schimmels".*

(Deze mededeelingen zullen in een volgend Zittingsverslag worden opgenomen).

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer J. BOEKE, namens den Heer ERIK AGDUHR te Stockholm, aangeboden het manuscript van diens verhandeling: *„Sympathetic innervation of the muscles of the extremities, A histo-experimental study."*

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren J. BOEKE en J. W. VAN WIJHE met verzoek om rapport, uit te brengen in een volgende vergadering.

De Heer F. M. JAEGER biedt voor de boekerij ten geschenke aan een exemplaar van zijn *„Historische studiën. Bijdragen tot de kennis van de geschiedenis der natuurwetenschappen in de Nederlanden gedurende de* 16^e^ *en* 17^e^ *eeuw."*

De vergadering wordt gesloten.

---

31 October 1919.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 28 JUNI 1919.

DEEL XXVIII.

N°. 2.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Van de Heeren W. H. Julius, W. de Sitter en Eug. Dubois dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Schrijven namens het „Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen" te Middelburg met bericht dat dit Genootschap op 9 Juli a. s. zijn 150-jarig bestaan zal herdenken en eene uitnoodiging aan de Akademie om zich bij die gelegenheid te doen vertegenwoordigen.

De Voorzitter zegt, naar aanleiding hiervan, dat, mocht geen der leden van de Akademie gelegenheid kunnen vinden om zich voor vertegenwoordiging beschikbaar te stellen, het Bestuur door een schriftelijken gelukwensch namens de Akademie uiting zal geven van hare belangstelling.

3°. Schrijven namens de „Royal Society" te Londen, waarin de huidige stand van zaken van den onder de auspiciën van dit Genootschap samengestelden en uitgegeven „*International Catalogue of scientific Literature*" wordt uiteengezet en het advies ook van onze Akademie gevraagd wordt over de wenschelijkheid van eene voortzetting dezer onderneming, welke slechts met bijzonderen geldelijken steun van alle belanghebbenden mogelijk zal zijn.

De Voorzitter wenscht dit schrijven te stellen in handen van de leden der Afdeeling, die de permanente Commissie voor de aangelegenheden van dezen Catalogus vormen, met verzoek om praeadvies, uit te brengen in een volgende vergadering.

Anatomie. — Verslag over de verhandeling van Dr. ERIK AGDUHR te Stockholm: „*Sympathetic innervation of the muscles of the extremities. A histo-experimental study.*"

In de bovengenoemde verhandeling beschrijft Dr. AGDUHR op uitvoerige en duidelijke wijze de resultaten van zijn experimenten, waarbij òf een aantal spinale zenuwwortels werden doorsneden met behoud van de sympathische grensstreng-elementen en rami communicantes òf wel juist die sympathische elementen (ganglion stellatum) werden geexstirpeerd met behoud van de spinale elementen. Daarna werden, volgens door den schrijver uitgewerkte modificaties der BIELSCHOWSKY-methode, de zenuweindigingen op de spiervezelen der door die bepaalde zenuwen geinnerveerde spieren gekleurd en de degeneratie-verschijnselen dier zenuweindigingen nagegaan.

De uitkomsten dezer onderzoekingen worden op duidelijke en heldere wijze uiteengezet, de behandeling wijst op een juiste inrichting der proefnemingen, de illustraties geven blijk van zeer natuurgetrouwe afbeeldingen te zijn van voortreffelijke preparaten. Ondergeteekenden meenen dus zonder voorbehoud te kunnen adviseeren tot het opnemen van dit geschrift in de Verhandelingen der Akademie. Slechts zal het Engelsch een goede correctie behoeven.

(get.) J. BOEKE.
„ J. W. VAN WIJHE.

De vergadering vereenigt zich met de conclusie van het verslag om de Verhandeling in de Werken der Akademie op te nemen.

Aan den Heer AGDUHR zal hiervan kennis gegeven worden.

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan: *„Opmerking over meervoudige integralen".*

Het doel van deze mededeeling is, in aansluiting aan het eerste gedeelte van mijn in de vergadering van 26 Mei 1906 aangeboden opstel: *„Meerdimensionale vectordistributies"* [1]) een tweetal opmerkingen te maken.

§ 1.

I. Het l. c. p. 15—18 gegeven bewijs der veralgemeening van het theorema van STOKES levert deze veralgemeening niet alleen in haar Euclidischen, doch ook in haar als volgt luidenden ametrischen vorm:

THEOREMA. *Zij gegeven in de n-dimensionale ruimte* $(x_1, \ldots x_n)$ *de* $(p-1)$*-voudige integraal*

$$\int \Sigma F_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} (x_1, \ldots x_n)\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin de F's continu en eindig en continu differentieerbaar zijn; beschouwen we hiernaast de p-voudige integraal

$$\int \Sigma f_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (x_1, \ldots x_n)\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin

$$f_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\partial F_{j_\nu}}{\partial x_{\alpha_\nu}}$$

(indicatrix $j_\nu \alpha$ *aeq. indicatrix* $\alpha_1 \ldots \alpha_p$*),*

dan is, als het tweezijdige p-dimensionale fragment [2]) *G begrensd wordt door de tweezijdige* $(p-1)$*-dimensionale gesloten ruimte g, de indicatrices van G en g bij elkander behooren en zoowel G als g een continu varieerende vlakke raakvariëteit bezitten, de waarde van* (1) *over g gelijk aan de waarde van* (2) *over G.*

Van dit theorema, dat reeds in 1899 zonder bewijs en in een de teekenwet minder eenvoudig tot uitdrukking brengenden vorm was

---

[1]) Zie deel XV, p. 14—26; de definities rekenen we gewijzigd overeenkomstig l. c. p. 76, noot [1]). Ik maak van deze gelegenheid gebruik, om er op te wijzen, dat l. c. p. 25 r. 8 in plaats van „stelsel eindige gesloten stroomen" gelezen moet worden „eindig bronloos stroomstelsel".

[2]) Math. Annalen 71, p. 306.

uitgesproken door POINCARÉ [1]), zal ik hier het bewijs opnieuw geven en daarbij eenigszins scherper redigeeren, dan in mijn geciteerd opstel.

II. Zij in de n-dimensionale ruimte $(x_1, \ldots x_n)$, die we door S zullen voorstellen, gegeven de p-voudige integraal

$$\int \Sigma \, \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (x_1, \ldots x_n) \, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p} \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin de φ's continu zijn. Zij Q een in S gelegen, van een indicatrix voorzien tweezijdig p-dimensionaal netfragment [2]), σ een grondsimplex van Q met de hoekpuntenindicatrix $A_1 A_2 \ldots A_p A_{p+1}$, A een willekeurig punt van σ, ${}_A\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ de waarde van $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ in A, ${}_\nu x_\mu$ de waarde van x_μ in A_ν. We bepalen voor elke σ de waarde van

$${}_\sigma\varphi \equiv \Sigma \; {}_A\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \cdot {}_\sigma i_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \,,$$

waarin

$${}_\sigma i_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \equiv \frac{1}{p\,!} \begin{vmatrix} {}_1x_{\alpha_1} & \ldots & {}_{p+1}x_{\alpha_1} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ {}_1x_{\alpha_p} & \ldots & {}_{p+1}x_{\alpha_p} \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \,,$$

en waarin A voor de verschillende termen onder het Σ-teeken verschillend gekozen mag zijn, en sommeeren ${}_\sigma\varphi$ over de verschillende grondsimplexen van Q. De bovenste en de onderste grens, waartusschen deze laatste som tengevolge van de vrije keuze der punten A varieert, noemen we *de bovenste en de onderste waarde van* (3) *over* Q.

Onderwerpen we Q aan een fundamentaalreeks van zich onbepaald verdichtende simpliciale verdeelingen, die aanleiding geven tot een fundamentaalreeks Q', Q'', ... van Q overdekkende netfragmenten, dan convergeeren voor onbepaald toenemende ν de bovenste en de onderste waarde van (3) over $Q^{(\nu)}$ tot dezelfde grens, die we *de waarde van* (3) *over* Q noemen.

Zij F een in S gelegen, van een indicatrix voorzien tweezijdig p-dimensionaal fragment, f een bij een categorie ψ van simpliciale

---

[1]) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste III, p. 10. De beteekenis der hier geformuleerde teekenwet wordt eerst duidelijk na vergelijking der vroegere publicaties uit de Acta Mathematica en het Journal de l'École Polytechnique, waarin de aequivalentie van het identiek wegvallen van (2) en het wegvallen van (1) over iedere g was uitgesproken.

[2]) Math. Annalen 71, p. 316.

verdeelingen behoorende fundamentaalreeks van zich onbepaald verdichtende simpliciale approximeeringen P', P'', ... van F. Indien de waarden van (3) over P', P'', ... tot een van de kenze van f binnen de door ψ gestelde grenzen onafhankelijke limiet convergeeren, noemen we deze limiet *de waarde van* (3) *over* F *voor* ψ.

III. We gaan ons nu bezighouden met de waarde van (1) over de begrenzing β van een in S gelegen, van een indicatrix voorzien p-dimensionaal simplex σ en rekenen daarbij, dat de indicatrices van β en σ *bij elkander behooren*, d. w. z. dat de indicatrix van een willekeurige (p—1)-dimensionale zijde van σ wordt verkregen, door het niet tot deze zijde behoorende hoekpunt van σ in de indicatrix van σ achteraan te plaatsen en vervolgens weg te laten. We beginnen met ons te beperken tot de door den enkelen term

$$\int F_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$$

tot de waarde van (1) over β geleverde bijdrage. Door een passende simpliciale verdeeling ζ van de variëteit $(x_{\alpha_1}, \ldots x_{\alpha_{p-1}})$ bepalen we een simpliciale verdeeling van β, van wier grondsimplexen telkens twee bij hetzelfde waardegebied van $(x_{\alpha_1}, \ldots x_{\alpha_{p-1}})$ behooren. De schaar der $(n-p+1)$-dimensionale variëteiten, waarbinnen $x_{\alpha_1}, \ldots x_{\alpha_{p-1}}$ constant zijn, snijdt de vlakke p-dimensionale variëteit, waarin σ bevat is, volgens een schaar van rechte lijnen, die de paren van correspondeerende grondsimplexen van β tot p-dimensionale afgeknotte simpliciale prisma's verbinden. Zijn e_1 en e_2 een paar correspondeerende grondsimplexen van β, d het bijbehoorende afgeknotte simpliciale prisma, l een van een punt van e_1 naar het correspondeerende punt van e_2 voerend lijnsegment met de ontbondenen $r_{\alpha_p}, \ldots r_{\alpha_n}$, dan wordt de door den term $\int F_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$ tot de waarde van (1) over e_1 en e_2 geleverde bijdrage

$$- {}_{e_1}i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} \cdot \sum_{\nu=p}^{n} r_{\alpha_\nu} \cdot {}_A\left\{\frac{\partial F_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_\nu}}\right\} + \varepsilon,$$

waarin A een (voor de verschillende termen onder het Σ-teeken eventueel verschillend) punt van σ voorstelt en ε bij onbepaalde verdichting van ζ onbepaald klein wordt ten opzichte van ${}_{e_1}i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}$.

Zij nu echter $B_1 B_2 \ldots B_p$ een hoekpuntenindicatrix van e_1 en ${}_\nu x_\mu$ de waarde van x_μ in B_ν, dan kan de waarde van $r_{\alpha_\nu} \cdot {}_{e_1}i_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}$ worden voorgesteld door

$$\frac{1}{(p-1)!}\begin{vmatrix} {}_1x_{\alpha_1}-{}_px_{\alpha_1} & \cdots\cdots & {}_{p-1}x_{\alpha_1}-{}_px_{\alpha_1} & 0 \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot \\ {}_1x_{\alpha_{p-1}}-{}_px_{\alpha_{p-1}} & \cdots & {}_{p-1}x_{\alpha_{p-1}}-{}_px_{\alpha_{p-1}} & 0 \\ {}_1x_{\alpha_\nu}-{}_px_{\alpha_\nu} & \cdots\cdots & {}_{p-1}x_{\alpha_\nu}-{}_px_{\alpha_\nu} & r_{\alpha_\nu} \end{vmatrix},$$

dus ook door

$$-\,di_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\alpha_\nu}+\varepsilon.$$

zoodat de door den term $\int F_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}\,dx_{\alpha_1}\ldots dx_{\alpha_{p-1}}$ tot de waarde van (1) over e_1 en e_2 geleverde bijdrage kan worden voorgesteld door

$$\varepsilon+\sum_{\nu=p}^{n}\left\{\frac{\partial F_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_\nu}}\right\}_A di_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\alpha_\nu}$$

en de waarde van (1) over β wordt verkregen in den vorm:

$$\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\sum_{\nu=1}^{p}\left\{\frac{\partial F_{j_\nu}}{\partial x_{\alpha_\nu}}\right\}_A {}_\sigma i_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$$

(*indicatrix* $j_\nu\,\alpha_\nu$ *aeq. indicatrix* $\alpha_1\ldots\alpha_p$),

waarin A een (voor de verschillende termen onder het $\Sigma\Sigma$-teeken eventueel verschillend) punt van σ voorstelt.

Hieruit volgt onmiddellijk, dat, als Q een in S gelegen tweezijdig p-dimensionaal netfragment en R de grens van Q voorstelt, terwijl de indicatrices van Q en R bij elkander behooren, *de waarde van* (1) *over* R *gelijk is aan de waarde van* (2) *over* Q.

IV. Om het bewijs van het in I geformuleerde theorema te voltooien, beschouwen we een zoodanige categorie ψ van simpliciale verdeelingen van g, dat de verzameling der grondzijden voor ψ gelijkmatig continu varieerende vlakke raakvariëteiten bezit en de verhouding van den inhoud van een grondsimplex tot de $(p-1)^{de}$ macht van zijn grootste coördinatenvariatie voor ψ niet beneden zeker minimum daalt. Zij $g', g'', \ldots$ een fundamentaalreeks van zich onbepaald verdichtende, bij ψ behoorende simpliciale approximeeringen van g. Construeeren we van $g^{(\nu)}$ een approximeerende simpliciale afbeelding $g^{(\nu\mu)}$ op $g^{(\mu)}$, dan kunnen we, door μ en ν beide boven een passende grens te kiezen, op grond van III zorgen, dat de waarden van (1) over $g^{(\nu)}$ en $g^{(\nu\mu)}$ zoo weinig, als we verkiezen, van elkander verschillen, terwijl $g^{(\mu)}$ door $g^{(\nu\mu)}$ met den graad 1 overdekt wordt, zoodat de waarden van (1) over $g^{(\mu)}$ en $g^{(\nu\mu)}$ gelijk zijn. Er bestaat dus een *waarde van* (1) *over* g *voor* ψ, die natuurlijk niet verandert,

als in plaats van ψ een andere categorie van dezelfde soort wordt gekozen.

Zij nu χ een op analoge wijze als ψ gekarakteriseerde categorie van simpliciale verdeelingen van G. De hieruit voortvloeiende simpliciale verdeelingen van g behooren tot een categorie ψ van de zooeven omschreven soort. Zij G', G'', ... een fundamentaalreeks van zich onbepaald verdichtende, bij χ behoorende simpliciale approximeeringen van G, dan wordt hierdoor tevens een fundamentaalreeks g', g'', ... van zich onbepaald verdichtende, bij ψ behoorende simpliciale approximeeringen van g bepaald. Daar op grond van III de waarde van (1) over $g^{(\nu)}$ gelijk is aan de waarde van (2) over $G^{(\nu)}$, *bestaat er, evenals een waarde van* (1) *over* g *voor* ψ, *een waarde van* (2) *over* G *voor* χ, *zijn beide waarden aan elkaar gelijk, en veranderen ze niet, indien hetzij voor* ψ *of voor* χ *een andere categorie van dezelfde soort wordt gekozen.*

§ 2.

Bij de l. c. p. 18 gegeven definitie der tweede afgeleïde is achterwege gebleven de omschrijving van het aan die definitie ten grondslag liggende begrip van *normaliteit* van een van een indicatrix voorziene R_p en een van een indicatrix voorziene R_{n-p}, die in de van een indicatrix voorziene R_n loodrecht op elkaar staan. Deze omschrijving zullen we hier alsnog geven.

Zij S het snijpunt van R_p en R_{n-p}, $\alpha_1 \ldots \alpha_p S$ de indicatrix van R_p en $\beta_1 \ldots \beta_{n-p} S$ de indicatrix van R_{n-p}, dan noemen we R_p *normaal op* R_{n-p} en R_{n-p} *postnormaal op* R_p, als $\alpha_1 \ldots \alpha_p S \beta_{n-p} \ldots \beta_1$ een indicatrix van R_n is.

De begrippen *normaal* en *postnormaal* zijn dus voor sommige waarden van n wèl, voor andere niet gelijkwaardig.

Verder noemen we een p-dimensionaal vectorstelsel V *normaal* op een in hetzelfde punt aangebracht $(n-p)$-dimensionaal vectorstelsel W en W *postnormaal* op V, als ten opzichte van een rechthoekig coördinatenstelsel de componenten van V respectievelijk normaal zijn op en gelijke scalarwaarden bezitten als de componenten van W.

In deze terminologie is de tweede afgeleide van de vectordistributie ${}^pX$ de normaaldistributie van de eerste afgeleide van de postnormaaldistributie van ${}^pX$.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer FRED. SCHUH: „*De restterm der binomiaalreeks*".

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

1. We beschouwen de binomiaalreeks $\sum_{j=0}^{\infty} u_j^{(m)}$, waarin $u_j^{(m)} = \frac{x^j}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (m-k)$ is. We onderstellen x reëel en m niet nul en geen natuurlijk getal (daar anders de reeks afbreekt).

2. De reeks is convergent voor $|x| < 1$, voor $x = 1, m > -1$ en voor $x = -1$, $m > 0$, divergent in de overige gevallen.

3. Blijkens N°. 2 is voor $|x| < 1$ en voor $|x| = 1$, $m > -1$ voldaan aan $\lim_{n=\infty} u_n^{(m)} = 0$.

4. Volgens de reeks van MAC LAURIN met restterm is

$$(1+x)^m = \sum_{j=0}^{n-1} u_j^{(m)} + R_n,$$

waarin:

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!\,p} \frac{(1-\theta)^{n-p}}{(1+\theta x)^{n-m}} \prod_{k=0}^{n-1} (m-k) \; (p > 0),$$

dus:

$$R_n = \frac{u_n^{(m)}}{(1+\theta x)^{n-m}} = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$= \frac{mx}{p} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-p} (1+\theta x)^{m-p} u_{n-1}^{(m-1)} \text{ [1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

5. De bedoeling van dit stukje is te doen zien, *dat* $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ *is in alle gevallen, waarin de reeks convergeert*, dus voor die gevallen de geldigheid van $(1+x)^m = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^{(m)}$ aan te toonen, en wel *uitsluitend uit den restterm* (iets dat in zeer vele leerboeken op onjuiste

[1]) De in beide uitdrukkingen voorkomende getallen θ zijn in het algemeen ongelijk, daar θ van n en van p afhangt.

wijze geschiedt). Hierbij zal het *voordeel verbonden aan de uitdrukking* (2) *voor den restterm der binomiaalreeks* duidelijk uitkomen.

6. Is $x \geqq 0$, dan is volgens (1), als men $n > m$ kiest: $|R_n| \leqq |u_n^{(m)}|$ dus $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ zoo de reeks convergeert.

7. Is $-1 < x < 0$, dan volgt uit (2), als men daarin $p = 1$ stelt: $|R_n| < A\,|m\,x\,u_{n-1}^{(m-1)}|$, waarin A het grootste der getallen 1 en $(1+x)^{m-1}$ is. Dit voert tot $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$.

8. Is $x = -1$, $m > 0$, dan volgt uit (2) door $p = m$ te nemen:

$$R_n = -u_{n-1}^{(m-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In verband met N°. 3 volgt hieruit $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ (daar $m-1 > -1$ is), een resultaat, dat voor $m < 1$ uit de resttermen van LAGRANGE en CAUCHY niet te verkrijgen is.

Opgemerkt kan nog worden, dat (3) tot de identiteit

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!}$$

voert; deze identiteit is ook gemakkelijk door volledige inductie (naar n) aan te toonen, waaruit blijkt, dat ze ook voor $m \leqq 0$ geldt.

9. Zoo men van de stelling van ABEL omtrent continuïteit van machtreeksen gebruik maakt, kan men met de beschouwing van den restterm voor $|x| < 1$ volstaan. Om zonder onderscheiding van verschillende gevallen aan te toonen, dat dan $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ is, stelle men in (2) $p = 1$ (evenals in N°. 7).

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer FRED. SCHUH: „*Een combinatorisch probleem in verband met de bepaling van het aantal verschillende wijzen, waarop de grootste gemeene deeler van twee gedurige producten kan worden berekend*".

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

1. *De G. G. D. der twee getallen*

$$a_1\, a_2 \ldots a_m \quad en \quad b_1\, b_2 \ldots b_n \qquad \ldots \ldots \quad (1)$$

wordt verkregen als het product der mn *grootste gemeene deelers* G_{ij} van a_i en b_j ($i=1, 2, \ldots, m$ en $j=1, 2, \ldots, n$), met dien verstande, dat twee getallen, wier G. G. D. bepaald is, door dien G. G. D. gedeeld worden en de quotiënten bij het verdere deel der berekening voor de oorspronkelijke getallen in de plaats gesteld worden. Wordt zulk een quotiënt met een ander getal gecombineerd, dan wordt opnieuw door hun G. G. D. gedeeld enz. [1]).

De mn getallen G_{ij} worden dus in een bepaalde volgorde berekend. G_{ij} *is de G. G. D. der getallen* a'_i *en* b'_j; *hierin is* a'_i *het getal, dat uit* a_i *ontstaat door deeling door alle reeds eerder bepaalde grootste gemeene deelers, waarbij* a_i *betrokken is, terwijl* b'_j *op dezelfde wijze uit* b_j *wordt afgeleid.*

2. We vragen nu naar het *aantal manieren, waarop de G. G. D. der getallen* (1) *op de in N°. 1 aangegeven wijze kan worden berekend.* Een andere volgorde der mn getallen G_{ij} geeft echter niet steeds een andere berekeningswijze van het gezochte getal G, daar natuurlijk twee berekeningswijzen als dezelfde te beschouwen zijn, als ze uit dezelfde onderdeelen bestaan en alleen verschillen in de volgorde, waarin de afzonderlijke berekeningen worden uitgevoerd. Het is daarom bij twee getallen G_{ij} en G_{kl} onverschillig welk het eerst berekend wordt, zoo $i \neq k$ en tevens $j \neq l$ is. Het komt dus alleen aan op de volgorde der getallen G_{ij}, die òf in de eerste indices òf in de tweede indices overeenstemmen.

3. De bijzondere waarden der getallen $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$

[1]) Wordt voor de laatste maal een der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ met een ander gecombineerd, dan kan natuurlijk de deeling van eerstgenoemd getal door den gevonden G. G. D. achterwege blijven, daar het quotiënt toch verder niet meer in de berekening wordt betrokken.

kunnen meebrengen, dat verwisseling van twee getallen G_{ij}, die in de eerste of in de tweede indices overeenstemmen, toch geen andere berekeningswijze van G geeft. Zijn b.v. a_1 en b_1 onderling ondeelbaar en evenzoo a_1 en b_2, dan is het onverschillig of men eerst G_{11} en dan G_{12} bepaalt of omgekeerd, daar deze grootste gemeene deelers beide 1 zijn en dus een deeling door G_{11} of G_{12} geen wijziging in de getallen brengt. Van dergelijke toevalligheden zien we echter af, zoodat we twee bepalingswijzen van G alleen dan dezelfde noemen, als ze bij alle mogelijke waarden van $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ dezelfde zijn.

4. Het in N°. 2 gevraagde aantal wordt dan gelijk aan het *aantal manieren, waarop men de* mn *symbolen*

$$G_{ij}\ (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n)$$

in volgorde plaatsen kan, als men twee volgorden als dezelfde beschouwt, zoo deze uit elkaar kunnen worden afgeleid door eenige verwisselingen van telkens twee symbolen, die zoowel in de eerste als in de tweede indices verschillen.

5. Voor $m = 2$ wordt het gevraagde aantal het aantal A_n der manieren, waarop men de symbolen

$$G_{11}, G_{12}, G_{13}, \ldots, G_{1n}, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$G_{21}, G_{22}, G_{23}, \ldots, G_{2n} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

in volgorde kan plaatsen, bij twee dier symbolen alleen dan op de volgorde lettend, als ze in bovenstaand schema in dezelfde rij of in dezelfde kolom staan. *Het aantal* A_n *is* $n!$*-maal zoo groot als het aantal* B_n *der rangschikkingen, waarbij de symbolen* (2) *op de door* (2) *aangegeven wijze op elkaar volgen.*

6. Men kan de B_n rangschikkingen in n groepen verdeelen, zoodanig, dat de i^{de} groep die rangschikkingen bevat, waarbij G_{2i} aan de overige symbolen (3) voorafgaat. Die i^{de} groep is weer in twee deelen te verdeelen; het eerste deel bevat de rangschikkingen, waarbij G_{2i} aan G_{1i} voorafgaat, het tweede deel de rangschikkingen, waarbij G_{2i} na G_{1i} komt.

Het eerste deel der i^{de} groep bevat evenveel rangschikkingen als wanneer men G_{1i} en G_{2i} schrapt, dus B_{n-1} rangschikkingen.

Bij de rangschikkingen voorkomende in het tweede deel der i^{de} groep gaan de symbolen $G_{11}, G_{12}, \ldots, G_{1i}$ aan alle symbolen (3) vooraf, zoodat men de symbolen $G_{11}, G_{12}, \ldots, G_{1i}$ kan schrappen. Let men alleen op de plaatsing der symbolen $G_{21}, G_{22}, \ldots, G_{2,i-1}$ onderling en ten opzichte van de (als onderling gelijk beschouwde) symbolen

$$G_{2,i+1},\ G_{2,i+2}, \ldots, G_{2n}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

dan komt men tot $\frac{(n-1)!}{(n-i)!}$ mogelijke plaatsingen. Ieder dier plaatsingen voert tot B_{n-i} mogelijke rangschikkingen, als men ook let op de volgorde der $n-i$ symbolen (4) onderling en resp. ten opzichte van $G_{1,i+1}, G_{1,i+2}, \ldots, G_{1n}$. Hieruit blijkt, dat het tweede deel der i^{de} groep $\frac{(n-1)!}{(n-i)!} B_{n-i}$ rangschikkingen bevat; dit is ook nog juist voor $i = n$, als men B_0 als 1 interpreteert.

In het geheel bevat de i^{de} groep dus $B_{n-1} + \frac{(n-1)!}{(n-i)!} B_{n-i}$ rangschikkingen. Dit voert tot:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \left\{ B_{n-1} + \frac{(n-1)!}{(n-i)!} B_{n-i} \right\} = (n+1) B_{n-1} + (n-1)! \sum_{0}^{n-2} \frac{B_k}{k!}. \quad (5)$$

7. Vervangt men in (5) n door $n-1$ (waarvoor noodig is $n > 1$ te onderstellen), dan vindt men:

$$B_{n-1} = (n-1) B_{n-2} + (n-2)! \sum_{0}^{n-2} \frac{B_k}{k!},$$

waaruit in verband met (5) volgt:

$$B_n = 2n\, B_{n-1} - (n-1)^2 B_{n-2}.$$

Uit deze homogene lineaire differentievergelijking van de tweede orde kan men, uitgaande van $B_0 = 1$ en $B_1 = 2$ [1]), achtereenvolgens B_2, B_3, B_4, enz. berekenen. Men vindt zoo:

$B_2 = 7$, $B_3 = 34$, $B_4 = 209$, $B_5 = 1546$, $B_6 = 13327$, $B_7 = 130922$, $B_8 = 1441729$, $B_9 = 17572114$, $B_{10} = 234662231$.

8. Wegens $A_n = n!\, B_n$ vindt men dus voor het *aantal* A_n *der manieren, waarop men den G. G. D. der getallen* $a_1\, a_2$ *en* $b_1\, b_2 \ldots b_n$ *berekenen kan*:

$A_1 = 2$, $A_2 = 14$, $A_3 = 204$, $A_4 = 5016$, $A_5 = 185520$,
$A_6 = 9595440$, $A_7 = 659846880$, $A_8 = 58130513280$.

9. Zijn m en n beide > 2, dan wordt de bepaling van het aantal manieren, waarop de G. G. D. der beide gedurige producten volgens de in N°. 1 aangegeven methode berekend kan worden, aanmerkelijk ingewikkelder. Voor $m = n = 3$ wordt (door systematisch uitcombineeren der verschillende gevallen) voor het gezochte aantal 19164 gevonden.

---

[1]) De formule (5) voert, in verband met $B_0 = 1$, voor $n = 1$ tot $B_1 = 2$, daar $\sum_{0}^{n-2} \frac{B_k}{k!}$ dan 0 is (als som van nul termen).

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer FRED. SCHUH: *„Stelling omtrent het term voor term differentiëeren van een reeks.”*

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

1. *Is voldaan aan:*

a. de functies $u_1(x), u_2(x), \ldots$ *zijn in het interval* $a \leqq x \leqq b$, *dat we i noemen, differentiëerbaar,*

b. de reeks $u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots$ *is in het interval i gelijkmatig convergent,*

c. de reeks $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ *is voor een tot het interval i behoorende waarde c van x convergent en*

d. de functies $u'_1(x), u'_2(x), \ldots$ *zijn continu voor de tot het interval i behoorende waarde p van x,*

dan geldt:

α. de reeks $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ *is in het interval i gelijkmatig convergent en*

β. de functie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ *is differentiëerbaar voor* $x = p$ *met* $u'_1(p) + u'_2(p) + \ldots$ *als differentiaalquotiënt.*

Het spreekt van zelf, dat voor $x = a$ of $x = b$ „differentiëerbaar” als „rechts resp. links differentiëerbaar” op te vatten is.

We willen van deze stelling (die gewoonlijk in beperkteren vorm [1]) uit het term voor term integreeren wordt afgeleid) een eenvoudig bewijs geven uitsluitend steunend op de definitie van differentiaalquotiënt.

2. Bewijs van *α*. Stelt men $u'_{n+1}(x) + u'_{n+2}(x) + \ldots = R_n(x)$, dan is (als x tot het interval i behoort):

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+k}(x) = \{u_{n+1}(c) + u_{n+2}(c) + \ldots + u_{n+k}(c)\} +$$
$$+ \{u'_{n+1}(\xi) + u'_{n+2}(\xi) + \ldots + u'_{n+k}(\xi)\}(x - c) =$$
$$= \{u_{n+1}(c) + u_{n+2}(c) + \ldots + u_{n+k}(c)\} + \{R_n(\xi) - R_{n+k}(\xi)\}(x - c),$$

waarin $\xi = c + \theta(x - c)$, dus:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+k}(x)| \leqq$$
$$\leqq |u_{n+1}(c) + u_{n+2}(c) + \ldots + u_{n+k}(c)| + \{|R_n(\xi)| + |R_{n+k}(\xi)|\}(b - a).$$

Is σ een willekeurig positief getal, dan volgt uit het onderstelde *c*,

[1]) Nl. in de onderstelling, dat de functies $u'_1(x)$, $u'_2(x)$, enz. in het geheele interval i continu zijn.

dat men N_1 zoo kan bepalen, dat voor $n > N_1$ geldt $|u_{n+1}(c) + u_{n+2}(c) + \dots + u_{n+k}(c)| < \frac{1}{3}\sigma$. Uit het ondersteldé b volgt verder, dat men N_2 zoo kan bepalen, dat voor $n > N_2$ geldt $|R_n(\xi)| < \frac{\sigma}{3(b-a)}$. Is N het grootste der getallen N_1 en N_2, dan is dus $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+k}(x)| < \sigma$ voor iedere $n > N$ en iedere x uit het interval i. Hieruit volgt het gestelde α; het onderstelde d is hiervoor niet noodig.

3. Bewijs van β. Is $u_1(x) + u_2(x) + \dots = \varphi(x)$ en $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots = \psi(x)$, dan drukt het gestelde β uit, dat

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(p+h) - \varphi(p)}{h} = \psi(p) \quad \dots \dots \quad (1)$$

is. Stelt men $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = U_n(x)$ en $u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots = \varrho_n(x)$, dan is:

$$\frac{\varphi(p+h) - \varphi(p)}{h} - \psi(p) = \frac{U_n(p+h) - U_n(p)}{h} + \frac{\varrho_n(p+h)}{h} - \frac{\varrho_n(p)}{h} - \psi(p) =$$

$$= U'_n(p+\theta h) + \frac{\varrho_n(p+h)}{h} - \frac{\varrho_n(p)}{h} - \psi(p) =$$

$$= \psi(p+\theta h) - \psi(p) - R_n(p+\theta h) + \frac{\varrho_n(p+h)}{h} - \frac{\varrho_n(p)}{h},$$

dus:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\varphi(p+h) - \varphi(p)}{h} - \psi(p)\right| \leqq \left|\psi(p+\theta h) - \psi(p)\right| + |R_n(p+\theta h)| + \\ + \left|\frac{\varrho_n(p+h)}{h}\right| + \left|\frac{\varrho_n(p)}{h}\right|. \end{aligned}\right\} \quad \dots (2)$$

Volgens de onderstellingen b en d is $\psi(x)$ continu voor $x = p$. Is dus σ een willekeurig positief getal, dan kan men het positieve getal ε zoo bepalen, dat $|\psi(p+h) - \psi(p)| < \frac{1}{4}\sigma$ is, zoodra $|h| < \varepsilon$ is; voor $|h| < \varepsilon$ is dan ook $|\psi(p+\theta h) - \psi(p)| < \frac{1}{4}\sigma$.

Wegens het onderstelde b kan men N_1 zoo bepalen, dat voldaan is aan $|R_n(x)| < \frac{1}{4}\sigma$ voor iedere $n > N_1$ en iedere x uit het interval i. Voor $n > N_1$ is dan $|R_n(p+\theta h)| < \frac{1}{4}\sigma$.

Is h een bepaald getal, dat aan $|h| < \varepsilon$ en $h \neq 0$ voldoet, dan kan men de getallen N_2 en N_3 zoo bepalen, dat voor $n > N_2$ en $n > N_3$ geldt $|\varrho_n(p+h)| < \frac{1}{4}\sigma|h|$ resp. $|\varrho_n(p)| < \frac{1}{4}\sigma|h|$.

Kiest men nu n grooter dan het grootste der getallen N_1, N_2 en N_3, dan blijkt uit (2), dat $\left|\frac{\varphi(p+h) - \varphi(p)}{h} - \psi(p)\right| < \sigma$ is voor $|h| < \varepsilon$ $(h \neq 0)$, waaruit men tot (1) besluit.

4. Opmerkingen. Bij het boven gegeven bewijs der differentiëerbaarheid van de functie $\varphi(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$ voor $x = p$ is slechts van de *continuïteit der functies* $u'_1(x)$, $u'_2(x)$, *enz. voor* $x = p$ gebruik gemaakt, *zoodat continuïteit in een interval niet behoefde te worden ondersteld.* Ook behoefde de integreerbaarheid der functies $u'_1(x)$, $u'_2(x)$, enz. niet te worden aangenomen, zoodat het gewone bewijs (door de reeks $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ term voor term te integreeren) op de algemeenere formuleering, zooals die in N°. 1 gegeven is, niet van toepassing is.

5. Neemt men het convergeeren der reeks $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ in het geheele interval i in het onderstelde op, dan kan men voor het bewijs van het gestelde β met de semi-gelijkmatige convergentie (enkelvoudige gelijkmatige convergentie van Dini) der reeks $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ in het interval i volstaan. Die semi-gelijkmatige convergentie is nl. eerstens voldoende om tot de continuïteit van $\psi(x)$ voor $x = p$ te kunnen besluiten. Verder levert de bepaling der getallen N_2 en N_3 geen bezwaar, waarna men aan n een zoodanige waarde $> N_2$ en $> N_3$ kan toekennen, dat voor iedere x uit het interval i geldt $|R_n(x)| < \frac{1}{4}\delta$. Of deze ongelijkheid ook voor iedere grootere waarde van n geldt, is daarbij onverschillig.

Door Dini is in zijn Teorica delle funzioni di variabili reali door een gecompliceerdere omvorming van het differentiequotiënt het bewijs van β geleverd zonder het onderstelde d, daarbij de convergentie der reeks $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ in het interval i aannemend.

6. *Bij het bewijs der differentiëerbaarheid van* $\varphi(x)$ *behoefde de absolute convergentie der reeks* $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ *niet te worden ondersteld.* Door aan te nemen, dat $|u'_n(x)| < c_n$ is (c_n onafhankelijk van x) en de reeks $c_1 + c_2 + \dots$ convergeert (hetgeen gelijkmatige absolute convergentie der reeks $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ insluit) heeft Porter (Ann. of Math. ser. 2, vol. 3, 1901, p. 19) op zeer eenvoudige wijze de differentiëerbaarheid van $\varphi(x)$ voor $x = p$ aangetoond zonder iets omtrent continuïteit der functies $u'_n(x)$ te onderstellen, nl. door gebruik te maken van:

$$\frac{\varphi(p+h) - \varphi(p)}{h} - \psi(p) = \frac{U_n(p+h) - U_n(p)}{h} - U_n'(p) +$$

$$+ \sum_{n+1}^{\infty} u'_j(p + \theta_j h) - \sum_{n+1}^{\infty} u'_j(p).$$

Physiologie. — De Heer MAGNUS biedt, mede namens den Heer A. DE KLEIJN, eene mededeeling aan over: „*Tonische Labyrinth-reflexen op de oogspieren.*"

Het is een bekend feit, dat de labyrinthen een sterken invloed uitoefenen op den stand der oogen in de orbita en wel in dien zin, dat bij elken stand van den kop in de ruimte, ook een bepaalde stand der oogen in de orbita behoort.

Het onderzoek naar het verband van labyrinth- en oogstand wordt zeer bemoeilijkt door spontane oogbewegingen en is het dan ook begrijpelijk, dat de uitvoerige onderzoekingen bijna uitsluitend gedaan werden bij dieren, die weinig spontane oogbewegingen maken. Onder de gebruikelijke proefdieren is dit in de eerste plaats het konijn. In 1917 werd uit het pharmacologisch instituut te Utrecht een uitvoerige mededeeling[1]) over dit vraagstuk gepubliceerd en het verband tusschen labyrinth- en oogstand bij het konijn zoo volledig mogelijk onderzocht.

Uitgaande van een primairen stand van den kop met horizontale mondspleet en onderkaak naar beneden, bleken er bij andere standen van den kop in de ruimte zoowel *constante vertikale oogafwijkingen* als *raddraaiingen* op te treden. Voor de waargenomen *zijwaartsche* bewegingen der oogen, in de richting van de oogspleet, konden geen constante gegevens gevonden worden.

De vertikale oogafwijkingen zijn aan beide oogen steeds tegengesteld, de grootste afwijkingen werden gevonden in beide zijliggingen van den kop, waarbij het bovenste oog maximaal naar beneden, het onderste maximaal naar boven afgeweken is.

De raddraaiingen treden bij beide oogen steeds in dezelfde richting op, de grootste afwijkingen vindt men, als de kop zich vertikaal met den snuit naar boven of naar beneden bevindt. Bij de proeven werden de konijntjes in toto in verschillende standen in de ruimte gebracht, waarbij zorg werd gedragen, dat geen verplaatsing van den kop ten opzichte van den romp kon plaats vinden (halsreflexen). De verschillende oogstanden werden kinomatographisch vastgelegd. Een nauwkeurige meting werd mogelijk gemaakt door op de photo-

[1]) J. V. D. HOEVE und A. DE KLEIJN. Tonische Labyrinthreflexe auf die Augen. Pflügers Archiv. 169. 241. 1917.

graphische platen de verschuiving van een, in locaal-anaesthesie op de cornea gebrand kruis, ten opzichte van een mede gephotographeerd, vast coordinatensysteem te bepalen.

De resultaten werden voor de vertikale oogafwijkingen en voor de raddraaiingen afzonderlijk in den vorm van krommen weergegeven en wel voor 3 op elkaar loodrecht staande draaiingen van den kop in de ruimte om telkens 360°.

Op deze wijze leert men natuurlijk slechts kennen den invloed van de labyrinthen op den stand der *oogen*. Voor eene nauwkeurige analyse der labyrinthaire invloeden is het echter gewenscht den invloed te leeren kennen van de labyrinthen op elke *oogspier*.

Daar nu bij verschillende standen van den kop in de ruimte dikwijls eene combinatie van vertikale oogafwijkingen en rolbewegingen optreden en hierbij de insertie-punten der oogspieren op verschillende wijzen verplaatst worden, is het a priori niet vanzelf sprekend, dat als de oogbol maximaal naar boven of beneden afgeweken of als deze maximaal gerold is, ook de oogspieren (mm. recti en obliqui) dan eveneens maximaal verlengd of verkort moeten zijn.

Het was dus noodig na te gaan bij welken stand van den kop in de ruimte de verschillende oogspieren hun maximale en minimale verkorting vertoonen. Door het bovengenoemde onderzoek was voor elken stand van den kop in de ruimte ook de daarbij behoorende oogstand nauwkeurig bepaald en was dus verder niets noodig, dan een geschikt oogmodel te construeeren, bij dit model den oogbol in de verschillende gevonden standen te brengen en nu voor elken stand ook de lengte der 6 oogspieren nauwkeurig te bepalen.

De anatomische verhoudingen der oogspieren werden voor korten tijd door Wessely [1]) nader beschreven. In de bijgevoegde afbeelding vindt men echter niet de werkelijke verhoudingen in getallen uitgedrukt.

Daarom werd bij verschillende konijnen de lengte der oogspieren, grootte van den oogbol, plaats der insertie der spieren etc. nauwkeurig bepaald en hiernaar door den instumentmaker van het instituut F. A. C. Imhof, een model vervaardigd van oogbol en bijbehoorende oogspieren.

Uitgaande van den primairen oogstand werd nu met behulp van de vroeger gevonden waarden voor raddraaiïngen en vertikale oogafwijkingen voor verschillende liggingen van den kop in de ruimte bij het model de bijbehoorende oogstand ingesteld en nu de lengten der 6 oogspieren bij deze verschillende oogstanden bepaald.

---

[1]) K. Wessely. Ueber den Einflus der Augenbewegungen auf den Augendruck Arch. f. Augenheilkunde. 81. 111. 1916.

Bij de vroeger verrichte proeven waren steeds 3 draaiïngen uitgevoerd.

Draaiïng I.

Dier oorspronkelijk in buikligging met horizontale mondspleet. Draaiïng van het dier om de bitemporale as, richting van de draaiïng is: kop naar beneden en staart naar boven.

Draaiïng II.

Dier oorspronkelijk in buikligging met horizontale mondspleet. Draaiïng van het dier om de occipito-caudale as. Richting van de draaiïng is: rechter oog naar beneden.

Draaiïng III,

Dier oorspronkelijk in linker zijligging met het rechter oog naar boven, mondspleet staat vertikaal. Draaiïng van het dier om de ventro-dorsale as, de richting der draaiïng is, snuit naar beneden.

Bij elke draaiïng werd de oogstand om de 15° nauwkeurig bepaald.

Het resultaat der metingen aan het model van de lengte der oogspieren bij de verschillende oogstanden werd in tabelvorm gebracht.

De publicatie dezer tabellen moge hier achterwege blijven, daar het noodzakelijk bleek eerst nog eene correctie aan te brengen.

Wanneer n.l. het oog van den normaalstand uit, *raddraaiïngen* uitvoert *zonder vertikale bewegingen*, dan worden door deze raddraaiïngen van den oogbol de insertiepunten van de rechte oogspieren aan den bulbus verplaatst en daardoor de lengte der rechte oogspieren *passief* veranderd.

Wanneer nu een raddraaiïng zich met een vertikale oogafwijking combineert, dan treedt de contractie der rechte oogspieren niet op bij de lengte dier spieren, welke zij bij den normaalstand van den oogbol hebben, maar bij een andere lengte, welke zij door de raddraaiïng (contractie der scheeve oogspieren) gekregen hebben. Wanneer dus het oog een raddraaiïng uitgevoerd heeft, moeten de gemeten lengten der rechte oogspieren gecorrigeerd worden met een bedrag, dat overeenkomt met de passieve verlenging, resp. verkorting, veroorzaakt door de contractie der scheeve oogspieren.

Eveneens moeten natuurlijk de gemeten lengten der mm. obliqui bij verschillende vertikaalafwijkingen gecorrigeerd worden met een bedrag, dat overeenkomt met de passieve verlenging, resp. verkorting dier spieren, veroorzaakt door de contractie der rechte oogspieren.

Aan het model kon nu op eenvoudige wijze door eerst het oog in normaalstand te brengen en nu alleen radddraaiingen resp. alleen vertikale oogafwijkingen van den oogbol op te wekken, bepaald worden hoe veel, bij verschillende lengten der scheeve oogspieren,

de passieve verlenging of verkorting der rechte oogspieren of omgekeerd bij verschillende lengten der rechte oogspieren de passieve verlenging of verkorting der scheeve oogspieren bedraagt.

De op deze wijze gecorrigeerde tabellen vindt men in den vorm van krommen als fig. 1—4 geroproduceerd.

Deze krommen geven dus weer de gecorrigeerde lengten in mM. der 4 oogspieren (beide obliqui en recti super. en infer.) bij de 3 bovengenoemde draaiingen van den kop in de ruimte. Voor den obliq. superior is alleen de afstand van trochlea tot aan de insertie aan den balbus weergegeven.

Deze krommen leeren nu het volgende:

De krommen van den obliq. superior en obliq. inferior zijn precies elkaars spiegelbeeld, dat wil dus zeggen, dat deze spieren bij de tonische labyrinthreflexen geheel als antagonisten zich gedragen; wordt de eene langer, dan wordt de andere korter en omgekeerd.

Eveneens blijkt uit de krommen van de mm. recti superior en inferior dat ook deze spieren als reine antagonisten functioneeren.

Vergelijkt men de krommen van de scheeve oogspieren (fig. 1 en 2) met de krommen, die vroeger voor de raddraaiingen van het oog gevonden werden, dan blijkt, dat zij in de hoofdpunten overeenkomen. Vooral vindt men voor de ligging der maxima en minima geen essentieel verschil; de raddraaiingen en de verkortingen der scheeve oogspieren zijn ongeveer het grootst, als de kop met den snuit vertikaal naar boven of beneden staat. Eveneens komen de krommen voor de rechte oogspieren (fig. 3 en 4) met de krommen overeen, welke vroeger voor de vertikale oogafwijkingen gevonden werden. Alleen is de vorm van de kromme der oogspieren bij draaiing III wat spitser dan de vorm der krommen, die voor de vertikaalafwijkingen gevonden werd.

De ligging der maxima en minima is echter niet essentieel veranderd. Het maximum van contractie der beide rechte oogspieren is ongeveer bij zijligging van den kop.

Vergelijkt men nu de krommen van de obliqui en recti dan vindt men het volgende:

Bij draaiing I (––) reageeren de obliqui zeer sterk, terwijl de recti bijna geen bewegingen uitvoeren. Bij deze draaiing vindt men dus bijna uitsluitend raddraaiingen zonder vertikaalbewegingen.

Omgekeerd reageeren bij draaiing II (— . — .) de obliqui bijna in het geheel niet, terwijl de recti superior en inferior sterke bewegingen uitvoeren; bij deze draaiing dus overwegend vertikale bewegingen, zonder raddraaiingen.

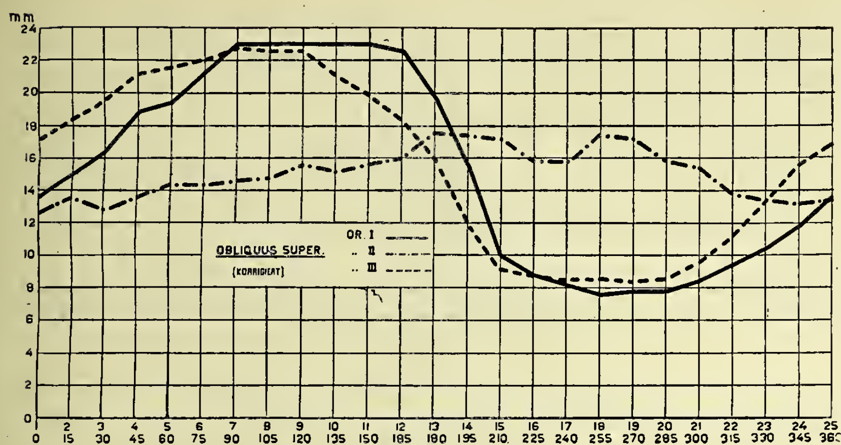


Fig. 1.

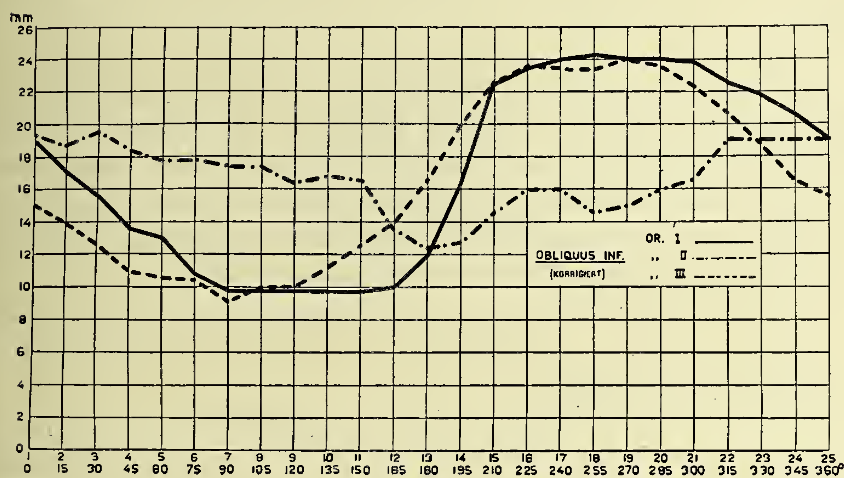


Fig. 2.

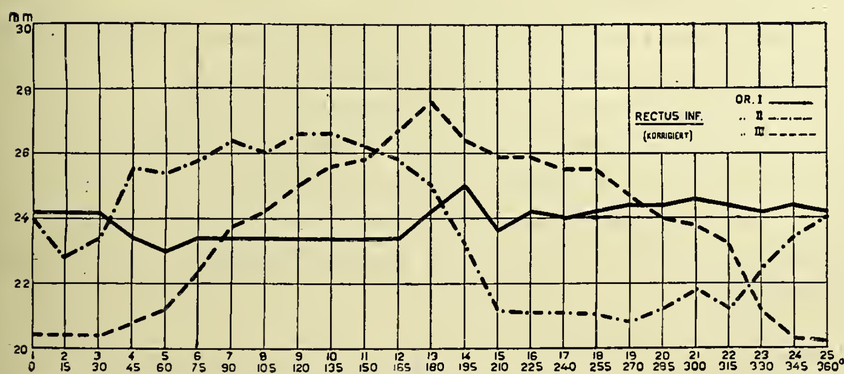


Fig. 3.

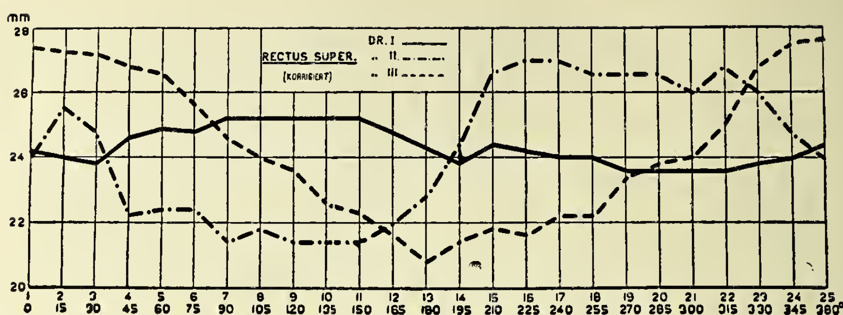


Fig. 4.

Alleen bij draaiing III (- - -) vindt men een gezamenlijke werking van de obliqui en de beide recti.

Hieruit volgt dus, dat bij draaiing I de labyrinthen bijna uitsluitend op de obliqui, bij draaiing II bijna uitsluitend op rectus superior en inferior en bij draaiing III op alle 4 de oogspieren werken.

Op details der krommen kan hier nog niet worden ingegaan, dit zal later geschieden, als de afhankelijkheid der tonische labyrinthreflexen op de oogen van bepaalde gedeelten van het labyrinth spec. van de otolithen nader zal worden nagegaan. Hier moge alleen gewezen worden op het feit, dat bij de scheeve oogspieren de kromme van draaiing I een asymetrisch verloop heeft, bij de rechte spieren de kromme van draaiing II.

De nauwkeurigheid der vroegere bepalingen en der nu uitgevoerde metingen volgt uit het vergelijken der correspondeerende punten op de verschillende krommen.

Bij de 3 verschillende draaiingen werd namelijk verschillende malen eenzelfde stand van den kop in de ruimte vanuit verschillende richting bereikt. Uit de kromme blijkt, dat desalniettemin de gevonden lengten der oogspieren opvallend goed overeenkomen.

Correspondeerende punten zijn o.a.:

Normaalstand. Draaiing I No. 1 en 25. Draaiing II No. 1 en 25.
Rugligging. Draaiing I No. 13. Draaiing II No. 13.
Linker zijligging. Draaiing II No. 19. Draaiing III No. 1.
Rechter zijligging. Draaiing II No. 7. Draaiing III No. 13.
Snuit naar boven. Draaiing I No. 19. Draaiing III No. 19.
Snuit naar beneden. Draaiing I No. 7. Draaiing III No. 7.

Bij al deze standen hebben de 4 gemeten oogspieren bijna precies dezelfde lengte.

Conclusies.

Uit dit en het vroeger gepubliceerde onderzoek kan over de tonische

labyrinthreflexen op de oogspieren het volgende geconcludeerd worden:

1. Bij het konijn komt met elken stand van den kop in de ruimte een bepaalde contractietoestand der oogspieren overeen en daardoor een bepaalde oogstand, die zoolang voortduurt als de kop zijn stand in de ruimte niet verandert.

2. Bij deze tonische labyrinthreflexen konden bij het konijn voor den rectus externus en internus geen vaste regels gevonden worden. In hoofdzaak betreft het de werking van den rectus superior en inferior, welke de vertikale oogafwijkingen en de beide obliqui, welke de rolbewegingen der oogen veroorzaken.

Hierbij verhouden de beide recti evenals de beide obliqui zich onderling als antagonisten; daarentegen kunnen veranderingen der lengten van de recti zich met die der obliqui in verschillende graden combineeren. Deze beide spiergroepen functioneeren dus onafhankelijk van elkaar (hoewel natuurlijk tezamen afhankelijk van de labyrinthen).

3. Als de kop zich met den snuit vertikaal naar boven bevindt zijn de beide obliqui superiores (rechts en links) in eenen toestand van grootste contractie, beide obliq. infer. in een toestand van grootste verslapping. Beide oogen zijn dan met de bovenste corneapool naar voren gerold. Als de kop zich met den snuit vertikaal naar beneden bevindt zijn de beide obliqui superiores in een toestand van grootste verslapping beide obliq. inferiores in een toestand van grootste contractie. Beide oogen zijn dan met de bovenste corneapool naar achteren gerold.

Bij alle andere standen van den kop in de ruimte vindt men contractietoestanden van de obliqui, welke tusschen deze beide uiterste liggen, steeds reageeren beide oogen met rollingen in dezelfde richting.

4. Als de kop zich in linker zijligging bevindt, is de rechter rectus inferior en de linker rectus superior in een toestand van grootste contractie, de rechter rectus superior en de linker rectus inferior in een toestand van grootste verslapping. Het rechter oog is dan maximaal naar beneden, het linker oog maximaal naar boven afgeweken.

Als de kop zich in rechter zijligging bevindt, is de linker rectus inferior en de rechter rectus superior in een toestand van grootste contractie, de linker rectus superior en de rechter rectus inferior in een toestand van grootste verslapping. Het linker oog is dan maximaal naar beneden, het rechter oog maximaal naar boven afgeweken.

Bij alle andere standen van den kop in de ruimte vindt men contractietoestanden van den rectus superior en inferior, welke tusschen deze beide uiterste liggen.

Steeds reageeren beide oogen met tegengestelde vertikale oogaf-

wijkingen. De rectus superior van de eene zijde en de rectus inferior van de andere zijde reageeren daarbij in denzelfden zin.

5. Bevindt zich de kop eerst in zijn normaalstand en wordt deze dan om de bitemporale as om 360° gedraaid, dan reageeren daarbij hoofdzakelijk de obliqui en de beide oogen rollen in dezelfde richting. Bevindt zich de kop eerst in zijn normaaltoestand en wordt deze dan om de occipito-caudale as om 360° gedraaid, dan reageeren daarbij hoofdzakelijk de recti superior en inferior en de oogen vertoonen (tegengestelde) vertikale afwijkingen.

Bevindt zich de kop eerst in zijligging en wordt deze dan om de ventro-dorsale as om 360° gedraaid, dan reageeren beide spiergroepen en de oogstanden zijn de resultanten van tegengestelde vertikale oogafwijkingen en gelijk gerichte rolbewegingen.

6. Na eenzijdige labyrinthexstirpatie blijven de vertikale oogafwijkingen en rolbewegingen van *beide* oogen bestaan. *Een* labyrinth werkt op de obliqui van beide oogen en de rollingen in denzelfden zin, op de recti (super. en infer.) van beide oogen en de vertikale oogafwijkingen in tegengestelden zin.

Een labyrinth veroorzaakt aan beide oogen de grootste vertikale afwijking ten opzichte van den normalen oogstand, als het zich bij zijligging van den kop beneden bevindt. Dan is de rectus super. van dezelfde zijde en de rectus inf. van de gekruiste zijde in een toestand van de grootste contractie.

Een labyrinth veroorzaakt bij beide oogen de grootste rolbewegingen door contractie der obliqui infer. als de kop zich met den snuit vertikaal naar beneden bevindt.

Omgekeerd veroorzaakt *een* labyrinth de grootste rolbewegingen bij beide oogen, door contractie der obliqui superiores, als de kop zich met den snuit vertikaal naar boven bevindt.

De grootte der rolbewegingen is bij aanwezigheid van slechts *een* labyrinth *ongeveer* de helft van de rolbewegingen bij dieren met intakte labyrinthen.

7. Het gelukt de veranderingen der oogstanden bij het intakte dier terug te brengen tot de som van invloeden, die vanuit het rechter en linker labyrinth op de recti super. en infer. en de obliqui super. en infer. van beide oogen worden uitgeoefend.

8. Na dubbelzijdige labyrinthexstirpatie zijn alle hier boven beschreven tonische reflexen op de oogen verdwenen.

9. De centrale banen, die bij het konijn voor de verklaring der *tonische* labyrinthreflexen op de oogen (dus *niet* der draaireacties en calorische reacties) *minstens* aanwezig moeten zijn, vindt men in een schema bij fig. 5 geteekend.

De getrokken lijnen stellen de banen van de recti super. en inf. voor, de gestippelde lijnen die van de obliqui.

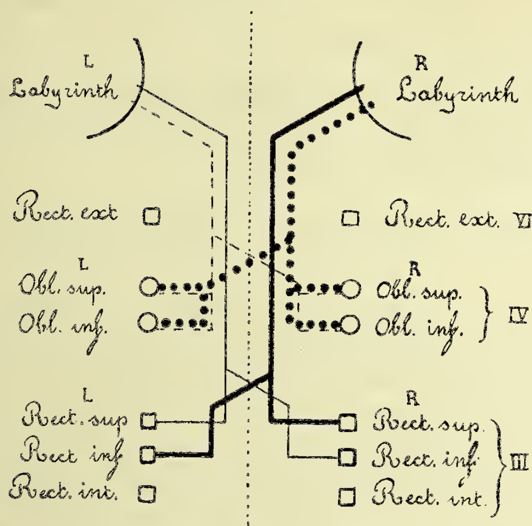


Fig. 5.

Elk der 4 obliqui wordt beinvloed vanuit beide labyrinthen, elk der beide recti (super. en inf.) vanuit slechts *een* labyrinth.

Een labyrinth werkt op de 4 obliqui, daarentegen slechts op den rectus super, van dezelfde kant en op den rectus infer. van de gekruiste zijde. Voor de Mexternus en internus konden bij deze *tonische* labyrinthreflexen geen vaste regels gevonden worden.

Bacteriologie. — De Heer EIJKMAN biedt een mededeeling aan van den Heer L. K. WOLFF: „*Over het z.g. filtreerbare virus der influenza van* v. ANGERER".

(Mede aangeboden door den Heer SPRONCK).

Op het eind van 1918 heeft v. ANGERER [1]) mededeelingen gedaan over een door hem ontdekt virus van de influenza. Hij spoot ratten in met sputa van lijders aan influenza, filtreerde het bloed van deze ratten kiemvrij, als ze al erg ziek waren en bracht het filtraat in glucose-bouillon. Na bebroeding in de stoof bij 37° werd deze bouillon troebel, zonder dat er duidelijk bacteriën in konden worden gevonden. Wel beschrijft VON ANGERER zeer kleine vormsels, angioplasmata, die hij voor de verwekkers van de griep houdt. Deze mededeeling werd bevestigd en aangevuld door hem zelf en andere onderzoekers [2]). Zoo werd gevonden dat de rat niet meer noodig was om het virus te isoleeren maar dat het voldoende was bloed van lijders aan influenza in de bouillon te brengen.

Bij een onderzoek over de secundaire bacteriën, die bij de influenza-patiënten de pneumonie veroorzaken, samen met Dr. SNAPPER [3]) verricht, hebben wij ook enkele malen deze troebeling waargenomen, zonder dat het lukte eenige mikrobe in de vloeistof aan te toonen. Wel was ons opgevallen, dat er talrijke ronde, gram-negatieve korreltjes in dergelijke bouillon waren te vinden, maar de ongelijke grootte had er ons van teruggehouden deze vormsels als bacteriën te beschouwen. Nadat echter de mededeelingen van VON ANGERER waren verschenen, ben ik nader op deze troebelingen, die men dus verkrijgt door bloed van influenza-patiënten in glucose-bouillon te enten en deze vloeistof dan bij 37° te bebroeden, gaan letten en heb ze in een drietal gevallen van ernstige influenza-pneumonie kunnen waarnemen. Echter — laat ik er dit onmiddellijk aan toevoe-

---

1) Münchener Med. Woch. 1918, N⁰. 46 en 47.

2) PRELL: ibidem 1918, N⁰. 52.

LESCHKE, Berl. klin. Woch. 1919, N⁰. 1.

Zie verder OLSEN (Verslag Aertzl. Verein Hamburg 7 Jan. 1919) en KRONBERGER, Deutsche Med. Woch 1919, N⁰. 9, die de vondsten van VON ANGERER voor niet specifiek houden.

3) Tijdschr. v. Geneesk. 1919, blz. 1483.

gen — vond ik ze ook in een geval van endocarditis lenta bij een kindje waar ik geen streptococcen in het bloed vond, maar wel tot tweemaal toe dezelfde troebeling.

De epidemie was toen bijna ten einde en ik had mijn onderzoekingen niet kunnen voortzetten, als niet een gelukkig toeval, een later gebleken verkeerde meening, me verder had geholpen.

Uitgaande van het door mij en ook door andere onderzoekers waargenomen feit, dat inenting van doode bacteriën, welke de influenza compliceeren, dus pneumo- en streptococcen of influenzabacillen bij personen deze niet alleen beschut tegen de complicaties, maar ook tegen de influenza zelf, meende ik, dat in de door mij en Dr. Snapper verzamelde culturen in bloedbouillon van strepto- en pneumococcen misschien ook het virus der influenza aanwezig zou zijn en probeerde ik dus het virus door filtratie door een Berkefeld-filter en enting in bloedbouillon af te zonderen. Inderdaad gelukte dit de eerste keeren; ik kreeg vloeistoffen waarin geen gewone bacteriën aanwezig waren, maar die bij 37° troebel werden. Mijn resultaten waren echter wisselend; nu eens kreeg ik wel troebeling, dan weer bleef deze uit. Nadat ik het eerst aan de Berkefeldkaarsjes had geweten bleek me ten slotte dat het al of niet verkrijgen van de troebeling af hing van een bijmenging van een geringe hoeveelheid haemoglobine en nu was ook het raadsel spoedig opgelost. Brengt men bij bouillon een weinig haemoglobine-houdende vloeistof, dan blijft dit mengsel bij gewone temperatuur helder, maar in de broedstoof is na 24 uur een troebeling gevormd. Deze ontstaat ook in pepton, zelfs in zoutsolutie; echter moet de laatste zeer precies neutraal reageeren, daar de troebeling anders uitblijft. De haemoglobine-oplossing werd steeds gemaakt door erythrocyten met zoutsolutie te wasschen, daarna met gedistilleerd water tot oplossing te brengen en vervolgens door een kaars te filtreeren.

De verklaring waarom juist met het bloed van ernstige influenzalijders deze troebeling wordt verkregen, is gemakkelijk te geven; bij deze ziekte komt door de secundaire haemolytische streptococcen een gedeeltelijke haemolyse van het bloed tot stand en het bloed dat we in de bouillon brengen, zal dus niet alleen roode bloedlichaampjes maar ook haemoglobine, vrij in het plasma, bevatten en dit wordt in de broedstoof omgezet. Om dit nog nader te bewijzen, heb ik bij een konijn de carotis blootgelegd, een weinig bloed er uit in bouillon en in een reageerbuis laten loopen (I). Daarna werd in de oorvene gedistilleerd water gespoten en korten tijd daarna weer bloed in bouillon en in een reageerbuis uit de carotis afgetapt. (II). De kolfjes bouillon werden in de broedstoof gezet. Het bloed, dat

in de buisjes was opgevangen, liet ik stollen; het tweede bevatte lichtrood gekleurd serum en spectroscopisch oxyhaemoglobine. Na 24 uur was de bouillon uit kolfje II na licht centrifugeeren om de erithrocyten te verwijderen, nog duidelijk troebel; dat van kolfje I helder. Beide bleken steriel te zijn.

Thans rest nog de vraag, waaruit de troebeling bestaat. Doet men in bouillon wat meer haemoglobine-oplossing en laat dit in de broedstoof staan, dan krijgt men den volgenden dag een troebele vloeistof en een rood neerslag. Dit laatste lost niet of heel moeilijk op in zuren, gemakkelijk in verdunde alkalien. De oplossing vertoont geen duidelijke absorptiestrepen in den spectroscoop; brengen wij er een weinig zwavel-ammonium bij, dan krijgen wij direct een duidelijke streep, karakteristiek voor het haemochromogeen. Voegen wij eerst cyaankali toe, daarna zwavel-ammonium, dan krijgen wij twee streepen, waarvan de linksche iets naar het rood is verschoven in vergelijking met de bovenstaande streep. Dit alles wijst uit, dat wij te doen hadden met haematine.

Blijkbaar hebben wij dus een autolyse van het haemoglobine. Het globine zal in de meeste gevallen, daar de bouillon niet precies neutraal is, wel opgelost blijven; in neutrale zoutsolutie kan het echter tot de troebelingen bijdragen. Wil men de troebelingen van haemoglobine in zoutoplossing krijgen, dan moet men zeer verdunde haemoglobine-oplossingen nemen, ander blijft zij uit. Dit komt, omdat de reactie van de zoutsolutie verandert door toevoeging van veel haemoglobine-oplossing.

Het troebel worden van buisjes bouillon bij 37° met bloed, dat geruimen tijd geleden aan het lichaam is ontnomen, een welbekend feit voor ieder, die veel met deze cultuurvloeistof werkt, berust natuurlijk op hetzelfde feit: autolyse en het vormen van haematine.

Resumeerende kunnen wij dus zeggen, dat de door von Angerer beschreven troebeling van bouillon, na inbrenging van filtraat van bloed van ernstige grieplijders, niet specifiek is, maar overal daar moet optreden, waar in het levend organisme in het bloed belangrijk verval van erythrocyten plaats heeft gevonden. De troebeling is geen virus, maar haematine (en globine), ontstaan uit het aanwezige haemoglobine.

Amsterdam. *Laboratorium voor de Gezondheidsleer der Universiteit.*

Scheikunde. — De Heer ZEEMAN biedt een mededeeling aan van de Heeren A. SMITS, G. L. C. LA BASTIDE en TH. DE CRAUW: *„Over het verschijnsel na anodische polarisatie."* II.

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGEWERFF).

1. In een vorige mededeeling[1]) werd aangetoond, dat het verschijnsel, dat na anodische polarisatie van ijzer in een ijzerzout-oplossing optreedt, daaraan is toe te schrijven, dat het ijzer zich bij het anodisch oplossen omgeeft met een vloeistoflaag, die zéér rijk is aan ferro-ionen. In den regel zal de verhouding $\frac{(Fe^{\cdot\cdot})}{(Fe^{\cdot\cdot\cdot})}$ in deze vloeistoflaag grooter zijn dan daar buiten. Na verbreking van den stroom zullen derhalve ferri-ionen uit de omgeving in de grenslaag diffundeeren, terwijl de ferro-ionen zich naar buiten bewegen, waardoor in de grenslaag de verhouding $\frac{(Fe^{\cdot\cdot})}{(Fe^{\cdot\cdot\cdot})}$ weer kleiner wordt. Deze verandering maakt, dat de potentiaal van het ijzer, die aanvankelijk door de verstoring van het metaal minder negatief of positief was, na verbreking van den stroom een minimumwaarde doorloopt.

Dat het hierboven vermelde inderdaad de verklaring van het verschijnsel is, werd aangetoond door het feit, dat het verschijnsel geheel verdwijnt, wanneer de ijzerzout-oplossing vooraf in een waterstofatmosfeer met ijzerpoeder eenigen tijd wordt verhit. Men krijgt dan een ferro-zoutoplossing, die met unair ijzer in electromotorisch evenwicht is, zoodat in de grenslaag bij het anodisch oplossen van het ijzer de verhouding $\frac{(Fe^{\cdot\cdot})}{(Fe^{\cdot\cdot\cdot})}$ practisch niet verandert.

2. In bovengenoemde mededeeling werd er op gewezen, dat de potentiaal van Nikkel, na polarisatie in een oplossing van $NiSO_4$ eveneens een minimumwaarde doorloopt, zoodat reeds werd vermoed, dat dit verschijnsel op dezelfde wijze zou moeten worden verklaard als dat bij ijzer.

Om dit na te gaan werd het verschijnsel bij Nikkel eerst nog eens fotografisch opgenomen, wanneer het metaal was gedompeld in een oplossing van $NiCl_2$. Het minimum kwam hierbij, zooals de nevenstaande foto (Fig. 1) laat zien, zeer duidelijk te voorschijn. Het verloop is veel sneller dan bij gebruik van een $NiSO_4$-oplossing, tengevolge van de positief katalytische werking der chloor-ionen.

Daarop werd de $NiCl_2$-oplossing in een waterstofatmosfeer eenigen

[1]) Verslag Kon. Akad. v. Wet. Dl. XXVII, p. 1253.

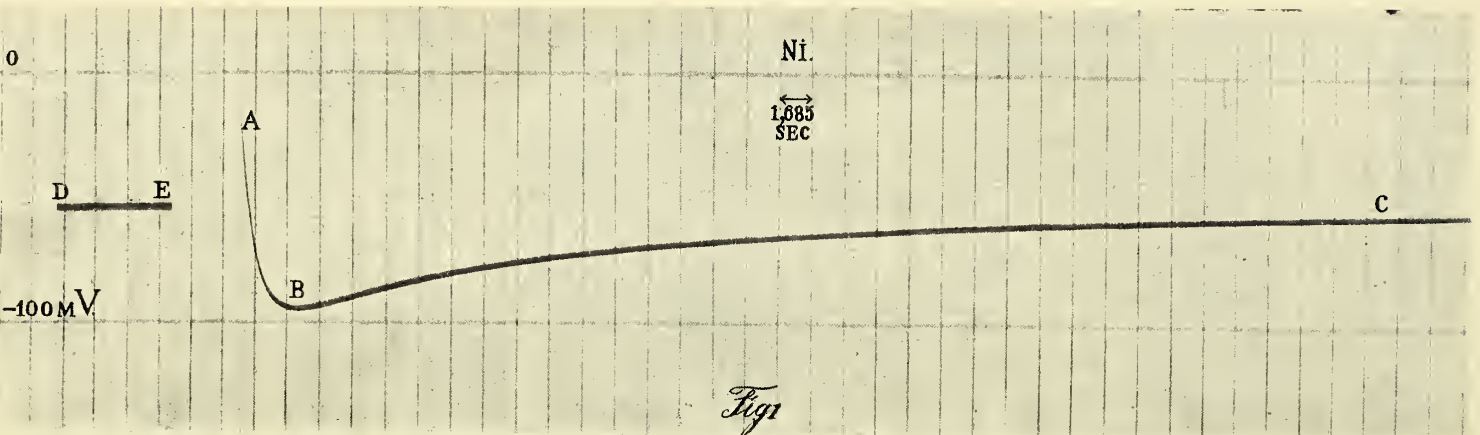


Fig 1

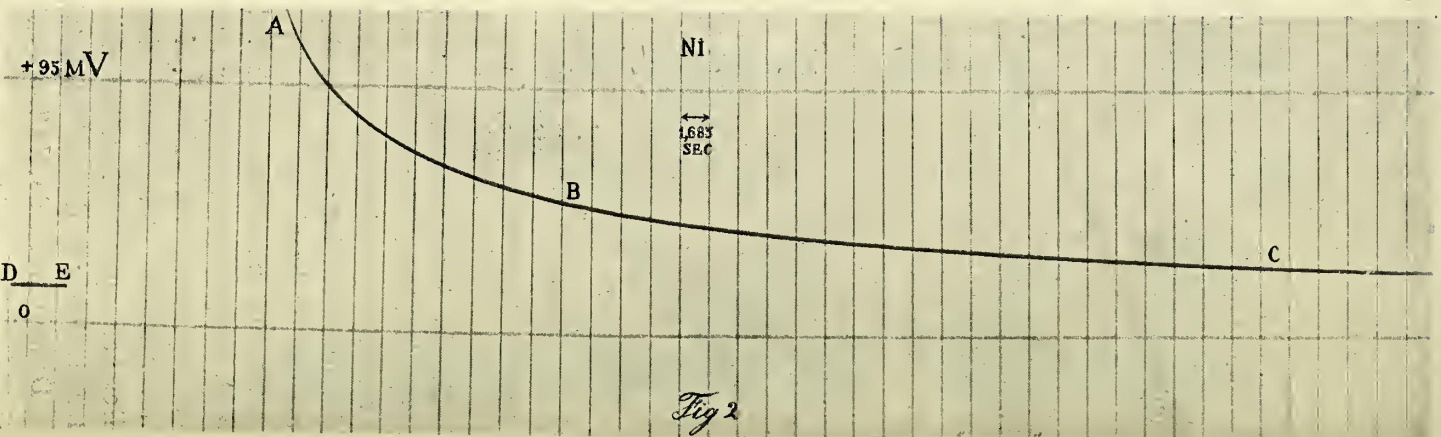


Fig 2

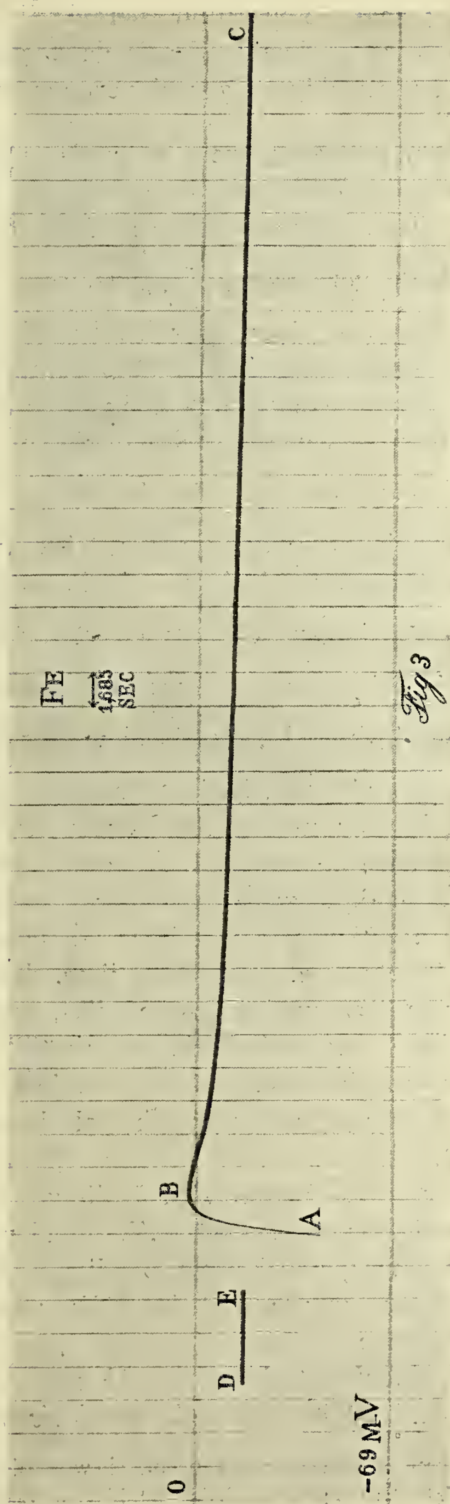


Fig 3

tijd verhit met bij lage temperatuur bereid fijnverdeeld Nikkel, waarna de proef werd herhaald. Zooals de volgende foto (Fig. 2) laat zien was nu het verschijnsel geheel verdwenen.

3. In de vorige mededeeling werd er reeds op gewezen, dat men als het ware het *spiegelbeeld van het verschijnsel* kan verwachten, wanneer men bv. ijzer, gedompeld in een ferro-ferri-zout-oplossing, tot kathode maakt. De verhouding $\frac{(Fe^{\cdot\cdot})}{(Fe^{\cdot\cdot\cdot})}$ zal aan het ijzeroppervlak het grootst zijn, daar het ijzer door het in oplossing zenden van $Fe^{\cdot\cdot}$-ionen, de grenslaag zoodanig tracht te veranderen, dat het bij unair gedrag daarmede in evenwicht kan zijn. Hoe verder de vloeistoflaag dus van het ijzer verwijderd is des te kleiner zal de verhouding $\frac{(Fe^{\cdot\cdot})}{(Fe^{\cdot\cdot\cdot})}$ zijn. Maakt men dus ijzer, in de ondersteld̀e oplossing gedompeld, een oogenblik tot kathode, dan zal het ijzer uit de grenslaag worden neergeslagen en de ionen uit de volgende laag zullen in de grenslaag diffundeeren, en daar de verhouding $\frac{(Fe^{\cdot\cdot})}{(Fe^{\cdot\cdot\cdot})}$ in die volgende laag kleiner is, komt het ijzer, na kathodische polarisatie met een vloeistoflaag in kontakt, waarin de verhouding $\frac{(Fe^{\cdot\cdot})}{(Fe^{\cdot\cdot\cdot})}$ kleiner is dan vóór de kathodische polarisatie, hetgeen een sterkere verstoring in edele richting, dus een minder negatieve potentiaal veroorzaakt. Na verbreking van den stroom zal nu door het oplossen van het ijzer genoemde verhouding weer toenemen, zoodat de potentiaal van het ijzer weer negatiever wordt. Daar het ijzer bij kathodische polarisatie wordt bedekt met een laagje ijzer, dat aanvankelijk in onedele richting van het unaire ijzer afwijkt, was hier inderdaad ook *„een verschijnsel na kathodische polarisatie"* te verwachten, dat daarin zou moeten bestaan, dat de potentiaal van het ijzer bij verbreking van den stroom, na kathodische polarisatie, een maximumwaarde doorloopt [1]).

Zooals de foto op Fig. 3 laat zien is dit vermoeden bevestigd. Het maximum *B* ligt ongeveer 30 m.V. minder negatief dan de begin-potential, die aangegeven is door het lijntje *DE*.

Er zal nu nagegaan worden, of hetzelfde verschijnsel ook bij Nikkel is waar te nemen.

Laboratorium voor Algemeene en Anorganische
Amsterdam. 27 Juni 1919. *Chemie der Universiteit.*

---

[1]) Door verkleining van de totaal-ionen concentratie wordt de potentiaal in geringe mate negatiever, zoodat deze omstandigheid het hier genoemde verschijnsel nog eenigszins tegenwerkt.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van de Heeren E. H. BÜCHNER en J. KALFF over: „VON WEIMARN's *theorie over den colloidalen toestand*".

(Mede aangeboden door den Heer JAEGER).

Een der belangrijkste inzichten, die de onderzoekingen der laatste tien jaren op het gebied der colloidchemie hebben gebracht, is zonder twijfel dit, dat men niet heeft te onderscheiden tusschen colloidale en kristallijne *stoffen*, doch tusschen den colloidalen en den kristallijnen *toestand*. Het aantal stoffen, die men steeds alleen in den kristallijnen vorm had gekend, doch later ook als colloid had leeren bereiden, was reeds meer en meer toegenomen, toen VON WEIMARN zijn onderzoekingen begon. Maar aan hem komt toch de verdienste toe, door een systematische studie aangetoond te hebben, onder welke condities men een bepaalde stof kristallijn, onder welke men haar colloidaal krijgt, en te hebben laten zien, dat men de juiste voorwaarden kiezende in staat is zeer vele, waarschijnlijk alle, kristallijne stoffen ook in den colloidalen vorm te brengen. Deze vondsten hebben wel de haar toekomende erkenning gevonden, doch zij schijnen niemand aanleiding tot nadere bestudeering gegeven te hebben, ofschoon er toch talrijke vragen rijzen. Waarschijnlijk is dit hieraan te wijten, dat VON WEIMARN zijn experimenteele resultaten bedelft onder uitgebreide theoretische bespiegelingen, die verre van duidelijk zijn, en de lezing zijner verhandelingen uiterst moeilijk maken. De fundamenteele beteekenis van zijn werk maakt het echter wenschelijk, meer aandacht er aan te wijden en het aan een kritische beschouwing te onderwerpen.

Voor heden zullen wij ons bepalen tot wat VON WEIMARN de wet der overeenstemmende toestanden der kristallisatieprocessen noemt. Wat deze wet inhoudt, zij allereerst uiteengezet. Wij zullen ons daarbij houden aan het boek „Zur Lehre von den Zuständen der Materie", zijnde dit het laatste ons toegankelijke geschrift van den auteur, hetgeen, naar wij moeten aannemen, zijn definitieve meeningen bevat; wij hopen hem bij onze beschouwing geen onrecht te doen, al maakt hij het zijn lezers niet gemakkelijk, zijn gedachtengang te volgen.

VON WEIMARN heeft in het bijzonder met één stof geëxperimenteerd

en die zeer uitvoerig onderzocht, namelijk met $BaSO_4$. Bereiden we dit door zeer verdunde oplossingen (0,001 *n.*) van een baryumzout en van een sulfaat bij elkaar te brengen, dan duurt het enkele minuten, voordat zich eenige opalescentie vertoont, en enkele uren, voor het neerslag zich afzet. In den aanvang hebben wij dus, wat men gewoonlijk een suspensie noemt; daaraan gaat, zoo mag men stellig aannemen, een stadium vooraf — gedurende de genoemde paar minuten, dat men niets ziet — waarin de deeltjes van het $BaSO_4$ nog kleinere afmetingen hebben dan die eener suspensie, en het geheel dus volgens de tegenwoordige opvatting als een colloidale oplossing, een sol, is te beschouwen. Uit minder verdunde oplossingen (0,01 tot 0,75 *n.*) krijgen we een duidelijk kristallijn neerslag, uit geconcentreerde oplossingen eindelijk ontstaat een geleiachtig precipitaat, ja bij de allersterkste (7 *n.*) slaagt men er zelfs in, een doorzichtige uit groote cellen bestaande gelei te maken, als men slechts de eene oplossing druppelsgewijs in de andere laat vloeien. Met dit voorbeeld wordt duidelijk gedemonstreerd, dat een stof al naar de wijze van haar ontstaan, in het bijzonder naar gelang van de concentraties der reageerende oplossingen, zich in den vorm van een sol of gel, beide vormen van den colloidalen toestand, of als kristal afscheidt.

Een groot aantal andere zouten werden, meer of minder uitvoerig, op dezelfde wijze onderzocht en leverden resultaten, die met de bovengenoemde overeenstemden. Al deze zouten zijn, wat men onoplosbaar, hoogstens moeilijk oplosbaar noemt; dit is een voorwaarde voor het gelukken van de bereiding van den colloidalen toestand. Is de oplosbaarheid in water te groot, zooals bij NaCl en dergelijke, dan worden organische oplosmiddelen, alcoholen of benzol, gebruikt. Men kan dan òf 't NaCl laten ontstaan bijv. uit ferrichloride en natriumaethylaat in absoluten alcohol[1]), òf een oplossing van NaCl in methylalcohol gieten in aether. In 't eerste geval krijgt men een geleiachtig precipitaat van NaCl, in het tweede een sol, waaruit zich na verloop van tijd een volumineus, „amorph" neerslag afzet.

Tot zoover de experimenten van von Weimarn, die wel schijnen aan te toonen, dat er een verband bestaat tusschen het voorkomen als colloid en de oplosbaarheid der stof in het gekozen medium. Wat nu de algemeene qualitatieve uitkomsten betreft, daarmee kunnen wij ons vereenigen. Wij hebben verscheidene van von Weimarn's proeven herhaald, wij hebben ook enkele zouten als colloid gekregen, die hij niet vermeld heeft, en wij hebben daarbij steeds bevestigd

[1]) Grimaux, C.R. 98, 105, 1884.

gevonden, dat zich uit zeer geconcentreerde oplossingen geleien of geleiachtige neerslagen afscheiden, die na korter of langer tijd in vlokjes uiteenvallen en klaarblijkelijk in grover kristalletjes overgaan [1]). Uit verdundere oplossingen ontstaat deze vorm van afscheiding onmiddellijk. Zijn wij het derhalve wat de uitkomst der proeven betreft met von Weimarn eens, tegen zijn theoretische bewerking ervan hebben wij groote bezwaren, die deels van algemeenen aard zijn, deels daarop berusten, dat de experimenten de theorie niet steunen. In de eerste plaats zullen wij onze theoretische bedenkingen uiteenzetten.

Von Weimarn formuleert zijn resultaten tot een „wet van de overeenstemmende toestanden der kristallisatieprocessen", die hij op verschillende manieren uitdrukt.

1°. In overeenstemmende toestanden is de gemiddelde *grootte* der kristalletjes, die de vaste phase vormen, voor alle stoffen gelijk.

2°. In overeenstemmende toestanden is het gemiddelde *gewicht* der kristalletjes gelijk.

3°. In overeenstemmende toestanden is het gemiddelde *aantal molekulen,* waaruit de afzonderlijke kristalletjes bestaan, gelijk.

Het is duidelijk, dat òf deze drie formuleeringen met elkaar strijden òf onder overeenstemmende toestanden telkens iets anders wordt verstaan. Von Weimarn, die dit zelf opmerkt, verklaart het laatste voor juist: de overeenstemmende toestanden, die tot het maken van kristallen van gelijk volume of gelijk gewicht voeren, zijn niet identiek. Daar men dit bij de toepassing wel in het oog houden moet, wordt deze reeds verzwaard; maar bovendien zal men zich afvragen, wat eigenlijk overeenstemmende toestanden zijn. Wil dit niets anders zeggen dan toestanden, bij welke de kristallen even groot of even zwaar zijn, dan is von Weimarn's „wet" niets meer dan een definitie, dan het geven van een naam. Hij bedoelt natuurlijk wel meer, n.l. dat er voor alle stoffen bepaalde omstandigheden zijn te vinden, waarbij de kristalgrootte gelijk is, maar behoort dan ook die omstandigheden op eenigerlei wijze aan te geven, wil er van een wet, een afhankelijkheid sprake zijn. Wellicht zal vergelijking met van der Waals' wet der overeenstemmende toestanden, waaraan von Weimarn zijn denkbeeld waarschijnlijk heeft ontleend, het ver-

---

[1]) Het is goed, hier eraan te herinneren, dat v. W. de colloidale neerslagen als aggregaten van submikroskopische kristalletjes opvat. Ofschoon deze opvatting o. i. volstrekt niet, zooals v. W. meent, door hem bewezen is, komt zij ons wel waarschijnlijk en aannemelijk voor. Wij zullen daarom in het vervolg tegenover colloidaal stellen grofkristallijn, zonder dat daarmee bedoeld is, dat de deeltjes van dezen toestand al grooter dan mikroskopische afmetingen hebben.

schil duidelijker maken. De wet van VAN DER WAALS zegt, dat, als men druk, temperatuur en voluum uitdrukt in de kritische waarden, men voor alle stoffen eenzelfde vergelijking krijgt; toestanden, waarbij de aldus gemeten p, t, v gelijke waarden hebben, *noemt* men overeenstemmend. Bij VON WEIMARN vinden we wel 't laatste, den naam, doch niet het eerste, de wet.

Terwijl hij een groot deel van zijn werk gewijd heeft aan het qualitatieve bewijs van wat hij een „wet" noemt — en met succes —, vindt men slechts in enkele paragrafen een poging tot een scherpere formuleering, tot het in een mathematische vergelijking uitdrukken der afhankelijkheid, tot wat wij pas een wet meenen te moeten noemen. Deze neemt volgens v. W. den volgenden vorm aan

$$N = \frac{P}{L} K_{AB} \cdot K_{CD} \cdot K_{BD} \cdot K_{AC} Z$$

N is de „neerslagcoefficient", van welken de vorm van het precipitaat geheel afhankelijk is; deze wordt blijkens de formule door een groot aantal factoren beheerscht, doch gelukkig behoeft men in verreweg de meeste gevallen niet met alle rekening te houden. De termen K_{AB} enz. n.l. geven den graad der physische associatie en der chemische samengesteldheid der stoffen AB enz. aan. Is de associatie een bekende en voor meting vatbare grootheid, de gecompliceerdheid van het molecuul is een zeer vaag, in elk geval niet in cijfers uitdrukbaar begrip. Men zou hiermee dus in groote moeilijkheden geraken, als er (ook volgens v. W.) geen redenen bestonden, om ze verder maar uit de formule weg te laten. Wij behoeven dus op dit punt niet in te gaan. Z is de viscositeit van het kristallisatie-medium. Ook deze grootheid heeft geen overwegend belang. Zooals wij straks zullen zien, gaat het bij de toepassing om waarden van N, die eenige honderde of duizende malen grooter worden; een verandering in de viscositeit van een dergelijke orde is zelfs voor geconcentreerde oplossingen onbekend; de grootste waarde, die bekend is, is $\eta = 2,87$ (water $= 1$) voor een $4\,n.$ $NaHSO_4$ oplossing. Moge men ook tot $7\,n.$ oplossingen gaan en moge de viscositeit van Na-zoutoplossingen kleiner zijn dan die van Mn of andere zouten, die door v. W. en door ons gebruikt zijn, een invloed van beteekenis kan klaarblijkelijk de term Z niet hebben. Wij houden dan als factoren van belang slechts P en L over. Hiervan is L de oplosbaarheid der geprecipiteerd wordende stof in grofkristallijnen toestand; P is het verschil der hoeveelheid dezer stof, die door de reactie ontstaat, en de oplosbaarheid L, m. a. w. de hoeveelheid neerslag, die gevormd wordt.[1]) Natuurlijk zijn P en L in dezelfde

[1]) In elk geval rekent v. W. met P, zooals zij hierboven in overeenstemming

maat uit te drukken en op hetzelfde volume vloeistof te betrekken.

De formule komt dus ten slotte hierop neer, dat de vorm van het neerslag beheerscht wordt door het aantal malen, dat de aanwezige hoeveelheid stof de hoeveelheid, die in het gegeven volume kàn oplossen, overtreft; men kan dit specifieke oververzadiging noemen. Bij een oplosbare stof, dus groote L (betrekkelijk groot dan altijd) zal men een groote P moeten hebben, d. w. z. zeer sterke oplossingen dienen samen te brengen, ten einde eenzelfde soort van precipitaat te krijgen, als men met minder oplosbare stoffen bij minder sterke oplossingen reeds krijgt. Daar, om een voorbeeld te noemen, $BaSO_4$ veel sterker oplost dan CuS moet men om geleiig $BaSO_4$ neer te slaan uiterst geconcentreerde oplossingen maken, terwijl men het CuS reeds uit meer gebruikelijke oplossingen als gelei precipiteert. Wat dit betreft, bevestigt het experiment de theorie ten minste qualitatief, maar de formule, zooals zij wordt gegeven, leidt tot een andere gevolgtrekking, die volgens v. W. geheel onjuist is. Wij bedoelen deze, dat N alleen afhangt van P/L, niet van de absolute waarde van P. Ofschoon men meenen zou, dat het hetzelfde moest zijn, of men een bepaalde N krijgt door een groote P of door een kleine L, heeft, naar v. W. uitdrukkelijk opmerkt, de absolute concentratie en dus de absolute waarde van P wel degelijk een invloed van beteekenis; zij veroorzaakt het ontslaan van een gel of een sol.[1]) Dat, indien dit juist is, de geheele formule waardeloos wordt, schijnt v. W. niet te hebben ingezien.

Over het verband tusschen de formule en de overeenstemmende toestanden drukt v. W. zich zeer voorzichtig uit, anders dan men zou verwachten. Hij uit namelijk „met een zekeren graad van waarschijnlijkheid het vermoeden", dat overeenstemmende toestanden der kristallisatieprocessen bij verschillende stoffen optreden voor gelijkheid van N. Dus twee stoffen slaan in denzelfden vorm neer, als

---

met Grundzüge der Dispersoidchemie gedefinieerd is. Zelf noemt hij P een vormingsnelheid, en definieerde haar ook als zoodanig in Koll. Z. 3, 286. Volgens Zustände p. 88 is dit echter geen snelheid in den gewonen zin van het woord, maar de hoeveelheid neerslag, die zich bijna oogenblikkelijk afscheidt, terwijl in hetzelfde werk p. 7 gesproken wordt van de hoeveelheid stof, die zich na korter of langer tijd moet afscheiden. Over de dimensie van P laat v. W. ons derhalve eenigszins in twijfel.

[1]) Deze uitspraak is te vinden in Grundzüge, p. 44; in Zustände komt zij niet meer voor. Wellicht heeft v. W. haar laten vallen. Wij wilden er echter op wijzen, omdat Taylor in zijn Chemistry of colloids, p. 170 haar zonder eenige opmerking overneemt. Misschien is er mee bedoeld, dat in het geval van groote P de heele vloeistof tot één gelei wordt, terwijl in het geval van kleine L een geleiachtig — al of niet vlokkig — neerslag in de vloeistof zweeft.

$N_1 = N_2$ of $\frac{P_1}{L_1} = \frac{P_2}{L_2}$. Dit zou nu, volgens onze opvatting van een wet, pas de wet der overeenstemmende toestanden kunnen worden genoemd. En om deze te toetsen hebben wij in de eerste plaats een aantal experimenten uitgevoerd met verschillende zouten, wier oplosbaarheid sterk uiteen liep. Zooals reeds opgemerkt, geeft v. W. alleen over het $BaSO_4$ en het nog te bespreken $Al(OH)_3$ cijfers; van eenige, als $CaSO_4$, AgCl(Br,J), $PbSO_4$, $PbCl_2$ vermeldt hij, dat ze uitvoerig zijn onderzocht, zonder meer; van een groot aantal andere zegt hij slechts, dat hij ze in alle mogelijke neerslagsvormen heeft gekregen. Wij hadden dus voor de toetsing ons eigen cijfermateriaal te zoeken en te bepalen.

Het gemakkelijkste middel om na te gaan, of een stof in den geleiachtigen toestand is te krijgen, bleek ons de methode van v. W. die hierin bestaat, dat men een druppel van de eene oplossing in de andere vloeistof, die zich in een reageerbuis bevindt, laat vallen. Zooals v. W. beschreven heeft voor het $BaSO_4$, overtrekt zich dan (bij voldoende concentratie) de druppel met een volkomen doorzichtig huidje van $BaSO_4$; hij zakt dan uit, en valt ten slotte op den bodem, maar geruimen tijd blijft het huidje geheel helder. Langzamerhand echter wordt het wit troebel; de submikroskopische kristalletjes, waaruit het bestaat, groeien aan; de colloidale toestand gaat in den grofkristallijnen over. Men kan dit ook met grootere hoeveelheden gedaan krijgen, maar de druppelmethode is het eenvoudigst en duidelijkst, daar òf de druppel helder is, en hoe lang hij helder blijft, zeer gemakkelijk is waar te nemen [1]).

Juist dit laatste is ook van belang, want de duur van het helder blijven is een maat voor de stabiliteit van den colloidalen toestand. En zooals wij den colloidalen toestand pas krijgen bij groote concentraties, zoo zal ook, naar men mag verwachten, zijn stabiliteit toenemen, naarmate de concentratie toeneemt, d. w. z. — als wij op de formule letten — naarmate P grooter is. Wij hebben dus niet alleen, dat een colloidaal neerslag voor een stof met grooter L pas mag ontstaan bij grooter P, maar ook, dat het bij een stof met grooter L bij bepaalde P minder stabiel is, sneller in den grofkristallijnen toestand moet overgaan. Wel is waar, heeft men bij deze werkwijze een der stoffen in overmaat, doch wij hebben ons overtuigd, dat dit geen invloed heeft; wij hebben nl. steeds zoowel een druppel A bij

---

[1]) Het is ook een scherp criterium, veel beter aan te geven dan de vorm van een neerslag, die zich slechts als vlokkig, of geleiig of samenhangend enz. laat beschrijven.

de vloeistof B gevoegd, als omgekeerd een druppel B bij A. Daar dit hetzelfde resultaat had, mogen wij aannemen, dat ook bij het samenbrengen van gelijke hoeveelheden dezelfde uitkomst zou zijn verkregen [1]).

Wat het $BaSO_4$ betreft, kunnen wij de proeven van v. W. geheel en al bevestigen; al naar gelang van de concentratie der reageerende oplossingen verkrijgt men solen en suspensies, kristallijne en vlokkige geleiachtige neerslagen, en tamelijk bestendige heldere of troebele geleien. Wij hebben slechts op te merken, dat men niet zijn toevlucht behoeft te nemen tot de minder voorkomende zouten baryumrhodanide en mangaansulfaat. v. W. heeft deze gekozen wegens de mogelijkheid om daarvan oplossingen tot 7 normaal toe te maken; men kan echter ook met baryumbromide en -jodide eenerzijds, ammoniumsulfaat anderzijds ver genoeg komen, om de geleien te kunnen bereiden.

Dezelfde proef hebben wij nu genomen met $CaSO_4$ uit CaJ_2 en $(NH_4)_2SO_4$, CaF_2 uit CaJ_2 en NH_4F, BaF_2 uit BaJ_2 en NH_4F, $(COO)_2Ba$ uit $(COONH_4)_2$ en $BaBr_2$, $(COO)_2Ca$ uit $(COONH_4)_2$ en CaJ_2, $MnCO_3$ uit $MnSO_4$ en Na_2CO_3, $Ba(NO_3)_2$ uit $BaBr_2$ en HNO_3. Bij al deze combinaties hebben wij volkomen doorzichtige druppels gekregen, die vaak zeer langen tijd bleven bestaan [2]). Bij al deze constateeren wij derhalve het optreden van den colloidalen toestand, van een neerslag, gelijk van aard met dat van $BaSO_4$ uit 4 à $5n$-oplossingen gemaakt. En toch zijn de waarden van L voor deze zouten zeer uiteenloopend. Nemen wij eerst $BaSO_4$, dan krijgen we, daar $L = 2.10^{-5}$ equivalenten per liter, voor N ongeveer 100000. Voor $CaSO_4$, welks oplosbaarheid 0,03 eq. per liter bedraagt, wordt N, daar de gebruikte oplossing 8,3 n. was, 140. Wij krijgen dus deze tabel:

CaF_2	$L = 4.10^{-4}\ \frac{eq}{l}$	$N =$ 3400
BaF_2	18.10^{-3}	75
$CaSO_4$	3.10^{-2}	140
$BaSO_4$	2.10^{-5}	100000

Wij komen dus tot eenzelfde soort van neerslag, niettegenstaande

[1]) Men zou een bezwaar kunnen vinden in den invloed der in overmaat aanwezige ionen, die de oplosbaarheid verkleinen. In de formule is echter sprake van de oplosbaarheid voor groote kristallen in water, zoodat we slechts hiermede te maken hebben. Wellicht is dit maar een benadering.

[2]) Wij hebben altijd bij kamertemperatuur gewerkt, tenzij 't tegendeel wordt vermeld. Bij sommige stelsels lukte het niet altijd; onbegrijpelijk is dit niet, waar wij met instabiele toestanden te doen hebben.

N uiteenloopt van 75 tot 100000. Voor $BaSO_4$ bestaat volgens v. W. 't gebied der heldere gelei boven $N = 90000$, terwijl de kristallijne neerslagen ontstaan voor waarden van N tusschen 50 en 20000. De wet der overeenstemmende toestanden zou dus eischen, dat $CaSO_4$, CaF_2, BaF_2 in de concentraties, die wij gebruikten, kristallijn neersloegen, in flagranten strijd met het resultaat der proef [1]). Hetzelfde geldt voor de andere genoemde zouten.

Een andere groep zouten gaf eveneens resultaten, die niet met de wet overeenstemmen. Zij bestaat uit AgCl, AgBr, AgJ, PbJ_2, $PbCl_2$. De waarden voor L en N zijn

AgCl . . .	$L = 1.10^{-5}$	$N = 7 \times 10^6$
AgBr . . .	7.10^{-7}	8×10^6
AgJ	$1{,}5.10^{-8}$	3×10^8
PbJ_2	$4{,}8.10^{-3}$	360

Deze wijken van de eerstgenoemde stelsels in zooverre af, dat de heldere druppel wel even ontstond, doch slechts enkele seconden bestaan bleef; hij werd snel troebel en viel uiteen. De colloidale toestand is dus bestaanbaar, maar zeer instabiel. Ook dit is klaarblijkelijk in strijd met de wet. In één groep komen N-waarden van 360 en 300×10^6; terwijl we bij het AgJ een zeer bestendige gelei moesten verwachten, bestendiger nog dan het $BaSO_4$, blijkt zij juist instabiel; het PbJ_2, waarvan de verwachting was, dat het kristallijn zou zijn, blijkt nog in colloidalen toestand te verkrijgen. $PbCl_2$ verscheen bij kamertemperatuur niet colloidaal, wel eventjes bij 30°.

De derde groep zouten konden wij niet als heldere gelei verkrijgen; het zijn $PbSO_4$, $PbBr_2$, Ag_2SO_4, $KClO_3$, $AgNO_2$. Wel zijn er van de eerste twee door samenvoegen van equivalente hoeveelheden in reageerbuizen dergelijke troebele colloidale precipitaten te verkrijgen, als men van het $BaSO_4$ maakt, zoodra men de uiterste concentratie verlaat. Heel snel valt het nog eenigszins geleiig samenhangende neerslag in kleine vlokjes uiteen, die zeer spoedig bezinken. Daarentegen geeft bijv. het $KClO_3$ (uit $NaClO_3 + KNO_2$) een onmiddellijk kristallijn neerslag, dat geen oogenblik eenigen samenhang vertoont. Klaarblijkelijk kan men hier geen voldoend groote P (onze oplossingen waren $5\,n.$) bereiken, omdat de oplosbaarheid te groot is. Dit komt dus met de verwachting wel overeen, maar de beide loodzouten geven weer verrassingen: immers N wordt resp. 6500 en 70, terwijl men bij vergelijking met $BaSO_4$ minstens 20000 moest verwachten. Merkwaardig is ook een vergelijking van $PbBr_2$ en BaF_2,

[1]) Hierbij valt op te merken, dat BaF_2 en CaF_2 door bestendigheid uitmunten en zeer langen tijd blijven bestaan.

die gelijke N hebben en in den vorm van het neerslag sterk verschillen.

Dit alles geeft ons, gelooven wij, het recht v. W.'s formule als onhoudbaar te qualificeeren. Zoo groote afwijkingen als wij hebben gevonden, berooven de formule van alle beteekenis. Dat de concentratie der oplossingen een rol speelt van belang voor den vorm van het neerslag, ontkennen wij natuurlijk volstrekt niet; uit de proeven volgt het onmiskenbaar; maar wat wij oordeelen door onze proeven bewezen te hebben, is, dat die afhankelijkheid niet op zoo eenvoudige wijze kan uitgedrukt worden. Wij vermoeden, dat men, om haar op rationeele wijze af te leiden, vooral zal moeten letten op de snelheid, waarmee zich het neerslag vormt; bij geconcentreerde oplossingen is deze natuurlijk groot, omdat de c's groot zijn, maar als men verschillende stoffen vergelijkt, zullen ook de snelheidsconstantes in aanmerking komen, en die kunnen groote afwijkingen van elkaar vertoonen. Doch hierop willen wij thans niet verder ingaan.

Er is nog een andere manier, om de wet te toetsen, en die heeft v. W. gekozen. Zijn uitgangspunt is deze vraag geweest: waarom slaat bij gelijke concentraties $BaSO_4$ kristallijn neer, $Al(OH)_3$ geleiig? Zijn wet geeft daarop het antwoord: als men slechts $^P/_L$ gelijk maakt, dan krijgt men ook dezelfde soort van neerslag. Hierbij doet zich de moeilijkheid voor, dat men de oplosbaarheid van $Al(OH)_3$ niet kent. Wel zou men uit analogie met $Fe(OH)_3$ de grootte kunnen schatten, maar in de eerste plaats loopen de waarden, die men daarvoor vindt aangegeven [1]) uiteen van 0,15 mg/liter tot 5.10^{-5} mg/liter, en ten tweede moeten we de oplosbaarheid hebben voor groote kristallen, terwijl de hier voor $Fe(OH)_3$ gegeven waarden gelden voor het colloidale neerslag. Met zijn zooveel kleinere deeltjes moet men hier een veel grootere oplosbaarheid verwachten [2]), zoodat men aan een berekening op deze wijze weinig heeft. Toch hebben wij beproefd, wat men kon bereiken, indien men ferrichloride met ammonia neerslaat. Daarbij stieten wij echter op deze moeilijkheid, dat het gevormde hydroxyd na eenigen tijd weer oplost. Voor geconcentreerde oplossingen was ons dit wel bekend: de bereiding van de colloidale ijzeroplossing der pharmakopee — liquor ferri dialysati — berust er op. Maar ook bij de verdunde oplossingen vertoont het verschijnsel zich. Uit $\frac{n}{10}$ oplossing kregen wij een geleiig, samen-

---

[1]) ALMKVIST, Z. anorg. Chem 103, 239; en LANDOLT—BÖRNSTEIN—ROTH, Tabellen.

[2]) Deze invloed kan bij zoo kleine deeltjes reusachtig worden, VALETON, dissertatie Amsterdam 1916.

hangend, vrij snel bezinkend neerslag, uit $\frac{n}{20}$ een troebeling, die zich vlug tot enkele vlokjes samenbalde; na een paar uur waren deze precipitaten verdwenen en de vloeistof was weder helder. Ook bij $\frac{n}{40}$ en $\frac{n}{100}$, zelfs bij $\frac{n}{200}$, ontstond een troebeling, die voor de eerste twee in korten tijd, voor de laatste echter langzamerhand, verdween; al deze vloeistoffen zijn ten slotte weder helder. Opgemerkt moge nog worden, dat 100 cc. der beide oplossingen bij kamertemperatuur bij elkaar werd gedaan, zoodat het totale volume 200 cc. bedroeg. Bij het samenvoegen van warme oplossingen kregen wij gewoonlijk heelemaal geen neerslag, soms wel, zonder dat wij tot nu toe de oorzaak konden opsporen. Men kan derhalve op deze proeven geen berekeningen laten steunen, en geen vergelijking maken met de neerslagen van $BaSO_4$.

Evenmin lijkt dit mogelijk met het $Al(OH)_3$, zooals v. W. doet. Deze is van meening, dat de meest op elkaar gelijkende neerslagen verkregen worden bij 100° uit $\frac{n}{500}$ oplossingen voor $Al(OH)_3$ en 4 n. oplossingen voor $BaSO_4$, waaruit hij dan met zijn formule de oplosbaarheid van $Al(OH)_3$ berekent op 10^{-7} g. per liter bij 100°, een waarde die hem op andere gronden waarschijnlijk lijkt. Wij moeten echter verklaren tusschen deze beide neerslagen absoluut geen overeenkomst te zien. Bij $\frac{n}{500}$ $AlCl_3$ krijgen wij in de warmte onmiddellijk een vlokkig fijn verdeeld neerslag; na een poosje opaliseert de geheele vloeistof blauw. Zendt men door de vloeistof het licht van een booglamp, dan ziet men geen vlokken, doch een homogenen lichtbundel. In de koude duurt het langer, voor er opalescentie optreedt; met de lamp bekeken, is de intensiteit van het verstrooide licht grooter; het blijft echter homogeen, en zelfs na 4 uren zijn er geen vlokjes te zien. Daarentegen is het $BaSO_4$ uit 4 n. oplossingen een dikke, witte gelei, met vrij grooten samenhang. Eenige gelijkenis, doch alleen in de eerste oogenblikken, vertoont het met $\frac{n}{1}$ $Al(OH)_3$. Wilde men hiermee v. W.'s berekening uitvoeren, dan komt de oplosbaarheid van het $Al(OH)_3$ 500 $\times$ zoo groot uit.

Wij hebben deze proeven herhaaldelijk genomen en ook andere concentraties beproefd, doch hebben in de verdunde $AlCl_3$ oplossingen nooit een neerslag verkregen, dat op het $BaSO_4$ leek. Wel blijkt de wijze van neerslaan van allerlei omstandigheden afhankelijk. Of men

snel of langzaam samengiet, of men in reageerbuizen werkt of in bekerglazen met volumina van 100 of 200 cc., maakt verschil; aluminiumnitraat en -chloride in concentraties van $\frac{n}{10}$, $\frac{n}{20}$, $\frac{n}{40}$, $\frac{n}{100}$, $\frac{n}{200}$ geven evenwel vrijwel gelijke neerslagen. Om den aard van het neerslag — vlokkig of homogeen — goed te kunnen waarnemen, hebben wij gewoonlijk, zooals boven reeds werd aangegeven, een lichtbundel door de vloeistof laten gaan; dit maakt de onderscheiding veel gemakkelijker.

Uit het bovenstaande volgt wel, dat men den vorm van het neerslag van een hydroxyde nog niet beheerscht; hij hangt te veel van bijomstandigheden af, dan dat wij hem in een formule in rekening kunnen brengen. Op deze gronden achten wij v. WEIMARN's berekening waardeloos, evenzeer als zijn stelling omtrent de betrekking tusschen concentratie en neerslagsvorm. Wellicht heeft v. W. bedoeld — zooals feitelijk de formule eischt — neerslagen te vergelijken, waarbij de grootte der afzonderlijke kristalletjes gelijk is. Maar dan ware 't noodig geweest eerst een verband vast te stellen tusschen die kristalgrootte en het voorkomen van het neerslag, daar het niet vaststaat, dat veel op elkaar lijkende, „vlokkig geleiige" precipitaten uit even groote deeltjes bestaan. Dan laten we trouwens nog daar, dat kleine deeltjes ook bij de erg verdunde oplossingen van $BaSO_4$, dus aan den kant der solen, voorkomen; men heeft misschien meer recht, die met de beschreven zwakke $Al(OH)_3$-stelsels te vergelijken, dan de door v. WEIMARN gekozen geconcentreerde oplossingen.

Resumeerende besluiten wij, dat, hoe waardevol v. W.'s werk ook in qualitatief opzicht moge zijn, zijn wet der overeenstemmende toestanden noch tegen een theoretische kritiek bestand is, noch door de feiten wordt gesteund.

Anorg. Chem. Labor. Universiteit van Amsterdam.

Scheikunde. — De Heer VAN ROMBURGH biedt een mededeeling aan van den Heer M. J. SMIT: *„Over eenige nitroderivaten van het dimethylaniline"*.

(Mede aangeboden door den Heer COHEN).

In 1914 verscheen een verhandeling van VAN ROMBURGH en Mej. WENSINK [1]), waarin de inwerking van ammoniak en methylamine op 1.2.3.4. trinitrodimethylaniline wordt beschreven. Hierbij werd het merkwaardige verschijnsel gevonden, dat, behalve de nitrogroep op de plaats 3, ook de dimethylaminogroep door de amino-, resp. methylaminogroep wordt vervangen. Op aansporing van Prof. VAN ROMBURGH heb ik een meer uitgebreid onderzoek over het gedrag van aminen en in het algemeen van verbindingen, die een aminogroep bevatten, tegenover de trinitroderivaten van het dimethylaniline, in het bijzonder tegenover het 1.3.4.6.-isomeer, ter hand genomen. Deze onderzoekingen verkeeren echter betrekkelijk nog in een beginstadium en zullen te zijner tijd in een proefschrift uitvoerig worden beschreven.

Alvorens tot bovengenoemde onderzoekingen over te gaan, kwam het mij gewenscht voor de reactie, waarbij de beide isomere trinitroderivaten van het dimethylaniline ontstaan, eenigszins nauwkeuriger te bestudeeren. Immers bij de nitreering van het 1.3.4 dinitrodimethylaniline [2]) ontstaat in hoofdzaak het 1.3.4.6.-derivaat; de isomere 1.2.3.4.-verbinding treedt slechts in geringe hoeveelheid op. Daar nu juist deze laatste, in verband met den stand der nitrogroepen, verreweg het gemakkelijkst reageert, leek het mij de moeite waard te trachten de omstandigheden te vinden, waaronder een betere opbrengst hiervan zou kunnen worden verkregen.

Ondanks talrijke proefnemingen, waarbij onder de meest uiteenloopende omstandigheden werd gewerkt, is het mij niet gelukt de proefcondities zoodanig te wijzigen, dat de vermeerdering van de opbrengst aan 1.2.3.4 trinitrodimethylaniline van eenige beteekenis was.

Bij deze proeven kwam weer ten duidelijkste de groote invloed voor den dag, dien de aanwezigheid van salpeterigzuur uitoefent op

[1]) Deze Verslagen XXIII, 966 [1914].

[2]) VAN ROMBURGH, Verslagen Kon. Akad. v. Wet. 23 Febr. 1895. III, 257.

de snelheid, waarmede de reactie verloopt, een verschijnsel, dat reeds herhaaldelijk bij nitreeringsproeven is waargenomen en ook bij de nitreering van het 1.3.6.-dinitrodimethylaniline (zie hieronder) werd teruggevonden. Voorts bleek het van belang het salpeterzuur niet te lang te doen inwerken.

Gebruikt men voor de nitreering salpeterzuur, dat geheel vrij is van salpeterigzuur, dan is het noodzakelijk vrij geconcentreerd salpeterzuur te nemen (S. G. 1.37—1.40), ten einde een te langen duur van de reactie te voorkomen. Om een groote temperatuurstijging te vermijden, dient een vrij groote overmaat salpeterzuur te worden gebruikt.

In den regel werd op 1 gram van het uitgangsproduct 10—12 c.c. salpeterzuur toegevoegd. Zoo noodig kan men door toevoeging van een korreltje natriumnitriet de reactie versnellen. Onder deze omstandigheden ontstaan vrijwel alleen de beide isomere trinitroderivaten.

Bezigt men echter salpeterzuur, dat veel salpeterigzuur bevat, laat men het langen tijd inwerken of werkt men bij een temperatuur, die aanmerkelijk boven 20° C. ligt, dan begint ook het salpeterigzuur zijn invloed te doen gelden en ontstaan gemakkelijk nitrosoderivaten, waardoor de scheiding der gezochte isomeren ten zeerste wordt bemoeilijkt en uit den aard der zaak de opbrengst minder wordt. Onder deze omstandigheden konden twee lichtgele verbindingen worden geïsoleerd, resp. smeltende bij 108°—109° C. en 201° C. Beide kunnen uit alcohol worden omgekristalliseerd en vertoonen zich dan in den vorm van fijne lichtgele naaldjes met groenachtigen weerschijn. Het eerste kan, zooals later bleek, worden verkregen door inwerking van salpeterigzuur op het 1.3.4.-dinitrodimethylaniline en gaat door behandeling met salpeterzuur (S. G. 1.41) in het tweede over. Dit laatste ontstaat op zijn beurt bij de inwerking van salpeterigzuur op het 1.3.4.6.-trinitrodimethylaniline.

Naar alle waarschijnlijkheid hebben we hier dus te doen met het 1.3.4.-dinitrophenylmethylnitrosamine (Smp. 108°—109°) en het 1.3.4.6. trinitrophenylmethylnitrosamine (Smp. 201°).

Het inwerkingsproduct van salpeterigzuur op de 1.2.3.4.-trinitroverbinding, eveneens een gele stof met groenachtigen reflex, die, uit alcohol omgekristalliseerd, bij 96°—97° C. smelt, kon niet worden aangetoond. Dit is trouwens niet te verwonderen, gezien de geringe hoeveelheid van het 1.2.3.4.-isomeer, die bij de reactie ontstaat.

Directe nitreering van het *m*-nitrodimethylaniline (Smp. 60°) met behulp van salpeterzuur (S. G. 1.4) leidde niet tot een beter resultaat. Ook hierbij ontstaat hoofdzakelijk de 1.3.4.6.-verbinding.

Ook de nitreering van het 1.3.6.-dinitrodimethylaniline, dat, evenals het overeenkomstige 1.3.4.-isomeer, door behandeling van dimethylaniline bij aanwezigheid van overmaat zwavelzuur ontstaat [1]), werd door mij nader onderzocht. Reeds VAN ROMBURGH had gevonden [2]) dat het hoofdproduct der reactie 1.3.4.6.-trinitrodimethylaniline is. Naast deze verbinding kan nu in geringe hoeveelheid een stof worden gewonnen, die uit aethylacetaat in zeer fraaie, gele, ruitvormige kristallen werd verkregen. Zij smelt onder geringe ontleding bij 132° tot een lichtgele vloeistof.

Oorspronkelijk meende ik een nieuw trinitroisomeer in handen te hebben, dat dan naar alle waarschijnlijkheid de 1.2.3.6.-verbinding zou zijn. Toen ik echter, in de hoop de opbrengst te vergrooten, de omstandigheden varieerde en daarbij eenmaal een geringere hoeveelheid salpeterzuur voor de nitreering gebruikte, steeg de temperatuur tot 40° C. en trad een heftige ontwikkeling van bruine dampen op. Tegen mijn verwachting in was nu inderdaad meer van deze verbinding ontstaan. Dit bracht mij op de gedachte met een inwerkingsproduct van salpeterigzuur te doen te hebben. Dit vermoeden bleek juist te zijn. Lost men de 1.3.6.-verbinding op in verdund zwavelzuur (1 : 1) en voegt men natriumnitriet toe, dan ontstaat vrijwel quantitatief de bovengenoemde verbinding. Door behandeling met salpeterzuur (S. G. 1,4) gaat zij in het bovenbeschreven nitrosamine (Smp. 201°) over. Zij moet derhalve als het nitrosamine der 1.3.6.-verbinding worden beschouwd.

Ook bij de nitreering van het 1.3.6.-dinitroderivaat is de invloed van salpeterigzuur op de snelheid, waarmede de reactie verloopt, buitengewoon groot. Door toevoeging van ureum kan zij vrijwel tot stilstand worden gebracht. Wordt de reactietemperatuur aanmerkelijk hooger dan de kamertemperatuur, dan vindt men ten slotte alleen de bij 201° smeltende verbinding als reactieproduct. Zoowel de bij 132° smeltende stof als het 1.3.4.6.-trinitroderivaat gaan daarbij in genoemd nitrosamine over.

Herhaalde pogingen om een isomeer trinitroderivaat te verkrijgen, hadden geen van alle succes. Steeds weer komt het nitrosamine te voorschijn.

Deze onderzoekingen worden voortgezet en zullen later uitvoeriger worden beschreven.

Bergen op Zoom, Juni 1919.

---

[1]) Rec. VI 253 [1887].

[2]) Deze Verslagen III, 258.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt een mededeeling aan van den Heer F. GOUDRIAAN over: „*De natriumzinkaten. Evenwichten in het stelsel Na_2O-ZnO-H_2O*".

(Mede aangeboden door den Heer F. M. JAEGER.)

De gegevens, welke men in de literatuur aantreft, omtrent de inwerking van de sterke basen der lichte metalen op de onoplosbare zwakke hydroxyden der zware metalen, zijn zeer tegenstrijdig en slecht gedefinieerd. Zoo wordt doorgaans aangenomen, dat de hydroxyden van zink, aluminium, lood, tin een amphoter karakter vertoonen, zoodat zij in een overmaat sterke base „oplossen" onder vorming van zouten. Daarentegen zouden de hydroxyden van talrijke, andere zware metalen geen neiging vertoonen om dergelijke zouten te vormen en zou daarmede het sterkere elektro-positieve karakter dezer metalen in het licht treden. Toch is het een feit, dat de hydroxyden van de z.g. sterk elektro-positieve metalen onder sommige omstandigheden eveneens een amphoter karakter kunnen vertoonen, ja zelfs koperhydroxyde kan in een sterke oplossing van NaOH of KOH oplossen. Waarschijnlijk zijn dus de verschillen, die bij de metaalhydroxyden voorkomen, slechts van quantitatieven aard en zal het van belang zijn na te gaan in welke mate de verschillende hydroxyden het verschijnsel vertoonen en welke verbindingen hierbij gevormd worden. In de eerste plaats is dit van belang voor de analytische scheikunde, waar talrijke scheidingen op het verschil in oplosbaarheid der hydroxyden berusten; verder kunnen onderzoekingen over dit onderwerp ons iets naders leeren omtrent de onderlinge affiniteit der metaaloxyden en -hydroxyden.

Tot dusver is nog niet met zekerheid te zeggen, welke verbindingen zich bij de inwerking der hydroxyden op sterke basen vormen en onder welke omstandigheden ze bestendig zijn. In zuiveren toestand zijn ze niet geisoleerd en nauwkeurig beschreven. Zelfs omtrent de natuur der hydroxyden zelf is men nog geheel in het onzekere. Meestal toch verkrijgt men deze lichamen als volumineuze, gelachtige produkten en de vraag rijst of men deze te beschouwen heeft als vaste phasen van constante of wisselende samenstelling, of wel als vloeibare van hooge viscositeit. De groote moeilijkheden, welke het oplevert, deze stoffen in zuiveren toestand te verkrijgen, zijn waar-

schijnlijk de oorzaak van de nog zeer weinig exakte gegevens welke men er over heeft.

In het volgende zullen nu de resultaten worden medegedeeld van onderzoekingen, welke ten doel hebben, de verbindingen gevormd bij het „oplossen'' van zinkhydroxyde in NaOH m.a.w. de natriumzinkaten, nader te leeren kennen en hun bestaansgebied nauwkeurig vast te stellen. Dergelijke onderzoekingen, aangaande de overeenkomstige verbindingen bij eenige andere metalen, zijn in gang.

De tot dusver bekende gegevens aangaande de natriumzinkaten, zijn kort geresumeerd de volgende:

Comey en Loring Jackson [1]) kregen door oplossen van ZnO in heete NaOH-oplossing, gevolgd door toevoegen van alcohol, twee preparaten, waaraan ze respectievelijk de formules: $H_2 Na_4 Zn_3 O_6$ $17 H_2O$ en $HNa ZnO_2 \frac{1}{2} H_2O$ toekennen. De eerste verbinding heeft een smeltpunt van 100°, de tweede scheen zelfs bij 300° nog niet te smelten.

Förster en Günther [2]) vinden slechts één verbinding en wel van de formule $Zn\begin{cases} OH \\ O.Na \end{cases} 3 H_2O$. Ze vormde witte zijde-glanzende naaldjes.

Herz [3]) precipiteerde een oplossing van $Zn SO_4$ van bekende sterkte met KOH-oplossing en ging na, hoeveel loog noodig is, om het gevormde $Zn (OH)_2$ weer op te lossen. Hierbij bleek, dat op 1 gramion Zn noodig waren 6 gramionen OH.

Hantzsch [4]) ontkent op grond van geleidbaarheidsmetingen het bestaan van natriumzinkaten en schrijft het oplossen van $Zn (OH)_2$ in NaOH toe aan het ontstaan van eene kolloïdale oplossing.

Jordis [5]) neemt waar, dat in het cupron-element, waarin zich zink als negatieve pool in een oplossing van NaOH bevindt, op den duur kristallen van de samenstelling $Zn (ONa)_2$ ontstaan.

Tenslotte zij nog vermeld, dat door Rubenbauer [6]) en door Wood [7]) de verhouding tusschen het aantal gramatomen Zn en Na in oplossingen van $Zn (OH)_2$ in NaOH is bepaald; omtrent het bestaan van bepaalde verbindingen kunnen deze waarnemingen weinig leeren.

---

1) Amer. Chem. Journ. **11**, 145 (1889); Ber. d. deut. Chem. Ges. **21**, 1589 (1888).
2) Zeitschr. f. Elektroch. **6**, 301 (1899).
3) Zeitschr. f. anorg. Chem. **28**, 474 (1901).
4) Ibid. **30**, 289 (1902).
5) Zeitschr. f. Elektroch. **7**, 469 (1900).
6) Zeitschr. f. anorg. Chem. **30**, 332 (1902).
7) Journ. Chem. Soc. **97**, 886 (1910).

Men ziet uit deze gegevens der literatuur, hoe weinig zeker onze kennis aangaande zulke betrekkelijk eenvoudige verbindingen nog is.

De evenwichten, die kunnen optreden in waterige oplossing tusschen NaOH, Zn $(OH)_2$ en hun eventueele verbindingen, zijn te beschouwen als die in een ternair systeem met de componenten : Na_2O—ZnO—H_2O. Het oplosbaarheids-diagram van dit systeem kon nu bij constante temperatuur volledig worden bepaald. Als uitgangsmateriaal voor deze bepalingen diende uit natrium bereid NaOH, terwijl het ZnO verkregen was op de volgende wijze: Zuiver omgekristalliseerd zinknitraat werd met de benoodigde hoeveelheid ammoniak neergeslagen, met kokend water volledig uitgewasschen en daarna het neerslag bij 140°—150° gedroogd. Ook werd het oxyde verkregen door gloeien van geprecipiteerd zinkcarbonaat; daar dit oxyde tengevolge van de sterke verhitting minder actief was, vorderden de bepalingen hiermede een langere evenwichtsinstelling. Beide preparaten vertoonden gelijke oplosbaarheid. Omtrent de bereiding van het hydroxyde, zie later. Het water was gedistilleerd en uitgekookt voor het gebruik. Alle bepalingen werden in een thermostaat van 30,0° C. uitgevoerd. In achterstaande tabel 1 en de daarbij behoorende fig. 1 vindt men een overzicht der resultaten. Alle getalwaarden stellen voor gewichtspercenten der verzadigde oplossing. Daar het uiterst moeilijk bleek, de vaste phasen zuiver te isoleeren, werd in bijna alle gevallen de samenstelling volgens de restmethode van SCHREINEMAKERS bepaald.

Bij de bepalingen van de lijn AB werd ZnO als vaste phase toegevoegd [1]); de oplosbaarheid dezer stof blijkt met stijgende NaOH-concentratie snel toe te nemen. Zooals uit den tweeden tak BC van de isotherm blijkt, zet zich bij steeds toenemende NaOH-concentratie uit de oplossing af het *natrium-zinkaat van de formule*: $Na_2OZnO4H_2O$. Als derde tak sluit zich hierbij onmiddellijk aan, CD waar de oplossingen verzadigd zijn aan het monohydraat van natrium-hydroxyde: $NaOH \cdot H_2O$ [$Na_2O \cdot 3H_2O$]. Blijkens het door PICKERING [2]) bepaalde smeltdiagram NaOH—H_2O is dit hydraat de eenige bij 30° bestendige verbinding van NaOH met water.

Er treedt dus bij 30° maar één bestendig zinkaat en wel van de formule: $Na_2O \cdot ZnO \cdot 4\,H_2O$ *op. Alle overige, in de literatuur beschreven zinkaten, moeten òf als metastabiel worden beschouwd, òf bestaan in het geheel niet.*

---

[1]) Uitgezonderd bij de Nos. 26 en 29 (zie later).

[2]) Journ. Chem. Soc. 63, 890 (1893).

TABEL 1. — *Stelsel* $Na_2O—ZnO—H_2O$ (Temperatuur 30,0° C.).

N°.	Samenstelling van de oplossing.			Samenstelling van de rest.			Vaste phasen.
	% Na_2O	% ZnO	% H_2O	% Na_2O	% ZnO	% H_2O	
1	11.8	2.6	85.6	10.1	22.2	67.7	ZnO
2	17.4	5.0	77.6	15.3	16.9	67.8	ZnO
3	24.6	12.6	62.8	20.2	29.1	50.7	ZnO
4	24.9	12.9	62.2	22.0	23.5	54.5	ZnO
5	23.7	11.3	65.0	19.1	31.2	49.7	ZnO
6	27.3	16.0	56.7	22.1	32.7	45.2	ZnO
7	27.8	16.5	55.7	—	—	—	ZnO + Na_2O . ZnO . . $4H_2O$
8	28.0	14.9	57.1	28.1	28.3	43.6	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
9	33.5	10.9	55.6	28.6	27.9	43.5	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
10	36.7	9.5	53.8	31.9	28.5	39.6	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
11	31.8	11.7	56.5	31.0	20.2	48.8	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
12	30.1	13.2	56.7	29.1	29.2	41.7	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
13	33.2	11.2	55.6	29.7	31.8	38.5	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
14	31.5	11.8	56.7	29.2	32.9	37.9	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
15	36.9	10.1	53.0	34.9	17.2	47.9	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
16	34.7	10.4	54.9	33.7	15.6	50.7	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
17	36.1	10.2	53.7	34.0	17.7	48.3	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
18	36.8	9.9	53.3	33.1	22.8	44.1	Na_2O . ZnO . $4H_2O$
19	39.2	9.7	51.1	—	—	—	Na_2O . ZnO . $4H_2O$ + + Na_2O . $3H_2O$
20	39.4	9.0	51.6	42.6	7.0	50.4	Na_2O . $3H_2O$
21	39.6	7.2	53.2	41.0	6.1	52.9	Na_2O . $3H_2O$
22	40.7	2.0	57.3	42.0	1.8	56.2	Na_2O . $3H_2O$
23	40.5	1.6	57.9	42.6	1.3	56.1	Na_2O . $3H_2O$
24	40.9	1.1	58.0	42.7	0.4	56.9	Na_2O . $3H_2O$
25	41.9	0.0	58.1	—	—	—	Na_2O . $3H_2O$
26	24.6	12.5	62.9	23.6	15.2	61.2	ZnO
27	19.9	15.2	64.9	16.1	27.7	56.2	$Zn(OH)_2$
28	4.6	1.0	96.4	3.7	15.4	80.9	$Zn(OH)_2$
29	4.5	0.4	95.1	3.7	20.3	76.0	ZnO
30	13.7	7.2	79.1	9.3	30.4	60.3	$Zn(OH)_2$
31	10.1	4.7	85.2	6.2	32.7	61.1	$Zn(OH)_2$

Ook de meening van HANTZSCH [1]) omtrent de kolloïdale natuur der oplossingen, houdt geen stand, zooals in het vervolg nog nader zal blijken.

Eigenschappen, bereiding, enz. van het natriumzinkaat
$Na_2O \cdot ZnO \cdot 4H_2O$.

Zooals uit het bepaalde diagram reeds blijkt, behoort het natriumzinkaat tot die zouten, welke z.g. incongruente oplossingen vormen. Deze zouten geven bij toevoeging van water geen eenvoudige oplossing, doch één der componenten, waaruit men het zout gevormd kan denken, splitst zich bij watertoevoeging af. Vele voorbeelden zijn hiervan reeds bekend. Bij het natriumzinkaat doet zich dit verschijnsel bijzonder geprononceerd voor. Niet alleen zal toevoeging van water aan het vaste zout een afscheiding van ZnO, dus een

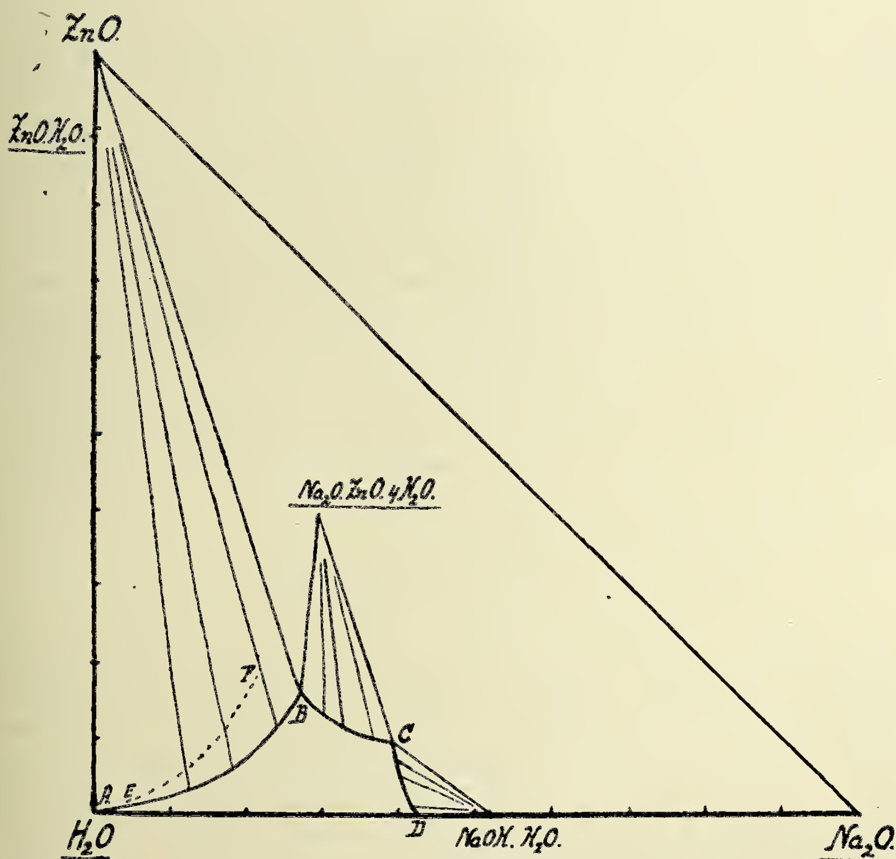


Fig. 1.

1) Loc. cit.

ontleding der verbinding, bewerken, maar ook zullen verdunde oplossingen van NaOH nog ditzelfde effect hebben. Uit den loop van de isotherm is af te leiden, dat oplossingen beneden een concentratie van 33,3 Gr. NaOH op 100 Gr. oplossing (dus 1 gew. deel NaOH op 2 gew. dln. water) een afscheiding van ZnO uit het vaste zout zullen veroorzaken, m. a. w. men zal de sterkte der NaOH-oplossing tot boven deze grens moeten opvoeren om zuivere zinkaatkristallen te verkrijgen. Het niet voldoende in het oog houden van deze omstandigheid is waarschijnlijk de oorzaak van de velerlei tegenstrijdigheid in de literatuur; nagenoeg nergens vindt men de concentratie der oplossingen aangegeven en daar blijkens de ligging der oplosbaarheidslijnen de kans hierop zeer groot is, zal men in vele gevallen mengsels verkregen hebben van zinkaatkristallen en ZnO, waaraan bij analyse de onjuiste samenstelling eener verbinding werd toegekend. Dit is o. m. het geval geweest bij de proeven van COMEY en LORING JACKSON [1]), die zinkaten bereidden door ZnO op te lossen in heete geconcentreerde NaOH-oplossing; zij voegden daarna alcohol aan de vloeistof toe en verkregen op deze wijze twee preparaten: één uit de waterlaag, door deze zoo lang met alcohol uit te schudden, dat er kristallen ontstonden en één uit de alcoholische vloeistof.

Ik heb deze methode herhaald en ging hiertoe uit van 50 Gr. water, waaraan 50 Gr. NaOH werd toegevoegd. Na inbrengen van 17 Gr. ZnO in kleine hoeveelheden tegelijk, kristalliseerde het zinkaat in belangrijke hoeveelheid uit. We zijn dan ook volgens ons diagram midden in het verzadigingsgebied van het zinkaat. De kristalmassa werd onder de noodige voorzorgen, buiten toetreding van lucht en koolzuur afgezogen en daarna op poreus aardewerk gedroogd. Natuurlijk kon op deze wijze de moederloog niet geheel verwijderd worden, doch uitwasschen zonder gelijktijdige ontleding is niet mogelijk. De analyse der kristallen leverde:

Na_2O...29.8 %, ZnO...37.8 %, H_2O...32,4 %.

(Theoretisch voor Na_2O . ZnO . $4H_2O$... Na_2O...28,9 %, ZnO...37,6 %, H_2O...33,5 %). Bij microscopische beschouwing bleek het produkt volkomen homogeen te zijn, de kristallen vertoonden zich als lange staafjes met stomp uiteinde; zij zijn zwak dubbelbrekend. Amorphe deelen konden niet worden aangetoond. De kristallen, welke bij de proeven N°s 8—18 zich gevormd hadden, werden eveneens microscopisch onderzocht; zij bleken geheel overeen te komen met die langs bovenstaanden weg verkregen.

Een proefje der kristallen met alcohol van 96 % behandeld, ver-

[1]) Loc. cit. Zie ook GMELIN-KRAUT's Handbuch.

anderde totaal. Reeds een oppervlakkige beschouwing leert hierbij, dat de kristallen onder inwerking der alcohol langzamerhand verdwijnen, terwijl zich vlokjes uit de vloeistof afzetten. Ook microscopisch blijkt, dat de kristallen onder deze omstandigheden niet bestaanbaar zijn, doch amorphe vlokjes ZnO (of $Zn(OH)_2$) afscheiden. Zelfs 96 %-ige alcohol werkt alzoo hydrolyseerend op het zinkaat en het behoeft niet te verwonderen, dat bovengenoemde onderzoekers produkten van onwaarschijnlijke samenstelling verkregen. Al naar gelang van de hoeveelheid alcohol en van den duur der inwerking, zal een mengsel verkregen zijn, dat nog meerdere of mindere quantiteiten zinkaat bevat. De formules voor dergelijke produkten hebben geen zin en dienden dus uit de literatuur te verdwijnen.

Bestendigheid, bereiding, enz. van zinkhydroxyde.

Zooals algemeen bekend is, verkrijgt men het zinkhydroxyde in den regel als gelachtige, volumineuze massa. Het was nu voor dit onderzoek van belang na te gaan, of deze phase een constante of variabele samenstelling heeft en hoe het staat met zijn stabiliteit ten opzichte van ZnO. In de literatuur zijn vele aanduidingen te vinden, dat de langs verschillende wegen verkregen hydroxyden niet dezelfde samenstelling bezitten. EULER[1]) bereidde uit het nitraat hydroxyden, welke een verschillende oplosbaarheid in ammoniak bleken te bezitten. HERZ[2]) en HANTZSCH[3]) wijzen op de groote moeilijkheden, welke het oplevert om $Zn(OH)_2$ zuiver te verkrijgen en speciaal op de hardnekkigheid, waarmede het sulfaat-ionen vasthoudt. Gemakkelijker dan uit het sulfaat schijnt men uit het chloride of nitraat een zuiver hydroxyde te kunnen verkrijgen. Bij de proeven, hierover genomen, ging ik uit van zuiver ZnO, dat in zoutzuur of salpeterzuur werd opgelost; daarna werd het hydroxyd door toevoeging van de berekende hoeveelheid ammoniak geprecipiteerd. Wordt dit neerslag met kokend water uitgewasschen, dan blijkt het reeds zeer spoedig, meer korrelig, zwaarder en minder gelatineus te worden. Na eenige malen uitwasschen, gevolgd door drogen bij 100°, bleek het preparaat nog slechts 0.6 % water te bevatten. Het hydroxyde is dus tengevolge van het uitwasschen bij 100° reeds tot oxyde omgezet. *Bij* 100° *is* $Zn(OH)_2$ *dus niet meer bestendig.*

Hierna werd getracht door uitwasschen bij kamertemperatuur tot een zuiver hydroxyde te komen. Het bleek echter, dat zelfs na lang-

---

[1]) Ber. d. deutsch. Chem Ges. **36**, 3400 (1903).

[2]) Zeitschr. f. anorg. Chem. **30**, 280 (1902); **31**, 357 (1902).

[3]) Loc. cit.

durige continue extractie, de produkten nog steeds chloride- of nitraathoudend waren. In de eerste uren van het extraheeren neemt men een belangrijke daling der concentratie van het geadsorbeerde ion waar, daarna daalt deze nog slechts zeer langzaam. Onderstaande cijfers lichten dit nader toe:

TABEL 2.

Extractietijd in uren.	Cl′ gehalte in % na drogen bij 100°.
0	0.59
4	0.36
8	0.35
16	0.34
48	0.30

Het is dus praktisch onmogelijk om uit het chloride langs dezen weg een zuiver hydroxyde te verkrijgen. Soortgelijke resultaten leverde de bereiding uit sulfaat en nitraat op; hoewel men in de literatuur vermeld vindt, dat het nitraat-ion veel minder sterk dan de overige zuurrest-ionen geadsorbeerd wordt, waren zelfs na dagen lange extractie de producten nog nitraathoudend. Toch heb ik met het gelachtige zinkhydroxyde eenige metingen omtrent de oplosbaarheid in NaOH verricht; niet omdat de gevonden waarden een absolute beteekenis kunnen hebben, maar uitsluitend met het doel na te gaan, of dit hydroxyde een hoogere oplosbaarheid vertoont dan ZnO en dus als metastabiel ten opzichte van dit laatste beschouwd moet worden. Zooals onderstaande getallen aantoonen, blijkt dit inderdaad het geval te zijn, de gevonden punten liggen belangrijk boven de oplosbaarheidslijn (AB) van ZnO. Tevens blijkt, dat de oplosbaarheid daalt, al naarmate het hydroxyde langer bewaard wordt. Ook

TABEL 3.

Tijd sinds de bereiding van het hydroxyde in uren.	Samenstelling der oplossing.	
	% ZnO	% Na_2O
1	10.5	11.3
10	9.3	11.4
24	8.2	11.3
72	7.0	11.3

dit pleit er voor, dat deze produkten beschouwd moeten worden *als metastabiele phasen, die neiging hebben zich te stabiliseeren tot ZnO.*

Voor de oplosbaarheid van ZnO bij een Na_2O-concentratie van 11.3 °/₀ vindt men door interpolatie 2.3 °/₀, dus belangrijk lager.

Gekristalliseerd zinkhydroxyde.

Uit het bovenstaande volgt, dat men de amorphe, geleiachtige hydroxyden moet beschouwen als phasen van wisselend watergehalte, welke bovendien zeer moeilijk zijn te zuiveren. De mogelijkheid bestond nu, dat onder bepaalde omstandigheden een gekristalliseerd hydroxyde van constante samenstelling zou zijn te verkrijgen. In de literatuur zijn eenige aanduidingen te vinden, dat $Zn(OH)_2$ soms in kristalvorm schijnt te ontstaan. Zoo vermeldt BECQUEREL [1]), dat hij het gekristalliseerde hydroxyde verkrijgt door een met koperdraad omwonden zinkstaaf, te plaatsen in een oplossing van kiezelzuur in bijtende loog. Hierbij vormden zich regulaire octaëders, waaraan de formule $Zn(OH)_2$ werd toegekend. Verschillende dergelijke aanduidingen vindt men in de oudere literatuur, zonder dat evenwel eenstemmigheid heerscht aangaande de samenstelling der kristallen [2]). In de latere jaren zijn o. a. door KLEIN [3]) de zinkhydroxyden opnieuw onderzocht. Deze onderscheidt drie vormen van het hydroxyde: vorm *A* is het sterkst oplosbaar in loog en ontstaat door aan een loogoplossing $ZnSO_4$-oplossing toe te druppelen. De analyse van het bij gewone temperatuur gedroogde produkt leverde op: $2ZnO.H_2O$. Uit de verzadigde oplossingen van *A* scheiden zich na verloop van tijd, de vormen *B* of *C* af; beiden zouden de samenstelling $ZnO.H_2O$ hebben, doch *B* wordt soms in mooie kristallen verkregen, terwijl *C* steeds amorph is.

Het behoeft na het voorafgaande wel niet meer betoogd te worden, dat van een constante samenstelling der amorphe hydroxyden geen sprake kan zijn. Het watergehalte van deze lichamen hangt van allerhand factoren: bereiding, tijd van bewaren, enz., af; een bepaalde formule voor hen heeft dus geen zin.

Anders staat het met het gekristalliseerde hydroxyde. Het bleek mij inderdaad mogelijk, het *zinkhydroxyde als gekristalliseerde phase van constante samenstelling* te isoleeren. Hiertoe ging ik als volgt te werk: aan 50 c.c. eener normaal oplossing van KOH werd uit een

---

[1]) Lieb. Ann. **94**, 358 (1855).

[2]) Zie o.a. BÖDEKER. Lieb. Ann. **94**, 358 (1855); VILLE, Comp. Rend. **101**, 375 (1885).

[3]) Zeitschr. anorg. Chem. **74**, 157 (1912). Zie ook WOOD, Journ. Chem. Soc. **97**, 886 (1910).

buret toegedruppeld een normaal oplossing van zinksulfaat. Aanvankelijk lost het zich vormende hydroxyde onmiddellijk op, doch er komt ten slotte een punt, waarop de vloeistof bij omschudden iets troebel blijft. Bij sterk schudden en vooral na krassen van den glaswand komt na eenige minuten staan een zwaar, zanderig neerslag. Ook enten met reeds verkregen kristallen bleek de afscheiding zeer sterk te bespoedigen. Bij microscopische beschouwing maakt het produkt een geheel homogenen indruk en het blijkt te bestaan uit zeer kleine, langgerekte staafvormige kristallen. Ze filtreeren zeer gemakkelijk en in tegenstelling met de amorphe produkten, zijn de kristallen zeer snel uit te wasschen. Na drogen bij 40°—50° leverde de analyse:

18,06 °/₀ H_2O; 81,91 °/₀ ZnO (Theoretisch voor $Zn(OH)_2$.... 18,11 °/₀ H_2O
81,89 °/₀ ZnO.

De sterkte van de loog werd gevarieerd tusschen de grenzen van 4,0 en 0,1 normaal, de sterkte der zinksulfaatoplossing eveneens; steeds hadden de gevormde kristallen denzelfden vorm en dezelfde samenstelling.

Stabiliteit van gekristalliseerd zinkhydroxyde ten opzichte van zinkoxyde.

De proeven N°s. 26—31 van Tabel 1 geven een indruk van de stabiliteitsverhouding van het gekristalliseerde $Zn(OH)_2$ en ZnO.

Bij N°. 26 werd de vaste phase als gekristalliseerd $Zn(OH)_2$ toegevoegd, de massa werd ruim 2 weken in den thermostaat op 30° gehouden. Toen bleek het kristallijne $Zn(OH)_2$ totaal omgezet te zijn, en de vaste phase *bestond uit ZnO*. De analyse van oplossing en rest bevestigde dit, het gevonden punt valt op de lijn *AB*. Hieruit blijkt dus, dat bij 30° het *gekristalliseerde zinkhydroxyde metastabiel is ten opzichte van ZnO*.

Bij kortere evenwichts-instelling *bleek het mogelijk de metastabiele oplosbaarheidslijn van $Zn(OH)_2$ te bepalen.*

N°.27 werd ingezet met gekristalliseerd $Zn(OH)_2$ en na ± 24 uur de oplossing geanalyseerd; de vaste phase bleek toen nog uit het kristallijne hydroxyde te bestaan. In overeenstemming hiermede was het zinkgehalte van de oplossing (zie tabel) belangrijk hooger dan met de lijn *AB* overeenkomt. De N°s 30 en 31 zijn op overeenkomstige wijze uitgevoerd, ook hier werd gekristalliseerd $Zn(OH)_2$ als vaste phase toegevoegd en de oplossing na ± 24 uur geanalyseerd. De gevonden samenstellingen der oplossing liggen wederom belangrijk boven lijn *AB*. De punten, welke deze oplossingen voorstellen, vormen tezamen

de metastabiele oplosbaarheidslijn *EF* van het gekristalliseerde zinkhydroxyde.

De bepalingen N°s 28 en 29 tenslotte zijn verricht in éénzelfde oplossing, waaraan kristallen $Zn(OH)_2$ als vaste phase werden toegevoegd. Na ± 24 uur leverde de oplossing de samenstelling N°. 28 en was $Zn(OH)_2$ als vaste phase aanwezig. Terwijl een dag later deze kristallen nog aanwezig bleken en de oplossing nog dezelfde samenstelling bezat, werd drie weken later de samenstelling N°. 29 gevonden. Alle $Zn(OH)_2$-kristallen waren verdwenen; het nu gevonden punt ligt op *AB*, terwijl ook de analyse van de rest uitwees, dat ZnO als vaste phase aanwezig was. De oplosbaarheid van gekristalliseerd $Zn(OH)_2$ is dus onder overigens gelijke omstandigheden belangrijk hooger dan die van ZnO.

RESUMÉ.

1. De oplosbaarheids-isotherm in het stelsel Na_2O-ZnO-H_2O werd bij 30° volledig vastgesteld.
2. Hierbij bleken als stabiele vaste phasen op te treden: zinkoxyde ZnO, natriumzinkaat $Na_2O \cdot ZnO \cdot 4H_2O$, het monohydraat van natriumhydroxyde $NaOH \cdot H_2O$.
3. Het natriumzinkaat vormt zeer sterk incongruente oplossingen, door oplossingen beneden een concentratie van 1 dl. NaOH op 2 dln. water wordt het ontleed onder afscheiding van ZnO.
4. Het amorphe, gelatineuze zinkhydroxyde moet beschouwd worden als een phase van wisselend watergehalte; het is onmogelijk van geadsorbeerde ionen te reinigen. Het is metastabiel ten opzichte van gekristalliseerd zinkhydroxyde.
5. Onder bepaalde omstandigheden is zinkhydroxyde te verkrijgen als kristallijne phase van de constante samenstelling $Zn(OH)_2$.
6. Dit gekristalliseerde hydroxyde is bij 30° metastabiel ten opzichte van ZnO.

De kosten dezer onderzoekingen zijn gedeeltelijk bestreden uit een subsidie mij ter beschikking gesteld uit het VAN 'T HOFF-Fonds. Aan de commissie van beheer van dit fonds, betuig ik ook te dezer plaats mijn hartelijken dank.

Delft, Juni 1919.

Anorganisch en physisch-chemisch Laboratorium
der Technische Hoogeschool.

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt eene mededeeling aan van den Heer P. A. VAN DER HARST: „*Waarnemingen over de spectra van tin, lood, antimoon en bismuth in het magnetische veld*".

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Voor het doen van de hieronder beschreven waarnemingen heb ik gebruik gemaakt van de tralieopstelling van het Natuurkundig Laboratorium te Amsterdam, door professor P. ZEEMAN te mijner beschikking gesteld.

Meer uitvoerig zullen de proeven en waarnemingen beschreven worden in mijn proefschrift, dat onder bovenstaanden titel uitkomt

1. De spectra van tin, lood, antimoon en bismuth zijn weinig of niet op hun ZEEMAN-effect onderzocht. De eenige, die systematische waarnemingen hierover bij deze elementen deed, is PURVIS [1]). Diens uitkomsten vertoonen echter, zooals bekend is, dikwijls groote afwijkingen van die van anderen, wat in hoofdzaak te wijten is aan een fout in het meten der veldsterkte. Bovendien meet PURVIS slechts weinig lijnen van deze elementen, n.l. slechts die, waarvoor geen langer belichtingstijd dan een half uur noodig was om ze, voor het meten, duidelijk genoeg op de fotografische plaatjes te krijgen. Het leek me daarom goed de magnetische splitsing bij deze elementen aan een nader onderzoek te onderwerpen.

2. De tralie-opstelling is beschreven door Mevr. H. B. BILDERBEEK—v. MEURS [2]). Het tralie is een hol tralie van Rowland, 3 μ. straal, 8 c.m. breed, 14438 strepen per inch. Spleet en tralie staan vast ten opzichte van elkaar en ten opzichte van een ijzeren cirkelvormigen boog, waarop de fotografische plaatjes geklemd worden, zoodat in alle orden tegelijkertijd belicht kan worden.

De spleetwijdte bedroeg gewoonlijk ongeveer 20 μ, dat is 8 maal

---

1) J. E PURVIS. The influence of a very strong magnetic field on the spark spectra of Lead, Tin, Antimony. Bismuth and Gold. Camb. Phil. Soc., **14**, 217, 1907; Nature, **76**, 166, 1907.

2) H. B. BILDERBEEK—V. MEURS. Magnetische splitsing van het ultraviolette ijzerspectrum (λ 2300—λ 4500). Diss., Amsterdam, 1909.

de „normale” spleetwijdte [1]) bij de gebruikte opstelling. Als lens gebruikte ik een dubbellens van kwarts-calciumfluoriet, doorzichtig voor ultraviolette stralen en bovendien achromatisch. Het beeld van de lichtbron viel steeds op dezelfde plaats van de spleet.

Het was meestal noodig de vertikale en horizontale componenten te scheiden met een kalkspaatrhomboëder, geplaatst tusschen lichtbron en lens. Van de beide beeldjes, hierdoor gevormd, werd eén op de spleet geworpen.

De magneet was een du Bois magneet groot model, waarbij de eindvlakken der kegelvormige pooltoppen cirkelvormig waren met een doorsnede van doorgaans 8 mm. De poolafstand was nooit grooter dan 4 mm.. De magneetstroom werd gemeten met een thermische Ampèremeter van Hartmann en Braun en bedroeg gewoonlijk 15 Ampère.

Als lichtbron diende een vonk, overspringend tusschen electroden van het te onderzoeken metaal of alliages ervan. De vonk stond, parallel aan een condensator, in de secundaire keten van een transformator (van Koch en Sterzel te Dresden) waarvan de primaire keten gevoed werd door stadswisselstroom. Bovendien stonden in de secundaire keten een hulpvonk en een regelbare zelfinductie in serie met de vonk. De bijzonderheden der vonkontlading (lichtsterkte, scherpte der gevormde spectraallijnen, smelten der electroden) en den invloed daarop van zelfinductie, capaciteit en hulpvonk zal ik uitvoerig in mijn proefschrift beschrijven.

Als fotografische plaatjes werden door mij meestal „Agfa Röntgen” platen gebruikt, die ik kleurgevoelig maakte door ze van te voren in „Pynachrom” te baden. De op deze wijze behandelde plaatjes bevielen mij beter dan de in den handel verkrijgbare kleurgevoelige platen.

De metingen geschieden met een comparateur van Zeiss. De resultaten werden naar hun meer of mindere nauwkeurigheid in 4 groepen verdeeld, die ik in de tabellen achtereenvolgens een gewicht 4, 3, 2, 1 gegeven heb. De eerste groep had een waarschijnlijke fout van 1 ‰ of minder, de tweede van 1 ‰ tot 5 ‰, de derde van 5 ‰—10 ‰, de vierde van meer dan 10 ‰. Voor de voorzorgen, bij de metingen genomen en de bepaling der fout verwijs ik naar mijn proefschrift.

Ook de voorbereidende proeven: het scherpstellen van den platenhouder, het bepalen van het oplossend vermogen en der schaalwaarde zal ik hier niet nader behandelen maar kan men aldaar vinden

---

[1]) Schuster. The optics of the spectroscope. Astroph. J., **21**, 197, 1905.

Het oplossend vermogen was zeker niet kleiner dan het theoretische.

3. *Waarnemingen.* De verschillende veldsterkten werden steeds bepaald door de splitsingen te meten die er door veroorzaakt werden bij *Zn* 4680, waarbij dan de groote der splitsing van deze lijn vergeleken werd bij die, verkregen met de bekende absolute metingen van GMELIN, WEISS en COTTON, [1]) en FORTRAT. [2]) Ik nam als standaardwaarde voor $\frac{2d\lambda}{\lambda^2 H} \cdot 10^5$ het gemiddelde van de door hen verkregen waarden, 9.376. Gewoonlijk werkte ik met velden, die in de buurt van 30000 Gausz lagen.

Bij tin en lood waren de electroden buigzame bandjes van deze metalen, die kruiselings over de pooltoppen gespannen werden. Bij tin werd de vonk nog door een Föhn koudgeblazen, omdat anders de electroden te snel doorsmolten en de ontlading in een continue overging. Bij lood werd van deze methode afgezien, omdat de Föhn vaak haperde, en werd een hulpvonk in de secundaire keten in serie met de belichtingsvonk geschakeld. Door van deze hulpvonk den afstand te regelen, heeft men de werking van de belichtingsvonk veel beter in de hand. De electroden der hulpvonk moeten dan echter niet kunnen oxydeeren, daar men anders aldaar een meer continue ontlading krijgt, terwijl de hulpvonk juist dient om dit bezwaar, dat men bij de belichtingsvonk heeft en daar niet kan vermijden, te ondervangen en dus te zorgen, dat men een onderbroken ontlading houdt. Daarom werden de bolletjes van messing, waaruit de electroden der hulpvonk bestonden, bekleed met platina kapjes. De bandjes van lood werden strak gespannen gehouden over de pooltoppen, daar ze anders steeds de neiging hebben naar elkander toe te buigen, waardoor de vonkafstand te klein wordt.

Van antimoon konden, door de groote brosheid van dit metaal, geen buigzame bandjes gemaakt worden en gebruikte ik dus kleine platte staafjes ervan als electroden, die geklemd werden in een vonkstatief van messing. Een voordeel van dit metaal is, dat het een vrij hoog smeltpunt heeft en de electroden dus minder spoedig doorsmelten. Bismuth heb ik alleen als alliage met antimoon als electrode gebruikt, (60 gewichtsprocenten bismuth), anders had het tegelijkertijd de bezwaren van tin en lood, dat het spoedig smolt, en die van antimoon, dat het bros was. Bij het alliage was het eerste bezwaar opgeheven en kon het verder als antimoon behandeld worden.

[1]) P. ZEEMAN. Researches in Magneto-optics. Mac Millan and Co, London, 1913, blz. 67. Deutsche Uebersetzung, Leipzig, J A. BARTH, 1914.

[2]) R. FORTRAT. Recherches de magneto-optique. Thèse, Paris, 1914.

Nog moet ik vermelden, dat ik in de tabellen, waarin SCHIPPERS [1]) zijn metingen over het antimoonspectrum samenvat en die in KAYSER's Handbuch der Spectroskopie overgenomen zijn, eenige lijnen aantrof, die ik op mijn plaatjes nooit vond. Het zijn de lijnen 4370, 4295, 4287, 4091, 4078, 4038, 4024, 4006, 4004, 3979, 3721, 3467, 3460. Uit eenige proefnemingen, die ik nam, met het doel om uit te maken of deze lijnen bestonden, meen ik te moeten besluiten, dat SCHIPPERS zich vergist heeft en lijnen van de derde orde voor lijnen van de tweede orde heeft gehouden. De bovenstaande lijnen zijn volgens mij achtereenvolgens de volgende lijnen van de derde orde: 2913, 2863, 2858, 2727, 2719, 2692, 2683, 2671, 2670, 2653, 2480, 2311, 2306.

In de tabellen heb ik naast mijn eigen uitkomsten die van PURVIS opgenomen. De veldsterkte, die hij opgaf, bracht ik echter niet in rekening, daar deze zeker te hoog opgegeven staat. In plaats daarvan heb ik met behulp van mijn uitkomsten nagegaan welke veldsterkte PURVIS gehad heeft, door het gemiddelde van zijn uitkomsten te vergelijken met het gemiddelde van de mijne; dit voor elk element afzonderlijk. Ik vond zoo voor tin, lood, antimoon en bismuth achtereenvolgens 30400, 31100, 28700, 31100 Gausz. COTTON schat de door PURVIS gebruikte veldsterkte op 30800, hij zelf geeft op 39980 Gausz. Voor het beter onderling vergelijken der uitkomsten zijn die van PURVIS voor $\frac{d\lambda}{\lambda^2}$ in onderstaande tabellen door bovenstaande veldsterkten gedeeld.

De golflengten staan, afgerond, opgegeven in internationale Ångström eenheden.

4. *Bespreking der tabellen.* Behalve de in de tabellen opgenomen splitsingen staan verder nog bij tin op een van de opnamen, waarop beide soorten van componenten tegelijkertijd voorkwamen, de quadrupletten 2368 en 2762 (booglijn), die achtereenvolgens als waarden voor $(d\lambda : \lambda^2 H) . 10^{14}$ hadden: 34.6 (3), 48.0 (2) en 49 (2), 56.6 (3). De getallen tusschen haakjes geven het gewicht aan. 2266 en 2408 zijn gesplitst. De grootte der splitsing is niet te meten maar bedraagt achtereenvolgens minder dan 76 en 59. 2355 is waarschijnlijk gesplitst.

Verder staat bij antimoon nog op de opnamen de door SCHIPPERS opgegeven luchtlijn 3640 gesplitst. Hiervan is $(d\lambda : \lambda^2 H) . 10^{14} = 66.2$, gewicht 3.

[1]) H. SCHIPPERS, Messungen am Antimonspectrum. Zs. f. Wiss. Phot., **11**, 235, 241.

Bij de Bismuthlijnen zijn er eenige, waarbij men met de beoordeeling der splitsing voorzichtig moet zijn. In hetgeen volgt zal ik met een *s* aanduiden alles, wat op de trillingen loodrecht op de krachtlijnen slaat, een *p* slaat op trillingen evenwijdig aan de krachtlijnen.

3068. De *s*-figuur was op eenige opnamen een triplet van asymmetrische intensiteit. De overeenkomstige *p*-figuur was dan een doublet dat er geheel als een omgekeerde lijn uitzag, zoodat ik vermoedde dat het *s*-triplet eigenlijk een doublet van een omgekeerde lijn was, waarvan de twee middelste deelen samenvielen. Dit bleek juist te zijn, toen later, door het grooter maken der zelfinductie waarschijnlijk, het *s*-triplet in een gewoon doublet overging, het *p*-doublet in een enkele lijn. Ook een opname, waarin minder bismuth in het alliage was, leverde dezen laatsten vorm, dus een gewoon triplet. Zie ook, wat PURVIS omtrent deze lijn zegt.

4260. Ik vermoed, dat hiervoor hetzelfde geldt als voor 3068. Bij het opvoeren van de zelfinductie, om zekerheid te krijgen, werd deze lijn echter te zwak om er iets van te kunnen zeggen. Vóór het vermoeden pleit, dat de splitsing van de *p*-componenten even groot is als van de *s*-componenten.

4122. Dit is, meen ik, een ander geval. EXNER en HASCHEK geven hier twee lijnen, 4121,75 en 4122,08, de laatste iets sterker dan de eerste. Ook ik vind twee lijnen met een afstand 0.24 Å.E. en dezelfde sterkteverhouding. Ze zien er in het geheel niet als één, omgekeerde, uit. De *s*-figuur is een triplet, dat iets van uiterlijk verandert als de omstandigheden veranderen (zie tabel). Het verschil in splitsing tusschen overeenkomstige componenten in beide gevallen zal wel aan de moeielijke en dus onzuivere waarneming te wijten zijn. Het verschil in afstand aan weerszijden van de middelste component geloof ik echter, dat werkelijk bestaat. Voor de *p*-figuur staat een triplet opgegeven. Er staat een onscherpe lijn, die naar rood en ook, maar nog veel zwakker, naar violet over eenigen afstand vervloeit en dan min of meer plotseling ophoudt. Ik meen echter op enkele plaatsen een scheiding te zien. De metingen zijn natuurlijk weinig waard. PURVIS geeft voor de splitsing op: 72.3. Dit is ongeveer gelijk aan wat ik voor de splitsing der buitenste componenten van het *s*-triplet vind.

4723. Van deze lijn geeft WALI MOHAMMAD een beschrijving, wat het gedrag betreft bij zwakke magneetvelden, bestudeerd met een echelon[1]. Ik zelf vind op de *s*-opnamen 2 middelste componenten,

[1]) CH. WALI MOHAMMAD. Untersuchungen über magnetische Zerlegung feiner

op naast elk waarvan een breede veeg staat, die vrij plotseling ophoudt. Er is haast geen afscheiding te zien, waardoor het meten lastig wordt. Toch komen de verschillende metingen der buitenste componenten goed overeen, van de binnenste minder. Het p-doublet staat zeer dicht bijeen, zoodat daar al vanzelf een groote betrekkelijke fout ontstaat.

In de tabel is de meest violette component met een —, de meest roode met een + aangegeven. In dat geval is de splitsing niet $= 2d\lambda$, zooals boven de kolom staat aangegeven, maar $= d\lambda$; *o* beteekent niet, dat de lijn op de plaats van de oorspronkelijke, ongesplitste, staat maar alleen, dat daar een component staat.

5. *Algemeene uitkomsten.* Wanneer men in het voorgaande de resultaten vergelijkt, valt al dadelijk op, dat, al is ook de algemeene gang der uitkomsten dezelfde, er toch nogal veel afwijkingen voorkomen, die meer bedragen, dan de aangegeven waarschijnlijke fout. Ook komt het een enkele keer voor, dat een quadruplet voor een triplet aangezien wordt, wat niet te verwonderen is bij de dicht bijeen staande middelste componenten van deze vaak onscherpe lijnen. Dat iets dergelijks het geval kan zijn met andere lijnen, die als triplet opgegeven staan, is niet onmogelijk.

Eene overeenkomst, zooals PURVIS die aangeeft tusschen de quadrupletten Pb 3740, Pb 2873, Sb 3723, Sb 3638 en misschien Sb 2668, Bi 2989, bestaat volgens mijne metingen niet, uitgezonderd misschien die tusschen Sb 3638 en Bi 2989. — Gaat men na, of er nog eenig verband bestaat tusschen de splitsingen der lijnen, waarvoor KAYSER en RUNGE [1]) de bekende constante trillingsverschillen vinden, dan blijkt dat zulk een verband niet bestaat. — v. LOHUYZEN [2]) heeft in de spectra van tin en antimoon reeksen aangegeven. Aan de juistheid er van wordt echter getwijfeld door SAUNDERS [3]) en ARNOLDS [4]). Ik heb nu nagegaan of de regels van PRESTON voor deze reeksen doorgingen. Van reeks I, die v. LOHUYZEN in het tinspectrum aangeeft, heb ik voor de lijnen 3656 en 2785

Spektrallinien im Vakuumlichtbogen. Ann. d. Phys.. (4), **39**, 225, 1912; Diss., Göttingen, 1912.

[1]) H. KAYSER und C. RUNGE. Ueber die Spectra von Zinn, Blei, Arsen, Antimon, Wismuth. Abhandl. Berl. Akad. 1893; Wied. Ann., **52**, 93, 1894.

[2]) T. VAN LOHUIZEN. Bijdrage tot de kennis van lijnenspectra. Diss., Amsterdam, 1912.

[3]) F. A. SAUNDERS. Astrophys. J., **36**, 409.

[4]) R. ARNOLDS. Das Bogen- und Funkenspectrum von Zinn (von λ 7800—λ 2069). Zs. f. wiss. Phot., **13**, 325.

de splitsingen (d. w. z. de waarden voor $d\lambda : \lambda^2 H$, zie tabel) 29,6 en 56,1 gevonden; 2408 in die reeks heeft een splitsing kleiner dan 59. In de reeks VII vind ik voor de lijnen 3801, 2851, 2594, 2483, 2422 achtereenvolgens de splitsingen 40,5, 42,5, 44,7 (56 en 46,8), 45,9. Hierin geeft 2483 een quadruplet, de overige lijnen geven tripletten. Reeks VIII: 3175 en 2483 geven achtereenvolgens 69,7, (56 en 46,8) als splitsing. Antimoon. Reeks XIII: de lijnen 3268 en 2574 hebben achtereenvolgens een splitsing van 40,9 en 45. Reeks XIV: 3505 heeft de splitsing 63,7 en 2719, 51,5. Reeks XX: 3233, 2653, 2478 hebben de splitsingen 60,0, 63, 68,7.

Bij de andere tin- en antimoonreeksen heb ik geen, of slechts één lijn gesplitst gekregen.

Gaan we de bovenstaande resultaten na, dan zien we dat van de reeksen, waarbij over het volgen van de regels van Preston te oordeelen valt, slechts reeks XIII niet in strijd is met deze regels. In reeks VII loopen de splitsingen geleidelijk op; de eerste en de laatste splitsing liggen meer dan de foutengrens uiteen. Bovendien komt daar midden tusschen de tripletten een quadruplet voor. Ook al waren, wat zeer onwaarschijnlijk is, deze tripletten eigenlijk quadrupletten, waarvan alleen de middelste component niet gesplitst gezien werd, dan waren toch de grootten der splitsingen der buitenste componenten niet met elkander in overeenstemming. — Het voorgaande pleit m. i. niet voor de uitkomsten van v. Lohuyzen, al blijft het altijd mogelijk dat er reeksen zijn die niet aan den regel van Preston gehoorzamen. Het nut van de Zeeman-effecten voor het onderkennen van spectraalreeksen kwam opvallend voor den dag toen Runge en Paschen in de spectra van Mg, Ca, Sr, Ba dubbellijnen vonden, die in het magnetische veld op dezelfde wijze veranderd werden als dubbellijnen in hoofd- en nevenreeksen in de spectra der alkalimetalen, terwijl ook bij sommige dubbellijnen uit het Ra-spectrum soortgelijke uitkomsten werden gevonden. De verwachtingen, die in 1902 en 1904 aan de genoemde onderzoekingen werden vastgeknoopt, wat het vinden van reeksen betreft, worden dus, wat de door mij onderzochte metalen betreft, niet vervuld.

Verder heb ik zelf nog getracht, regelmatigheden te vinden. Hierbij en bij het voorgaande heb ik gebruik gemaakt van een grafische voorstelling, die mij gemakkelijk leek. Daartoe heb ik in elk element de splitsingen volgens grootte gerangschikt en ze toen op schaal vertikaal onder elkander geteekend, zooals men dat gewoonlijk doet, wanneer men splitsingen onderling wil vergelijken. Daar twee opeenvolgende splitsingen over het algemeen slechts weinig in grootte verschillen, ontstaat zoo een kromme. Een vertikaal gedeelte beteekent

een aantal gelijke splitsingen. Teekent men de bijbehoorende lijnen

Grafische voorstelling der splitsingen.



naast de splitsingsfiguur aan, dan heeft men zoo direkt een overzicht over de lijnen, die mogelijk tot een reeks behooren. Zie de grafische voorstelling.

Hierin staan de splitsingsfiguren slechts voor de helft opgenomen, wat niet hindert, daar ze toch symmetrisch zijn. De componenten zijn niet door enkele lijntjes aangegeven; ik heb het heele gebied, waar ze zich volgens de waarschijnlijke fout kunnen bevinden, zwart gemaakt. De vertikale lijnen, die in de figuur geteekend zijn, staan op afstanden = de halve normale splitsing. Een hellend recht

gedeelte der kromme beteekent dat tusschen twee bepaalde grootten de splitsingen regelmatig verdeeld zijn. Ging ik dit na voor de splitsingen bij de vier door mij onderzochte elementen, dan kreeg ik vier krommen, elk bestaande voor het grootste gedeelte uit een recht hellend stuk, wat dus beteekent, dat bij elk der elementen haast alle splitsingen over een bepaald gebied vrijwel regelmatig verdeeld zijn. Bij tin liggen de meeste splitsingen op deze wijze tusschen 40 en 70, bij lood tusschen 45 en 70, antimoon heeft een reeks splitsingen tusschen 60 en 65, en verder eenige in de buurt van 70, van bismuth bestaan wel wat weinig resultaten, maar deze liggen toch tamelijk regelmatig tusschen 45 en 70.

Een duidelijk vertikaal gedeelte, dus verscheidene gelijke splitsingen, komt niet voor. Veel resultaat bij het zoeken naar reeksen met behulp van gelijke splitsingen verkrijg ik dus door deze krommen niet. Ik heb het ook beproefd bij tin, en bij antimoonlijnen, die een splitsing hadden tusschen 60 en 65, maar evenmin met resultaat.

Ook ging ik nog na of er eenvoudige betrekkingen bestonden tusschen de afstanden der componenten bij meer dan drie-voudige splitsingen, die nogal zuiver gemeten waren (gewicht 3 of 4). Bij Sb 3740, Sb 2671 en Sb 2878 vond ik geen eenvoudige verhoudingen. Bij Sn 3331 verhouden zich de afstanden der componenten als 3: 2, wanneer men er de waarden 59,3 en 39,5 voor neemt, die binnen de foutengrens liggen. Bij Pb 2802 is de verhouding ook 3: 2 met de waarden 49,1 : 32,7. Pb 2873 geeft 54,7 : 41,0 = 4 : 3. Sb 3723 geeft 72,6: 36,3 = 2: 1. Eenig onderling verband of een eenvoudige betrekking tot de normale splitsing bestaat echter niet.

In het kort kunnen dus de resultaten als volgt samengevat worden:

Van 35 tin-, 23 lood-, 27 antimoon- en 16 bismuthlijnen werd het Zeeman-effect gemeten. Hierbij doen zich afwijkingen voor van de, op slechts enkele lijnen betrekking hebbende, uitkomsten van Purvis, naar ik vermoed tengevolge van minder zuivere metingen van hem. Verband tusschen de splitsingen van die lijnen der onderzochte metalen, waarvoor voorgesteld werd ze in reeksen op te nemen of die volgens de wetten van de 2e soort van Kayser en Runge gerangschikt zijn, werd niet gevonden. De splitsingen liggen vrij regelmatig verdeeld tusschen waarden, die ongeveer 1 en 1,5 maal die van de normale splitsing bedragen. Als incidenteele uitkomst vind ik, dat een aantal door Schippers voor antimoon opgegeven lijnen niet reëel is.

6. *Tabellen.*

Tin.

λ	2 d λ (H = 34930)				(d λ : λ^2 H). 10^{14}				OPMERKINGEN.
	trilling ⊥ kr. ll.		trilling // kr. ll.		eigen waarnemingen		waarng. Purvis $\frac{d\lambda}{\lambda^2}$: 3,04		
	2 d λ	g	2 d λ	g	trilling ⊥ kr. ll.	trilling // kr. ll.	trilling ⊥ kr. ll.	trilling // kr. ll.	
2335	0.322	3	0		84.6	0			
2422	0.188	3	0		45.9	0			
2429	0.18	2	0		43	0			
2483	0.24	2	0.202	3	56	46.8			
2496	0.242	3	0.14	0	55.7	32			
2547	0.227	3	0		50.2	0			
2572	0.291	3	0		63.1	0			
2594	0.210	3	0		44.7	0			
2661	0.297	3	0		59.9	0			
2707	0.357	3	0		69.9	0	72.2	0	
2780	0.322	3	0		59.7	0			
2785	0.304	3	0		56.1	0			
2813	gesplitst		0		gesplitst	0			De splitsing is ongeveer zoo groot als die van 2814.
2814	0.270	3	0		48.9	0			
2840	0.385	3	0		68.5	0	66.1	0	
2851	0.241	3	0		42.5	0	42.6	0	
2863	0.372	3	0		65.0	0	64.5	0	
2914	0.21	2	0		35	0			
3009	0.429	4	0		67.9	0	66.1	0	
3033	0.313	3	0		48.7	0			
3034	0.463	3	0		72.1	0	70.5	0	
3142	0.368	3	0		53.2	0			
3175	0.490	3	0		69.7	0	70.4	0	
3219	0.261	3	0		36.1	0			
3262	0.357	3	0		48.2	0	49.5	0	
3283	0.30	1	0		40	0			
3331	0.462	4	0.302	3	59.6	39.1	58.8	40.0	
3352	0.39	2	0		49	0			
3656	0.276	3	0		29.6	0			
3801	0.409	4	0		40.5	0	40.0	0	
4525	0.725	3	0		50.6	0	53.6	0	
4586	0.59	2	0		40	0			
4618	1.316	3	0		88.5	0			
5563	gesplitst		0		gesplitst	0			
5589	1.02	2	0		47	0			

Lood.

λ	2 d λ (H = 32810)				(d λ : λ^2 H). 10^{14}				OPMERKINGEN.
	trilling ⊥ kr. ll.		trilling // kr. ll.		eigen waarnemingen		waarng. Purvis $\frac{d\lambda}{\lambda^2}$: 3.11		
	2 d λ	g	2 d λ	g	trilling ⊥ kr. ll.	trilling // kr. ll.	trilling ⊥ kr. ll.	trilling // kr. ll.	
2476	0.294	3	0		73.2	0			
2577	0.277	3	0		63.6	0			
2613.7	0.23	1	0.13	1	51	30			⊥ componenten: hier staan waarschijnlijk 4 lijntjes, 2 sterke, waarnaast 2 zwakke; de 2 middelste vallen haast samen. Waarschijnlijk hooren de 2 zwakke bij 2613.7, de 2 sterke bij 2614. De afstand midden zwakke op midden sterke = 0.45 Å.E., de afstand volgens de tabel van Klein tusschen 2613,7 en 2614 = 0.52 Å.E, wat overeenkomt met hetgeen ik op de opname zonder veld meet. De overeenkomst 0.45 en 0.52 is slecht maar was ook niet beter te verwachten bij de zeer slecht te meten componenten van 2613.7.
2614	0.24	2	0.21	2	53	46			
2663	0.308	3	0		66.1	0			
2698	0.414	3	0		87.0	0			
2713 [1]	0.426	3	0		88.7	0			
2802	0.249	3	0.173	3	48.3	33.5	46.4	0	
2823	0.318	3	0		60.6	0	41.5	0	
2833	0.34	2	0.19	2	64	36	63.0	0	
2873	0.297	3	0.221	3	54.9	40.8	66.0	31.2	
3573	0.492	3	0		58.9	0			
3576 [2]							62.1	0	// componenten: De splitsing 130 van 2613.7 berust slechts op 1 enkele, zeer onnauwkeurige meting; de afstand van midden op midden bedroeg 0.49 Å.E.
3640	0.57	2	0		66	0	66.0	0	
3672	0.481	3	0		54.2	0	57.0	0	
3683	0.609	3	0		68.3	0	69.2	0	
3740	0.576	4	0.208	3	62.8	22.6	64.4	30.6	
4020	0.501	3	0		47.3	0			
4058	0.646	3	0		57.8	0	57.6	0	
4062	0.729	4	0		67.3	0	68.2	0	
4168	0.57	2	0.468	3	50	40.8			
4245	0.537	3	0		45.3	0	42.2	0	
4386	0.543	3	0		43.0	0	37.0	0	
5609	1.706	3	0		52.0	0			

[1]) booglijn.
[2]) moet dit misschien 3573 zijn?

Antimoon.

λ	2 d λ (H = 26290)				(d λ : λ² H). 10¹⁴				OPMERKINGEN.
	trilling ⊥ kr. ll.		trilling // kr. ll.		eigen waarnemingen		waarng. Purvis $\frac{d\lambda}{\lambda^2}$: 2.87		
	2 d λ	g	2 d λ	g	trilling ⊥ kr. ll.	trilling // kr. ll.	trilling ⊥ kr. ll.	trilling // kr. ll.	
2311	0.23	2	0		81	0			
2446	0.152	3	0		48.7	0			
2478	0.220	3	0		68.7	0			
2529	0.20	2	0		60	0	55.2	0	
2574	0.15	2	0		45	0			
2598	0.19	2	0		54	0	55.5	0	
2612	0.217	3	0		60.9	0			
2617	gesplitst		0		gesplitst	0			
2653	0.23	2	0		63	0			
2669							78.4	34.7	Zijn dit misschien dezelfde?
2671	0.234	3	0.207	3	62.8	54.5			
2683	0.229	3	0		60.9	0			
2719	0.199	3	0		51.5	0			
2727	0.21	0	0		73	0			
2770							41.8	0	
2851	gesplitst		0		gesplitst	0			
2878	0.367 en 0	3	0.160	3	±84.8 en 0	36.9	±77.0 en 0	36.4	3 ⊥ en 2 // componenten.
3030	0.310	4	0		64.8	0	68.7	0	
3233	0.327	4	0		60.0	0	60.7	0	
3248	0.309	3	0		56.2	0			
3268	0.233	3	0		40.9	0			
3274	0.35	2	0.19	2	62	34			
3383	0.571	3	0		95.5	0			
3505	0.408	3	0		63.7	0			
3638	0.484	3	0.19	2	70.2	27	73.2	34.4	
3583	0.496	3	0		70.2	0			
3723	0.523	4	0.273	3	72.3	37.8	76.7	35.0	
4034	0.28	2	0		33	0			
4195	gesplitst		0		gesplitst	0			
4219	0.65	0	0		71	0			
4352	0.496	3	0		50.0	0			

Bismuth.

λ	2 d λ (H = 26290)				(d λ : λ² H). 10¹⁴				OPMERKINGEN.
	trilling ⊥ kr. ll.		trilling // kr. ll.		eigen waarnemingen		waarng. Purvis $\frac{d\lambda}{\lambda^2} : 3.11$		
	2 d λ	g	2 d λ	g	trilling ⊥ kr. ll.	trilling // kr. ll.	trilling ⊥ kr. ll.	trilling // kr. ll.	
2628	0.175	0	0		48	0			
2898	0.247	3	0		56.0	0	56.6	0	
2938	0.286	3	0		63.2	0	59.2	0	
2989	0.314	3	0.124	2	66.7	26	64.0	26.4	
2993	0.260	3	0		55.3	0	51.8	0	
3025	0.292	3	gesplitst?		60.7	gesplitst?	59.2	21.5	p figuur: ik vind de lijn, meen ik, verbreed, op één plaatje misschien gesplitst. Waarschijnlijk is de opgave van Purvis juist en was de splitsing bij dit veld voor deze lijn. te klein om gescheiden gezien te worden.
3068	0.346	3	0		69.8	0			
3077	0.242	3	0		48.7	0			
3397	0.241	3	0		39.8	0	41.5	0	
3511	0.461	3	0		71.1	0			
3596	0.321	3	0		47.2	0	47.6	0	
3793	0.285	2	0		38	0			
4122	−0.30, 0, + 0.34 [1])	2	− 0.32, 0, + 0.31	1	− 33,0, + 38	−35,0, +34	72.3	0	H = 26290 Gausz; zelfinductie 0.1 millihenry.
4122	−0.28, 0, + 0.31 [2])	2	te zwak		− 31,0, + 35	te zwak			H = 30500 Gausz; zelfinductie 0.8 millihenry.
4260	−0.47, 0, + 0.48 [3])	2	0.47	2	− 49,0, + 50	49			
4723	0.75 en 0.35	2	0.21	2	64 en 30	18	70.1 en 29.6	20.9	Is waarschijnlijk een triplet van een omgekeerde lijn, zoodat de werkelijke splitsing ongeveer is 0.50.
5145	0.83	0	0		60	0			

[1]) De meest roode component is iets sterker dan de beide andere, die even sterk zijn. Ze zijn even scherp.

[2]) De 2 buitenste componenten zijn zoowat even sterk en scherp, de middelste is zwakker en zeer vaag.

[3]) De middelste component is het sterkst. De meest violette component is zwakker dan de meest roode. Slechts door aankrassen met een naald heb ik die violette component kunnen meten.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van de Heeren L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER: „*Frequentiewetten voor continu veranderlijke grootheden*".

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

Ten einde eenige waarschijnlijkheidsgrootheden te definieeren en hunne eigenschappen te onderzoeken, denken wij ons een kromme $y = f(x)$ gegeven. De kromme stelt een éénwaardige continue functie voor, die de eigenschap bezit, dat in een zeer klein interval van de abscis reeds alle waarden van het differentiaal quotient met groote talrijkheid voorkomen; hetzelfde kan — doch behoeft niet — omtrent de waarden van de ordinaat ondersteld te worden. Wanneer men den weg, die een deeltje bij de Brownsche beweging in de x-richting aflegt, als functie van den tijd graphisch voorstelt, krijgt men een kromme als de boven beschrevene. De beschouwingen die wij hieronder ontwikkelen zijn dus op de Brownsche beweging toe te passen.[1])

Wij vragen nu naar de kans, dat de waarde van ordinaat y in een interval Δ van den abscis aan het punt x gelegen, tusschen y en $y + dy$ ligt. Wij stellen deze kans door $W(y, x, \Delta)\, dy$ voor. Zij kan als volgt gedefinieerd worden: wij kiezen een element Δ in de omgeving van x en gaan de lengte na der projecties op de x-as van de stukken der kromme, waarvoor de ordinaat tusschen y en $y + dy$ ligt. De som van deze projecties gedeeld door Δ is dan de gezochte waarschijnlijkheid. Gelijk men gemakkelijk inziet, voert een andere definitie tot dezelfde waarde voor de kans. Kies daartoe op toevallige wijze een punt op de kromme in het interval Δ, en wel zoo dat evenlange intervallen van de abscis x even waarschijnlijk zijn. De kans dat de ordinaat van het gekozen punt tusschen y en $y + dy$ ligt, bedraagt dan $W(y, x, \Delta)\, dy$. De kromme moet nu aan de voorwaarde voldoen dat een zoodanige waarde van Δ kan worden aangegeven, dat $W(y\, x\, \Delta)$ niet verandert als Δ met een bedrag van de orde Δ toe- of afneemt.

We zullen ons in het volgende beperken tot gevallen, waarin de waarschijnlijkheid $W(y, x)$ niet van x afhangt; voor deze gevallen

[1]) Met een beperking intusschen, waarover hieronder nader gesproken zal worden.

die wij stationaire kunnen noemen, zullen wij de waarschijnlijkheid $W(y)\,dy$ voorstellen.

Bij de Brown'sche beweging van een vrij emulsie deeltje, waar het gemiddelde quadraat van den weg evenredig met den tijd toeneemt, hebben wij niet met een stationair geval te doen, wel echter indien het deeltje door krachten aan een nulstand gebonden is.

Een tweede functie, die wij beschouwen zullen, definieeren wij als volgt: Zoek op een interval Δ van de kromme de punten uit waar de ordinaat y_0 bedraagt, ga vanaf al deze punten in de positieve abscis richting over een afstand ξ verder, gevraagd de kans dat de ordinaat in het bereikte punt tusschen y en $y + dy$ ligt. Hebben wij met het stationaire geval te doen, dan is de frequentie-wet onafhankelijk van x en kunnen wij deze wet voorstellen door $W(y_0, y, \xi)\,dy$.[1])

Uit de definitie der functies $W(y)$ en $W(y_0, y, \xi)$ volgt, dat zij voldoen aan de identiteiten

$$\int W(y)\,dy = 1 \quad \text{en} \quad \int W(y_0, y, \xi)\,dy = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarbij de integratie over het geheele bereik der mogelijke waarden van y moet worden uitgestrekt. Hiervoor kan steeds $-\infty$ tot $+\infty$ gekozen worden.

Tusschen de functies $W(y)$ en $W(y_0, y, \xi)$ bestaat een verband, dat gemakkelijk kan worden aangegeven. Men heeft n.l. volgens hunne beteekenis

$$W(y) = \int W(y_0)\; W(y_0, y, \xi)\,dy_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De integratie moet weder over het geheele bereik van de ordinaat worden uitgestrekt, terwijl ξ een willekeurige waarde mag bezitten.

Terwijl de integraalvergelijking (2) zonder beperking geldt, bestaat er voor $W(y_0, y, \xi)$ een integraalvergelijking, die echter slechts beperkte geldigheid bezit. Denken wij ons een interval ξ_2 gesplitst in twee intervallen ξ_1 en ξ'_1 dan zal volgens de beteekenis der functie $W(y_0\, y\, \xi)$ de vergelijking

$$W(y_0, y_2\, \xi_2) = \int W(y_0, y_1\, \xi_1)\; W(y_1, y_2\, \xi'_1)\,dy_1 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gelden, *mits* de kans dat y_2 na een interval ξ'_1 op y_1 volgt, *onaf-*

[1]) Evenals bij het in deze Versl. Deel XVII, 1919, p. 1146 beschouwde discrete probleem zijn nog andere kansfuncties op te stellen, ook hier zullen wij ons tot de beide functies $W(y)$ en $W(y_0, y, \xi)$ beperken.

hankelijk is van het feit dat wij weten dat y_1 een interval ξ_1 tevoren door y_0 is voorafgegaan.

In den regel zal dit bij willekeurige keuze van ξ_1 niet het geval zijn; wij kunnen dit zoo uitdrukken: de integraalvergelijking (3) zal gelden, indien een interval ξ_1 zoodanig gekozen kan worden dat van de correlatie der y waarden aan het begin- en eindpunt van het interval kan worden afgezien. Hoe sneller het differentiaalquotient der kromme wisselt, voor des te kleiner intervallen zal de integraalvergelijking gelden. [1])

Het verdient opmerking, dat de integraalvergelijkingen (2) en (3) groote overeenkomst met de beide somvergelijkingen vertoonen waaraan de analoge kansen voor getallenreeksen voldoen. [2])

Wordt het interval ξ oneindig groot genomen, dan kan men nagaan waartoe $W(y_0, y, \xi)$ nadert. Het ligt voor de hand te onderstellen dat deze grootheid niet van y_0 afhangt. Voert men deze onderstelling in, dan volgt uit (2) dat $W(y_0, y, \infty)$ tot $W(y)$ nadert.

Het is niet moeielijk een voorbeeld te construeeren van een functie $W(y_0, y, \xi)$, die ten eerste voor $\xi = 0$ alleen bij $y = y_0$ een van nul verschillende waarde bezit (een „Zacke" vertoont); die ten tweede onafhankelijk van ξ een $W(y)$ levert, die ten derde voor $\xi = \infty$ in deze $W(y)$ overgaat en die tenslotte *niet* aan de integraalvergelijking voldoet.

Een dergelijke functie is bijv.:

$$W(y_0\, y\, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi f(\xi)}}\, e^{\frac{(y - y_0 \psi(\xi))^2}{f(\xi)}}$$

waarin f en ψ functies van ξ zijn. Integreert men naar y van $-\infty$ tot $+\infty$, zoo verkrijgt men gelijk behoort één. Opdat aan (2) voldaan is, is het noodig dat $f(\xi) + \psi^2(\xi) = 1$. Verder moet $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$ en dus $\psi(0) = 1$ en $\psi(\infty) = 0$ zijn.

De functie voldoet aan de integraalvergelijking wanneer wij $\psi(\xi) = e^{-\beta\xi}$ nemen, waarbij β een willekeurige positieve constante is. [3])

Wij zullen nu uit de integraalvergelijking voor $W(y_0, y\, \xi)$ een differentiaalvergelijking afleiden. Dit zal mogelijk zijn als wij omtrent $W(y_0\, y\, \xi)$ voor $\xi = 0$ de onderstelling mogen invoeren, dat het gebied der waarden van $y_0 - y_1$, waarvoor $W(y_0, y_1\, \xi)$ van nul verschilt, met ξ tot nul nadert. Of scherper, dat er als

$$\xi < \varepsilon$$

[1]) Bij vele in de natuur voorkomende gevallen is aan deze voorwaarde bij benadering reeds voor kleine (tijds)intervallen voldaan.

[2]) Vergelijk onze mededeeling deze Versl. Deel XVII, 1919, p. 1146.

[3]) Zij gaat dan over in een functie die door SMOLUCHOWSKI bij de theorie der Brownsche beweging is beschouwd.

steeds een waarde $|y-y_0| \mp \varepsilon'$ is aan te geven zoodanig dat $W(y_0, y_1, \xi) < \varepsilon''$ waarbij $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ kleiner genomen kunnen worden dan elk denkbaar getal.

Aan deze voorwaarden zal voldaan zijn wanneer y een continue functie van x is. De functie $W(y_0, y_1, \xi)$ bezit dan voor $\xi = 0$ een zgn. Zacke.

Wij gebruiken nu de integraalvergelijking in den vorm

$$W(y_0, y_2, \xi_1 + \xi_2) = \int W(y_0, y_1\, \xi_1)\, W(y_1, y_2, \xi_2)\, dy_1$$

en onderstellen dat ξ_2 een zeer kleine grootheid is. Dan heeft $W(y_1\, y_2\, \xi_2)$ slechts dan van nul verschillende waarden als $y_2 - y_1$ klein is. Daarom voeren wij nu in $y_1 = y_2 + y$ en ontwikkelen in het eerste lid naar ξ_2 en in het tweede lid de functie $W(y_0, y_2 + y_1\, \xi_1)$ naar y.

Het tweede lid neemt dan den vorm aan:

$$W(y_0, y_2, \xi_1)\int W(y_2+\eta, y_2, \xi_2)\, d\eta + \frac{\partial W(y_0, y_2, \xi_1)}{\partial y_2}\int \eta\, W(y_2+\eta, y_2, \xi_2)\, d\eta +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, \frac{\partial_2 W(y_0, y_2, \xi_1)}{\partial y_2^2}\int \eta^2\, W(y_2 + \eta, y_2, \xi_2)\, d\eta + \ldots$$

Wij zullen nu ξ_2 tot nul laten naderen, hieronder zullen wij aantoonen dat dan de ontwikkeling van het tweede lid na den derden term kan worden afgebroken.

Voert men nu in

$$\lim_{\xi_2=0} \frac{\int W(y_2+\eta, y_2, \xi_2)\, d\eta - 1}{\xi_2} = f_1(y_2)$$

$$\lim_{\xi_2=0} \frac{\int \eta\, W(y_2+\eta, y_2, \xi_2)\, d\eta}{\xi_2} = f_2(y_2)$$

en

$$\lim_{\xi_2=0} \tfrac{1}{2}\frac{\int \eta_2\, W(y_1+\eta, y_2, \xi_2)\, d\eta}{\xi_2} = f_3(y_2).$$

dan verkrijgt men voor $W(y_0, y_2, \xi)$ de partieele differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = f_1\, W + f_2\, \frac{\partial W}{\partial y_2} + f_3\, \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Tusschen de coefficienten f_1, f_2 en f_3 bestaat een betrekking. Men kan deze bijv. afleiden door naar y_2 over het bereik der mogelijke waarden van y te integreeren. Daar $\int W dy = 1$ is verkrijgt men na partieele integratie

$$\int (f_3'' - f_2' + f_1)\, W(y_0, y_2\, \xi)\, dy_2 = 0,$$

waarbij de accenten differentiaties naar y_2 aanduiden. Laat men hierin nu ξ tot nul naderen, dan komt er, daar $W(y_0, y_2, \xi)$ voor $\xi = 0$ alleen voor $y = y_0$ van nul verschilt en $\int W(y_0, y_2\, \xi)\, dy_2 = 1$ is,

$$f_2'' - f_1' + f_1 = 0 \quad \text{voor} \quad y_2 = y_0.$$

Daar y_0 willekeurig gekozen kan worden, geldt de betrekking identiek.

Maakt men van deze betrekking gebruik, dan neemt de differentiaalvergelijking den vorm

$$\frac{\partial W(y_0\, y, \xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_2 \frac{\partial W(y_0, y, \xi)}{\partial y} + (f_1 - f_2')\, W(y_0, y, \xi)\right) \quad . \; . \quad (5)$$

aan. Waarvoor men ook schrijven kan

$$\frac{\partial W(y_0, y, \xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial y}\left(F_1 \frac{\partial W(y_0, y, \xi)}{\partial y} + F_2\, W(y_0, y, \xi)\right). \quad . \quad (5a)$$

Hierin kunnen F_1 en F_2 willekeurige functies van y zijn, die y_0 als parameter bevatten. De aard van de „Zacke" bepaalt voor elk bijzonder geval den vorm van de functies F_1 en F_2.

Wij moeten nu nog aantoonen dat de ontwikkeling van p. 286 kan worden afgebroken bij het diff. quotient van de 2e orde. Hiertoe is het noodig aan te toonen dat

$$\lim_{\xi=0} \frac{\int \eta^p\; W(y + \eta, y, \xi)\, dy}{\xi} = 0$$

als $p > 2$, terwijl gegeven is dat voor $p = 2$ de limiet eindig is.

Wanneer ξ tot nul nadert, zal het gebied der waarden voor η waarvoor $W(y + y, y, \xi)$ van nul verschilt, steeds kleiner worden. Dientengevolge zal de grootste waarde van η die iets bijdraagt tot de integraal, tot een willekeurig kleine waarde convergeeren als ξ tot nul nadert. Het gevolg is dat

$$\frac{1}{\xi}\int |\eta|^p\; W(y + \eta, y, \xi)\, dy \leqq \frac{1}{\xi}\int |\eta|^{p-1}\; W(y + \eta, y, \xi)\, dy$$

zal zijn als ξ kleiner is dan een willekeurig klein gekozen grootheid.

Is dus voor $p{=}2$ de integraal gedeeld door ξ eindig, dan zal, als ξ tot nul nadert, voor $p > 2$ de integraal tot nul naderen.

Daarentegen kan $\frac{1}{\xi}\int \eta\, W(y + \eta, y, \xi)\, d\eta$ voor $\xi = 0$ tot een eindige limiet naderen, daar in deze integraal positieve en negatieve stukken elkaar kunnen opheffen. In elk bijzonder geval moet echter geverifieerd worden of f_1 en f_2 eindig zijn.

Uit de integraal-vergelijking (2) voor $W(y)$ is ook een differentiaal-

vergelijking af te leiden. Wij kunnen in deze vergelijking ξ tot nul laten naderen, en wanneer dan $W(y_0, y_1 \xi)$ voor ξ een Zacke bezit kunnen wij in (2) y_0 door $y + \eta$ vervangen. Wij krijgen dan

$$W(y) = \int W(y+\eta) W(y+\eta, y\, \xi)\, d\eta = (\eta y) \int W(y+\eta, y, \xi)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\partial W}{\partial y} \int \eta\, W(y+\eta, y, \xi)\, d\eta + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \int \eta^2\, W(y+\eta, y, \xi)\, d\eta + \ldots$$

Voeren wij nu weder de functies f_1, f_2, f_3, die van y afhangen, in, dan vinden wij voor $W(y)$ de differentiaal-vergelijking

$$f_3 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + f_2 \frac{\partial W}{\partial y} + f_1 W = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Deze differentiaal-vergelijking geldt ook, als tengevolge van de correlatie de vergelijking (5) niet geldt. Laat men ξ oneindig worden dan zal voor $W(y_0\, y\, \xi)$, voor de gevallen waarin de differentiaal-vergelijking (5) geldt, uit deze vergelijking een vergelijking voor $W(y_0\, y\, \infty)$ d. i. voor $W(y)$ ontstaan, die denzelfden vorm als (6) bezit.

Als voorbeelden van problemen waarvoor een waarschijnlijkheids-functie door een vergelijking van den vorm (6) bepaald wordt, zullen wij eenige vraagstukken beschouwen, verwant met die welke in onze mededededeeling over de statistiek van getallenreeksen beschouwd werden.

Wij hebben in die mededeeling p. 1152 een vraagstuk behandeld dat groote overeenkomst met het vraagstuk van de statistiek der emulsies — door Smoluchowski opgelost — vertoont. Wij beschouwden een groep deeltjes, de kans dat een deeltje uit deze groep verdwijnt werd P gesteld, terwijl de kans dat een deeltje in de groep treedt zoo gekozen werd, dat de groep gemiddeld stationair was. Dit proces kan nu telkens na een interval τ herhaald worden. Voor de kans dat dan na $k+1$ intervallen een aantal n_1 door een aantal n_2 gevolgd wordt, vonden wij de som betrekking

$$W(n_1, n_2, k+1) = \sum_{\xi} W(n_1, \xi\, k)\; W(\xi, n_2\, 1) . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarbij

$$W(\xi, n_2, 1) = (1-P)^{\xi} \frac{(\nu P)^{n_2-\xi}}{(n_2-\xi)\,!} e^{-\nu P} \quad \text{als} \quad n_2 > \xi$$

en

$$W(\xi, n_2, 1) = \frac{\xi\,!}{(\xi-n_2)\,!\; n_2\,!} P^{\xi-n_2}(1-P)^{n_2}\, e^{-\nu P} \quad \text{als} \quad n_2 < \xi.$$

Hierin is ν het gemiddelde aantal deeltjes in het interval. Wij laten nu het interval τ tot nul naderen en de kans P eveneens tot nul. Om dan een eindige uitkomst te verkrijgen, moeten wij ν tot on-

eindig en νP tot nul laten naderen. De grootheid $W(\xi, n_2, 1)$ gaat dan toch over tot een uitdrukking, die alleen dan van nul verschillende waarden bezit, als $\xi = n_2$ is.

Op deze wijze vinden wij in de grens

$$W(n_2, n_2, 1) = e^{-P(n_2+\nu)} \quad , \quad W(n_2+1, n_2, 1) = (n_2+1)\, e^{-(n_2+\nu)P}$$

en

$$W(n_2-1, n_2, 1) = \nu P\, e^{-(n_2+\nu-1)P}$$

Substitueert men dit in de vergelijking (7) dan verkrijgt men

$$W(n, n_2, k+1) = W(n_1 . n_2, k)\{e^{-P(n_2+\nu)} - 1\} + \\ + W(n_1, n_2+1, k)(n_2+1)\, e^{-P(n_2+\nu)} + \\ + W(n_1, n_2-1, k)\, \nu P\, e^{-P(n_2+\nu)}.$$

Daar n.l. $W(n_2, n_1, 1)$ tot een „Zacke” nadert is, de waarde van deze kans als $|n_2 - n_1| > 1$ klein, en kan dus de som tot de beschouwde termen beperkt worden.

Wanneer het aantal deeltjes groot wordt, kan men bewijzen dat de afwijking van n van het gemiddelde ν van de orde van $\nu^{1/2}$ is. Daarom stellen wij $n - \nu = y\nu^{1/2}$. De grootheid y, die een maat is voor de afwijking van de concentratie van het gemiddelde, zal van de orde van de eenheid zijn als ν tot oneindig nadert. Stel den tijd $k\tau = x$ [1]), dan kan x eindig blijven als τ tot nul en k tot oneindig nadert. Zij nu $W(y_0, y, x)\, dy$ de kans dat y ligt tusschen y en $y + dy$, als een tijd te voren de waarde y_0 bestond. Deze kans komt in het discrete geval overeen met de kans dat n_2 tusschen twee waarden n_2' en n_2^λ ligt die bepaald zijn door de betrekkingen.

$$n_2' - \nu = y\, \nu^{1/2}$$
$$n_2^\lambda - \nu = (y + dy)\, \nu^{1/2} \quad \text{of} \quad n_2^\lambda - n_2' = \lambda = dy\, \nu^{1/2}.$$

Dus is

$$W(y_0, y, x) = \sum_{n_2'}^{n_2^\lambda} W(n_1, n_2\, x)$$

Daar wij onderstellen dat het verschil van n_2' en n_2^λ relatief klein is, verschillen de termen in de bovenstaande som weinig, dus is:

$$W(y_0, y, x)\, dy = \lambda\, W(n_1, n_2, k)$$

Voeren wij de waarde van λ, n_1 en n_2 in, dan krijgt men

$$W(y_0, y, x) = \nu^{1/2}\, W\left(\nu + y_0\, \nu^{1/2}, \nu + y\nu^{1/2}, \frac{x}{\tau}\right).$$

Substitueert men dit in de vergelijking voor $W(n_1, n_2, x)$, en ontwikkelt men de functie W naar de grootheden $\frac{dx}{\tau}$ en $dy\, \nu^{1/2}$, dan vindt men voor $\nu = \infty$, $\tau = 0$ en $P\nu = 0$, de differentiaalvergelijking

[1]) De x die hier gebruikt is vervangt de veranderlijke ξ van (5).

$$\frac{P}{\tau} W(y_0, y, x) + \frac{P}{\tau} y \frac{\partial W(y_0, y, x)}{\partial y} + \frac{P}{\tau} \frac{\partial^2 W(y_0, y, x)}{\partial y^2} = \frac{\partial W(y_0, y, x)}{\partial x}.$$

De grootheid $\frac{P}{\tau}$ moet dus eindig zijn om een eindige differentiaalvergelijking te krijgen. Voor $W(y)$ geldt een soortgelijke beschouwing.

Op dezelfde wijze kan ook het door P. en T. EHRENFEST in verband met het H theorema gestelde probleem tot een continu waarschijnheidsvraagstuk gemaakt worden. Bedienen wij ons van de notaties van de reeds geciteerde mededeeling, dan is

$$W(\Delta_1, \Delta_2, k+1) = \sum_{\xi} W(\Delta_1, \xi, k)\, W(\xi, \Delta_2, 1) =$$

$$= W(\Delta_1, \Delta_2 - 2, k) \frac{N - \Delta_2 + 2}{2N} + W(\Delta_1, \Delta_1, k) \frac{N + \Delta_2 + 2}{2N}.$$

of dus

$$W(\Delta_1, \Delta_2, k+1) - W(\Delta_1, \Delta_2, k) = \tfrac{1}{2} [W(\Delta_1, \Delta_1 - 2, k) +$$
$$+ W(\Delta_1, \Delta_2 + 2, k) - 2\, W(\Delta_1, \Delta_2 k)] +$$
$$+ \frac{\Delta_2}{2N} [W(\Delta_1, \Delta_2 + 2, k) - W(\Delta_1, \Delta_2 - 2, k)] +$$
$$+ \frac{1}{N} [W(\Delta_1, \Delta_2 - 2, k) + W(\Delta_1, \Delta_2 + 2, k)].$$

Wij gaan nu weer over van dit discrete tot een continu probleem. Met $W(\Delta_1, \Delta_2, k)$ moet dan $W(y_0, y, x)\, dy$ overeenstemmen, wij hebben dan dat

$$W(y_0, y, x)\, dy = \sum_{\Delta_2'}^{\Delta_2^\lambda} W(\Delta_1, \Delta_2, k).$$

In deze som kunnen weder alle W's even groot genomen worden, het aantal is weer λ, wij stellen verder $y = \frac{\Delta}{N^{1/2}}$, dus $dy = \frac{\Delta_2^\lambda - \Delta'_2}{N^{1/2}} =$ $= \frac{2\lambda}{N^{1/2}}$, daar Δ bij dit probleem met 2 opklimt. Op deze wijze vinden wij

$$W(y_0, y, x) \frac{2\lambda}{N^{1/2}} = \lambda\, W(\Delta_1\, \Delta_2, k),$$

waarbij nog $x = k\tau$ gesteld is. Voeren wij dit in de somvergelijking in, dan gaat deze over in

$$\frac{\partial W(y_0, y, x)}{\partial x} = \frac{2}{N\tau} \frac{\partial_2 W(y_0, y, x)}{\partial y_2} + \frac{4y}{N\tau} \frac{\partial W(y_0, y, x)}{\partial y} + \frac{4}{N\tau} W(y_0, y, x)$$

Voor $\tau = 0$, moet $N\tau$ eindig zijn, wil de differentiaalvergelijking eindig zijn. Stellen wij $N\tau = x_0$, dan wordt de vergelijking

$$\frac{\partial W(y_0, y, x)}{\partial x} = \frac{2}{x_0} \frac{\partial^2 W(y_0, y, x)}{\partial y_2} + \frac{4}{x_0} \frac{\partial}{\partial y} (y W(y_0, y, x))$$

Voor $x = \infty$ wordt $W(y_0, y\, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = W(y)$, d.w.z. heeft men de Gaussische fouten-wet.

Wij merken nog op dat een eenigszins gewijzigd probleem vrijwel tot dezelfde differentiaalvergelijking voert.

Wij nemen, evenals in het probleem van EHRENFEST, weder genummerde ballen, die over twee bakken verdeeld zijn. Wordt nu bij een loterij een nummer getrokken, dan springt de bal, als hij hetzelfde nummer draagt:

1°. als hij in vaas één is naar vaas twee;

2°. als hij in vaas twee is, springt de bal zelf en springen nog twee andere van een nummer hooger, resp. lager, mede.

Werkt men het probleem uit, wat de kans op een gegeven verschil in aantal tusschen de bakken is, dan is de eenige wijziging die te voorschijn komt die, dat de coefficient van $\frac{\partial^2 W(y_0, y_1 x)}{\partial y_2}$ thans $\frac{6}{x_0}$ wordt.

Het discrete probleem is niet langer omkeerbaar, daar de kans om toe te nemen anders is dan die om af te nemen. Dit is merkwaardig, daar zal blijken, dat elk kansprobleem waarvoor de differentiaalvergelijking geldt, omkeerbaar is.

Wij zullen nu het vraagstuk der omkeerbaarheid voor het continue probleem onderzoeken.

Een toevallige functie zullen wij omkeerbaar noemen wanneer de kans dat een waarde y_0 na een afstand x [1]) door een waarde y gevolgd wordt, even groot is als de kans dat y een afstand x te voren aan y_0 vooraf ging, of, met behulp van W uitgedrukt

$$W(y_0, y, x) = W(y, y_0, -x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wij kunnen nu deze conditie op analoge wijze als bij het discrete probleem in een anderen vorm brengen. Men heeft n.l.

$$W(y_0, y, -x) dy = \frac{W(y)\, dy\, W(y, y_0\, x)\, dy_0}{dy_0 \int W(y)\, W(y, y_0\, x)\, dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Men ziet dit gemakkelijk in als men bedenkt, dat $W(y)\,dy$ de kans is dat de beschouwde kromme bij A het interval tusschen y en $y + dy$ snijdt, $W(y, y_0, x)\, dy_0$ de kans dat de kromme die van A uitgaat, bij B in een interval tusschen y_0 en $y_0 + dy_0$ komt,

---

[1]) We hebben ook in het volgende de ξ door x vervangen.

onverschillig in welk punt van het interval dy in A de kromme uitgaat, daar dy willekeurig klein genomen kan worden.

De betrekking (9) volgt dan, wanneer men $W(y_0, y, -x)$ als een waarschijnlijkheid à posteriori berekent. Past men nu (2) toe dan gaat (9) over in

$$W(y_0, y, x)\, W(y_0) = W(y, y_0\, x)\, W(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Geldt de vergelijking (10) voor een interval x, dan kan men bewijzen dat zij geldt voor het interval nx (waarbij n een geheel getal is) mits de integraal-vergelijking geldt. Men toont dit als volgt aan:

$$W(y_0)\, W(y_0, y, x + x') = \int W(y, y_1\, x')\; W(y_0, y, x)\; W(y_0)\, dy =$$

$$= \int W(y, y_1, x')\, W(y, y_1, x)\, W(y)\, dy = \int \frac{W(y_1, y, x')\, W(y_1)}{W(y)} \cdot W(y\, y_0 x)\, W(y) dy =$$

$$= W(y_1)\; W(y_1, y_0, x + x').$$

Als (10) geldt voor een willekeurig klein interval, geldt zij algemeen voor alle gevallen waarin de integraal-vergelijking geldt. Anderzijds kan (10) gelden zonder dat de integraal-vergelijking geldt.

Wij kunnen nu aantoonen, dat indien $W(y_0, y_1 x)$ aan de differentiaal-vergelijking voldoet, aan de conditie voor de omkeerbaarheid is voldaan.

Wij beschouwen daartoe de functies $W_1 = W(y_1, y, \vartheta)$ en $W' = W(y_0, y, x - \vartheta)$. Wij hebben dan

$$\frac{\partial W_1}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial y}\left(F_1 \frac{\partial W_1}{\partial y} + F_2\, W_1\right)$$

en

$$\frac{\partial W'}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(F_1 \frac{\partial W'}{\partial y} + F_2\, W'\right)$$

Vermenigvuldigt men de eerste vergelijking met $\frac{W'}{W(y)} dy$ en de tweede met $\frac{W_1}{W(y)} dy$, telt men het resultaat op en integreert men naar y over het bereik dat deze grootheid doorloopen kan, dan wordt het tweede lid nul. Men heeft nl.

$$\int \Bigg[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{F_1}{W(y)} \left(W' \frac{\partial W_1}{\partial y} - W_1 \frac{\partial W'}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{W^2 y)} \left(W' \frac{\partial W_1}{\partial y} - W_1 \frac{\partial W'}{\partial y} \right) \left(W(y)\, F_2 + F_1 \frac{\partial W(y)}{\partial y} \right) \right\} \Bigg] dy.$$

Nu is volgens de differentiaalvergelijking voor $W(y)$

$$F_2 W(y) + F_1 \frac{dW(y)}{dy} = C\cdot$$

daar echter aan de grenzen $W(y)$ en $\frac{dW(y)}{dy}$ nul zijn, is $C=0$. Men heeft dus voor het tweede lid

$$\frac{F_1}{W(y)}\left(W'\frac{\partial W_1}{\partial y}-W_1\frac{\partial W'}{\partial y}\right)\Bigg/_{y=-\infty}^{y=+\infty}$$

doch aan deze grenzen is W' en W_1 evenals $\frac{\partial W_1}{\partial y}$ en $\frac{\partial W'}{\partial y}$ gelijk aan nul. Wij zien dus dat het tweede lid in zijn geheel nul is. Dientengevolge krijgen wij dus

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int\frac{W(y_1,y,\vartheta)W(y_0,y,x-\vartheta)}{W(y)}dy=0$$

of dus

$$\int\frac{W(y_1,y,\vartheta)W(y_0,y,x-\vartheta)}{W(y)}dy.$$

onafhankelijk van ϑ.

Nemen wij nu achtereenvolgens $\vartheta=x$ en $\vartheta=0$. Voor $\vartheta=0$ dragen alleen termen bij waarvoor $y=y_1$ is. Voor $\vartheta=x$ alleen die termen waarvoor $y=y_0$ is, de beschouwde integraal wordt dus nog

$$\frac{W(y_0,y_1,x)}{W(y_1)}\int W(y_1,y,0)\,dy=\frac{W(y_0,y_1,x)}{W(y_1)}$$

en

$$\frac{W(y_1,y_0,x)}{W(y_0)}\int W(y_0,y,0)\,dy=\frac{W(y_1\,y_0\,x)}{W(y_0)}.$$

Deze waarden moeten, daar de waarde van de integraal niet van ϑ afhangt, gelijk zijn en wij verkrijgen dus

$$W(y_1)W(y_1,y_0,x)=W(y_0)W(y_0,y_1,x).$$

d.w.z. voor een kansfunctie die aan de beschouwde differentiaalvergelijking voldoet, is steeds aan de omkeerbaarheidsbetrekking voldaan.

Wij kunnen de functie $W(y_0,y,x)$ gebruiken om de beteekenis van eene door Einstein in de stralingstheorie en door Mevr. de Haas—Lorentz in de theorie der Brownsche beweging gebruikte vergelijking nader te onderzoeken.

Voor de Brownsche beweging [1]) is nl. ondersteld dat de versnelling $\frac{du}{dt}$ gegeven wordt door:

$$\frac{du}{dt}=au+X.$$

waarbij $\overline{X}$ gemiddeld bij gegeven u_0 gelijk is aan nul.

[1]) De snelheid-tijd kromme bezit het stationaire type.

Wij zullen nu nagaan onder welke voorwaarde in de boven beschouwde gevallen een dergelijke vergelijking geldt. Als de integraalvergelijking geldt, kan men voor $\overline{\frac{dy}{dx}}^{y_0}$, het gemiddelde van het differentiaal-quotient bij gegeven y_0 schrijven.

$$\overline{\frac{dy}{dx}}^{y_0} = \frac{1}{dx}\int_{y_1}\int_{y_2} W(y_0, y_1, x) W(y_1, y_2, dx)\,(y_2 - y_1)\,dy_1\,dy_2{}^{1)}$$

$$= \frac{1}{dx}\int\int y\,(W(y_0, y, x + dx) - W(y_0, y, x))\,dy =$$

$$= \int y\,\frac{\partial W(y_0, y, x)}{\partial x}\,dy = \int y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(F_1\frac{\partial W(y_0, y\,x)}{\partial y} + F_2 W(y_0, y, x)\right)dy$$

$$= \int (F_2 - F_1') W(y_0, y, x)\,dy.$$

Indien nu $F_2 - F'_1$ gelijk is aan $-ay$ krijgen wij

$$\overline{\frac{dy}{dx}}^{y_0} = -a\,\overline{y}^{y_0}$$

of

$$\frac{dy}{dx} = -ay + X$$

waarbij X een grootheid is die gemiddeld bij gegeven y_0 nul is. De formule van Einstein blijkt dus een bijzonder geval te zijn van de relatie

$$\overline{\frac{dy}{dx}}^{y_0} = \overline{F_2 - F_1'}^{y_0} \quad \text{of} \quad \frac{dy}{dx} = F_2 - F_1' + X.$$

Het bijzondere en onbewezene in de onderstelling is, dat de grootheid a met inwendige wrijving en afmetingen van het Brownsche deeltje samenhangt. De onderstelling waaronder zij te voorschijn komt, dat voor de y (snelheid) waarden de integraal-vergelijking voor een willekeurig klein interval geldt, is bij de Brownsche beweging niet vervuld, wel zal de tijd (x) waarop de integraalvergelijking geldt zeer klein zijn ten opzichte van alle meetbare tijden.

Utrecht. *Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

---

1) Deze vergelijking geldt alleen, als de kans dat y_2 op y_1 volgt na een interval dx onafhankelijk is van het feit, dat y_1 een interval x te voren door y_0 is voorafgegaan.

Sterrekunde. — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan: „*Theorie der Satellieten van Jupiter.* II. *De variaties.*"

Wij beperken ons nog steeds tot het niet-periodieke deel $[R_i]$ der storingsfunctie, dat ook voor de bepaling van de intermediaire baan gebruikt is. [1] De grootheden h_i, k_i, v_i, ω_i, die in de intermediaire baan nul zijn, worden nu bepaald door de vergelijkingen (23), [2] waarvan de oplossing door (24) wordt gegeven. Ter bepaling van de vijf waarden van β_q heeft men den determinant (28), terwijl dan c'_{iq} en c''_{iq} uit (27) en c_{iq} en c'''_{iq} uit de eerste en de laatste van (25) worden bepaald. De uitdrukkingen der coefficienten a_{ij}, a'_{ij}, $b_{ij}, b'_{ij}, d_{ij}, d'_{ij}, e_{ij}, e'_{ij}$ zijn gegeven in Deel XII, eerste stuk van de Annalen der Sterrewacht te Leiden, blz. 31. Dan heeft men

$$A_{ij} = \Sigma_l (a'_{il} a_{lj} + b'_{il} d_{lj}),$$
$$B_{ij} = \Sigma_l (a'_{il} b_{lj} + b'_{il} e_{lj}),$$
$$C_{ij} = \Sigma_l (d'_{il} a_{lj} + e'_{il} d_{lj}),$$
$$D_{ij} = \Sigma_l (d'_{il} b_{lj} + e'_{il} e_{lj}).$$

De berekening der grootheden a_{ij}, a'_{ij}, etc. en A_{ij}, B_{ij}, etc. zal uitvoerig gepubliceerd worden in de Annalen van de Sterrewacht te Leiden. Hier wordt alleen het resultaat medegedeeld.

De determinant (28) is: (zie formule A, volgende pagina).

De coefficienten zijn gegeven in de eenheden van de *achtste* decimaal. Nummert men de kolommen met romeinsche, en de rijen met arabische cijfers, en past men dan de bewerkingen toe:

tel	$4 \,.\, (V) + 2 \,.\, (VI)$	op bij	(VII)
„	$3 \,.\, (V) - e_1 \,.\, (I) - e_2 (II) - e_3 (III) - e_4 (IV)$	„ „	(VI)
„	$-2 \,.\, (7)$	„ „	(6)
„	$2 \,.\, (7) - 3 \,.\, (6)$	„ „	(5)
„	$e_i [(6) - 2 \,.\, (7)]$	„ „	(i) $(i = 1 \ldots 4)$,

dan gaat de determinant over in: (zie formule B, volgende pagina).

[1] Zie *Schets eener nieuwe theorie der Satellieten van Jupiter*, deze Verslagen, Deel XXVI, blz. 1374 en 1476, en *Theorie der Satellieten van Jupiter.* I. *De intermediaire baan*, deze Verslagen, Deel XXVII, blz. 1204.

[2] „Schets" blz. 1477. De definitie van h_i en k_i is eenigszins anders dan in de „Schets," in overeenstemming met de invoering van e_i in plaats van η_i. Wij hebben nu

$$e_i \cos g_i = \mathrm{e}_i + h_i$$
$$e_i \sin g_i = k_i.$$

	$+29100.69-\beta^2$	$+21.69$	-46.73	-1.42	$+118.18$	-232.81	-7.12	0
	$+170.79$	$+22765.45-\beta^2$	$+102.71$	$+4.77$	$+32.87$	$+114.95$	-361.39	0
	-14.41	$+37.16$	$+21367.36-\beta^2$	-25.51	$+0.21$	$+12.38$	-25.62	0
A	$+0.36$	$+1.69$	-34.51	$+21087.28-\beta^2$	$+0.00$	-0.01	$+0.01$	0
	$+82273$	$+20156$	-10	$+0$	$+530.06-\beta^2$	-1058.08	-4.08	0
	-97192	$+44489$	$+20187$	-0	-618.14	$+1876.26-\beta^2$	-1279.98	0
	$+8$	-16723	-4933	$+0$	-0.38	-158.07	$+317.68-\beta^2$	0
	$+0$	$+1$	$+0$	-0	$+0.00$	$+0.00$	-0.01	$-\beta^2$

	$+28694.59-\beta^2$	$+347.27$	$+78.82$	-1.42	$+115.60$	0	0	0
	-737.84	$+23493.93-\beta^2$	$+383.62$	$+4.76$	$+27.10$	0	0	0
	-72.36	$+83.62$	$+21385.27-\beta^2$	-25.51	-0.15	0	0	0
B	$+0.34$	$+1.70$	-34.51	$+21087.28-\beta^2$	$+0.00$	0	0	0
	$+373866$	-146757	-70437	$+2$	$+2383.70-\beta^2$	0	0	0
	$+97209$	$+77935$	$+30053$	-1	-617.37	$-\beta^2$	0	0
	$+8$	-16723	-4933	$+0$	-0.38	0	$-\beta^2$	0
	$+0$	$+1$	$+0$	-0	$+0.00$	0	0	$-\beta^2$

Den determinant, bestaande uit de vijf eerste kolommen en rijen kan men zich ontstaan denken door de eliminatie van y_i uit de vijf lineaire vergelijkingen (waar F_{ij} de elementen van den determinant voorstellen):

$$\Sigma_j F_{ij} y_j - \beta^2 y_i = 0 \qquad (i, j = 1 \ldots 5)$$

Het verband tusschen de nieuwe onbekenden y_i en de oorspronkelijke onbekenden c'_i en c''_i der vergelijkingen (27) is gegeven door

$$c_i' = y_i - e_i y_8, \qquad (i = 1 \ldots 4)$$
$$c_1'' = y_5 + 3y_6 + 4y_7,$$
$$c_2'' = y_6 + 2y_7,$$
$$c_3'' = y_7,$$
$$c_4'' = y_8.$$

Bij elk der vijf wortels β^2_q, die van nul verschillen, behoort een stel y_{iq} $(i = 1 \ldots 5)$. Dan worden y_6, y_7 en y_8 bepaald uit

$$\Sigma_j F_{ij} y_j - \beta^2 y_i = 0 \qquad (j = 1 \ldots 5, \quad i = 6 \ldots 8)$$

Bepalen wij verder de grootheden x_i uit de condities

$$F'_{55} = F_{55} + \Sigma_j x_j F_{5j},$$
$$(i, j = 1 \ldots 4)$$
$$F_{i5} + \Sigma_j x_j F_{ij} - x_i F'_{55} = 0,$$

en stelt men dan

$$F'_{ij} = F_{ij} - x_i F_{5j}, \qquad (i, j = 1 \ldots 4)$$

en

$$y_i = z_i + x_i y_5, \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

dan heeft men ter bepaling van z_i en β^2 de vergelijkingen

$$(\alpha) \qquad \Sigma_j F'_{ij} z_j - \beta^2 z_i = 0, \qquad (i, j = 1 \ldots 4)$$

en y_5 wordt bepaald door

$$\Sigma_j F_{5j} z_j + (F'_{55} - \beta^2) y_5 = 0. \qquad (j = 1 \ldots 4)$$

De vergelijkingen (α) geven vier der wortels β^2. De vijfde wortel is

$$\beta_5^2 = F'_{55},$$

en de bijbehoorende waarden van y_5 en z_i zijn

$$y_{55} = 1 \quad , \quad z_{i5} = 0. \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Ter oplossing van de vergelijkingen (α) stelt men $z_{qq} = 1$. Daar de coefficienten F'_{ij} voor $i = j$ veel grooter zijn dan de andere, kan men dan stellen

$$\beta^2_q = F'_{qq} + \xi_q$$
$$z_{iq} = \frac{F'_{iq}}{F'_{qq} - F'_{ii}} + \eta_{iq}$$

Men vindt dan ter bepaling van ξ_q en η_{iq} een stel vergelijkingen,

waaruit deze grootheden, die klein zijn, zeer gemakkelijk kunnen opgelost worden. Men vindt

$$F'_{55} = + 1025.13,$$

terwijl de determinant der vier vergelijkingen (α) wordt

$$\begin{vmatrix} +30250.34-\beta^2 & -263.42 & -214.29 & -1.41 \\ -235.83 & +23296.87-\beta^2 & +289.04 & +4.76 \\ -71.72 & +83.36 & +21385.15-\beta^2 & -25.51 \\ +0.33 & +1.71 & -34.50 & +21087.28-\beta^2 \end{vmatrix}$$

De vijf wortels β^2, die op deze wijze bepaald zijn, zijn nog steeds in eenheden der 8e decimaal uitgedrukt:

$$\beta_1^2 = + 30261.15$$

$$\beta_2^2 = + 23299.79$$

$$\beta_3^2 = + 21374.51$$

$$\beta_4^2 = + 21084.19$$

$$\beta_5^2 = + 1025.13$$

Men stelt nu, voor $q = 1 \ldots 4$,

$$\psi_q = \beta_q \tau + \psi_{q0} = \varkappa\tau + \varpi_q + \pi_{q0} = \varkappa\tau + \gamma_q \tau + \varpi_{q0} + \pi_{q0},$$

waarin

$$\pi_{10} = \pi_{30} = \pi_{40} = 0 \quad , \quad \pi_{20} = 180°,$$

dan zijn $\varpi_q = \gamma_q\tau + \varpi_{q0}$ de lengten der „eigen" perijovia, terwijl ψ_q voor $q = 1 \ldots 4$ de argumenten der ongelijkheden van groep II zijn, en ψ_5 het argument der libratie is.

Voor de middelbare bewegingen dier grootheden in graden per dag vindt men[1])

		El. en Massa's.
$\gamma_1 =$	0°.148668	0°.14407
$\gamma_2 =$	0 .039842	0 .039593
$\gamma_3 =$	0 .006949	0 .007046
$\gamma_4 =$	0 .001862	0 .001864
$\beta_5 =$	0 .16347	0 .16252

Deze middelbare bewegingen zijn nog niet de definitieve, daar nog verwaarloosd is

1°. het effect van het periodieke deel der storingsfunctie $R_i - [R_i]$,

2°. de quadraten en producten der grootheden h_i, k_i, v_i, ω_i,

3°. de hellingen van de satellieten-banen op den equator van Jupiter.

[1]) De bewegingen γ_i en β_5 bevatten geen precessie, welke dus ook van de waarden van γ_i uit El. en Massa's is afgetrokken.

Behoudens de correcties die eventueel later wegens deze drie oorzaken nog aan te brengen zullen zijn, kan het als vaststaand worden aangenomen dat de grootheden β_i en γ_i geheel nauwkeurig en volledig zijn tot de laatste hier gegeven decimaal.

De ter vergelijking bijgevoegde waarden zijn die van mijne theorie van 1908, op de hier gebruikte massa's gereduceerd [1]). Deze theorie is die van SOUILLART, met verbetering van enkele fouten, terwijl de berekening van de middelbare beweging van het argument der libratie een orde verder doorgevoerd is dan SOUILLART deed.

De voor de grootheden c_{iq}, c'_{iq}, c''_{iq} en c'''_{iq} gevonden waarden zijn:

q	1	2	3	4	5
c_{1q}	+ 0.96868	+ 0.02754	+ 0.02479	+ 0.00230	— 0.00054
c_{2q}	— .04429	+ .93485	— .17327	— .01584	+ .00032
c_{3q}	— 00686	+ .03313	+ .98970	+ .08804	+ .00004
c_{4q}	+ .00006	+ .00012	— .12098	+ 1.00000	.00000
c'_{1q}	+ 0.96038	+ 0.05057	+ 0.02483	+ 0.00229	— 0.00287
c'_{2q}	— .01944	+ .97713	— .15246	— .01400	+ .00155
c'_{3q}	— .00637	+ .04010	+ .99952	+ .08891	+ .00018
c'_{4q}	+ .00006	+ .00012	— .12098	+ 1.00000	.00000
c''_{1q}	+ 2.7649	+ 0.9617	— 0.07900	— 0.00718	+ 0.15668
c''_{2q}	— 3.3850	+ 1.8535	+ .57340	+ .05032	— .26677
c''_{3q}	+ 0.0300	— 0.7324	— .11736	— .01022	+ .02150
c''_{4q}	.0000	.0000	+ .00001	.00000	.00000
c'''_{1q}	+ 0.01195	+ 0.00363	— 0.00028	— 0.00002	+ 0.00012
c'''_{2q}	— .02934	+ .01436	+ .00405	+ .00035	— .00043
c'''_{3q}	+ .00052	— .01113	— .00149	— .00013	+ .00007
c'''_{4q}	0	0	0	0	0

Het effect van de variaties op den voerstraal en de lengte is, als men producten en quadraten van ε_q verwaarloost, (evenals producten $e_i \varepsilon_q$), en als men stelt

$$\tau_{iq} = \pm \tfrac{1}{2} (c_{iq} + c'_{iq}),$$

$$\frac{\delta r_i}{a_i} = -\frac{3}{2} \Sigma_q\, c'''_{iq}\, \varepsilon_q \cos \psi_q - \Sigma_q\, \tau_{iq}\, \varepsilon_q \cos (\lambda_i - \varpi_q) -$$

$$- \tfrac{1}{2}\, \Sigma_q\, (c_{iq} - c'_{iq})\, \varepsilon_q \cos (l_i + \psi_q)$$

$$\delta w_i = \Sigma_q\, c''_{iq}\, \varepsilon_q \sin \psi_q + 2\, \Sigma_q\, \tau_{iq}\, \varepsilon_q \sin (\lambda_i - \varpi_q) + \Sigma_q\, (c_{iq} - c'_{iq})\, \varepsilon_q \sin (l_i + \psi_q),$$

In deze formules is gesteld

[1]) *Over de massa's en baanelementen der satellieten van Jupiter en de massa van het systeem,* Deze Verslagen, Deel XVI, blz. 570 en 709.

$$\lambda_i = \lambda_{oo} + \pi_{io} + (c_i - \varkappa)\,\tau,$$
$$l_i = c_i\,\tau.$$

Het onderste teeken van τ_{iq} moet genomen worden, als òf i, òf q, doch *niet beide*, 2 zijn. De eerste term geeft voor $q = 1 \ldots 4$ de ongelijkheden van groep II, en voor $q = 5$ de libratie. De tweede term stelt voor $q = 1 \ldots 4$ de middelpuntsvergelijkingen voor. Men heeft

q	1	2	3	4
τ_{1q}	+ 0.96453	— 0.03905	+ 0.02481	+ 0.00229
τ_{2q}	+ .03186	+ .95599	+ .16287	+ .01492
τ_{3q}	— .00661	— .03662	+ .99461	+ .08847
τ_{4q}	+ .00006	— .00012	— .12098	+ 1.00000

Voor $q = 5$ is het beter deze term te schrijven in den vorm

$$-\tfrac{1}{2}\,(c_{i5} + c'_{i5})\,\varepsilon_5\,\cos\,(l_i - \psi_5)$$
$$+\;(c_{i5} + c'_{i5})\,\varepsilon_5\,\sin\,(l_i - \psi_5)$$

Zij stelt dan, evenals de derde term, kleine periodieke ongelijkheden voor, met perioden die weinig van die der middelpuntsvergelijkingen verschillen.

Het is van belang op te merken dat de hier voorgedragen theorie (intermediaire baan en variaties) even ver gaat als die van Souillart, behoudens de kleine periodieke storingen en de termen van zeer lange periode ontstaande door de inwerking van de zon, Saturnus etc. Souillart heeft geen enkelen term der storingsfunctie, en geen enkele onderlinge werking van twee termen, aanleiding gevend tot een term van hoogere orde, meegenomen, die hier niet ook is berekend; daarentegen vele weggelaten, die hier wel voorkomen. De hier gegeven theorie is zeker volledig tot op een van te voren aangegeven *numerieke* grens-grootte-orde, wat men van die van Souillart, hoewel zij gewoonlijk veel meer decimalen geeft, zeker niet kan zeggen. De nieuwe theorie heeft zich zeer geschikt getoond voor numerieke berekening.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. A. SCHOUTEN en D. J. STRUIK: „*Over n-voudig orthogonale stelsels van n*—1-*dimensionale uitgebreidheden in een algemeene uitgebreidheid van n afmetingen*".

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ).

I.

1. *Notaties*[1]. Een uitgebreidheid van p afmetingen worde geschreven V_p, een euklidische ruimte[2]) van p afmetingen, evenals een door p onafhankelijke richtingen in één punt bepaald gebied R_p. Als grondvariabelen in een V_n gebruiken wij de stelsels x^λ en y^j, $\lambda = a_1, \ldots, a_n$, $j = 1, \ldots, n$, met de bijbehoorende ko- en kontravariante maatvektoren:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}_\lambda = \nabla x^\lambda;\ \mathbf{e}_\lambda' \\ \mathbf{s}_j = \nabla y^j;\ \mathbf{s}_j' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarvoor geldt:

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_\lambda' \cdot \mathbf{e}_\lambda' = \varepsilon_\lambda^2 \quad ; \quad \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_\lambda = \varepsilon_\lambda^{-2} \\ \mathbf{s}_j' \cdot \mathbf{s}_j' = \sigma_j^2 \quad ; \quad \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_j = \sigma_j^{-2} \\ \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{e}_\mu' = \begin{cases} 0 & \text{voor } \lambda \neq \mu \\ \varkappa = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} & \text{voor } \lambda = \mu \end{cases} \\ \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_k' = \begin{cases} 0 & \text{voor } j \neq k \\ \varkappa & \text{voor } j = k. \end{cases} \end{array} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De fundamentaaltensor van deze V_n worde geschreven ${}'\mathbf{g}$:

$${}'\mathbf{g} = \sum_{\lambda,\mu}^{a_1,\ldots,a_n} g_{\lambda\mu}\, \mathbf{e}_\lambda\, \mathbf{e}_\mu = \sum_{\lambda,\mu}^{a_1,\ldots,a_n} g^{\lambda\mu}\, \mathbf{e}_\lambda'\, \mathbf{e}_\mu' = \sum_{j,k}^{1,\ldots,n} g_{jk}\, \mathbf{s}_j\, \mathbf{s}_k = \sum_{j,k}^{1,\ldots,n} g^{jk}\, \mathbf{s}_j'\, \mathbf{s}_k'. \quad (3)$$

De ligging der aequiskalaire V_{n-1}, behoorende bij x^λ en y^j worde naar omstandigheden verschillend gekozen.

2. *Normale en V-vormende velden.* In een uitgebreidheid V_n zij

[1]) Men zie voor de in deze mededeeling gebruikte notaties verder: J. A. SCHOUTEN, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. der Kon. Akad. v. Wetenschappen XII, 6 (1918), hier verder geciteerd als A. R.

[2]) Onder een euklidische ruimte verstaan we een uitgebreidheid, waarvan de Riemann-Christoffelsche affinor $\overset{4}{\mathbf{K}}$ nul wordt.

een R_p-veld gegeven door het p-vektorveld der eenvoudige p-vektoren [1]) ${}_p\mathbf{v}$. Eenig stelsel van op ${}_p\mathbf{v}$ volkomen loodrechte eenvoudige $(n-p)$-vektoren ${}_{n-p}\mathbf{w}$ bepaalt dan een R_{n-p}-veld. Is het veld ${}_{n-p}\mathbf{w}$ overal volkomen loodrecht op een stelsel van ∞^{n-q} uitgebreidheden V_q, $q \leqq p$, dan ligt de R_q-richting van V_q in elk punt in het gebied van ${}_p\mathbf{v}$. In het geval, dat ${}_{n-p}\mathbf{w}$ niet ook nog loodrecht is op een stelsel van ∞^{n-q-1} uitgebreidheden V_{q+1}, noemen wij ${}_{n-p}\mathbf{w}$ dan *V_q-normaal* en ${}_p\mathbf{v}$ *V_q-vormend.*

Is ${}_p\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \frown \ldots \mathbf{v}_p$, dan is ${}_p\mathbf{v}$ V_q-vormend, indien de p vergelijkingen:

$$\mathrm{v}_i \quad \nabla f = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, p, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$n-q$ onafhankelijke oplossingen toelaten. Deze voorwaarde is ook voldoende, aangezien de V_q altijd gegeven kunnen worden als doorsneden van $n-q$ stelsels $V_{n-1}: f_1 = c_1, \ldots, f_{n-q} = c_{n-q}$, waarin $c_1, \ldots, c_{n-q}$ veranderlijke parameters zijn. Daar in een R_n een $R_{n-p+\alpha}$ alleen voor $\alpha = 0$ volkomen loodrecht kan staan op een R_p, is noodzakelijk $q \leqq p$. Iedere oplossing f_k voldoet ook aan de vergelijking:

$$(\mathrm{v}_j \cdot \nabla)(\mathrm{v}_i \cdot \nabla) f_k = (\mathrm{v}_j \overset{1}{\cdot} \nabla \mathrm{v}_i) \cdot \nabla f_k + \mathrm{v}_i \mathrm{v}_j \overset{2}{\cdot} \nabla \nabla f_k = 0, \quad i, j = 1, \ldots, p, \quad (5)$$

en derhalve ook aan:

$$(\mathrm{v}_j \overset{1}{\cdot} \nabla \mathrm{v}_i - \mathrm{v}_i \overset{1}{\cdot} \nabla \mathrm{v}_j) \cdot \nabla f_k = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Wij beschouwen eerst het geval $q = p$. (In dit geval is het stelsel differentiaalvergelijkingen (4) een *volledig systeem.*) Schrijven wij:

$${}_{n-p}\mathrm{w} = \mathrm{w}_1 \frown \ldots \mathrm{w}_{n-p},$$

dan leert (6), dat alle vektoren $\mathbf{v}_j \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{v}_j$ in het gebied van ${}_p\mathbf{v}$ liggen, wat ook aldus kan worden geschreven:

$$(\mathrm{v}_j \overset{1}{\cdot} \nabla \mathrm{v}_i - \mathrm{v}_i \overset{1}{\cdot} \nabla \mathrm{v}_j) \cdot \mathrm{w}_k = 0 \quad \begin{matrix} i, j = 1, \ldots, p \\ k = 1, \ldots, n-p \end{matrix} \quad \ldots \quad (7)$$

Ware aan (7) voor enkele waarden van i en j niet voldaan, dan zouden er zeker minder dan $n-p$ onafhankelijke oplossingen zijn, daar men de vergelijkingen (6) voor die waarden van i en j aan (4) zou kunnen toevoegen. Aldus zou men een stelsel van r vergelijkingen verkrijgen $n \geqq r > p$, waaraan alle oplossingen van (4) moeten voldoen. Dit stelsel heeft dan echter zeker meer dan $n-r$ onafhankelijke oplossingen. De voorwaarde (7) is dus noodzakelijk en voldoende.

---

[1]) Een eenvoudige p-vektor kan worden geschreven als alterneerend produkt van p reale vektoren en kan worden voorgesteld door een deel van een bepaalde R_p, met een bepaalden inhoud, doch van onbepaalden vorm, gecombineerd met een hyperschroefzin.

Daar:

$$2\,\nabla \overset{1}{.} (v_i \frown v_j) = (\nabla \cdot v_i) v_j - (\nabla \cdot v_j) v_i + (v_i \cdot \nabla) v_j - (v_j \cdot \nabla) v_i, \qquad (8)$$

is (7) aequivalent met:

$$w_k \cdot \{\nabla \overset{1}{.} (v_i \frown v_j)\} = w_k \nabla \overset{2}{.} (v_i \frown v_j) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

of ook met:

$$_{n-p}w\ \nabla \overset{2}{.}\ v_i \frown v_j = 0,\ ^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

en dus met:

$$\boxed{_{n-p}w\ \nabla \overset{2}{.}\ _p v = 0.\ ^{2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

In deze vergelijking komen de hulpvektoren **v** en **w** niet meer voor. *Zij is de gezochte voorwaarde, dat het* $_p$**v**-*veld* V_p-*vormend wordt.*

Daar:

$$w_k \cdot \{\nabla \overset{1}{.} (v_i \frown v_j)\} = w_k \cdot (a \cdot \nabla) \{a \overset{1}{.} (v_i \frown v_j)\}\ ^{3)} =$$

$$= (a \cdot \nabla)\{w_k\, a \overset{2}{.} (v_i \frown v_j)\}^{4)} - (a \cdot \nabla)\, w_k \overset{1}{.} \{a \overset{1}{.} (v_i \frown v_j)\} = \quad . \quad (11)$$

$$= (v_i \frown v_j) \overset{2}{.} \nabla\, w_k,$$

is (*A*) aequivalent met:

$$(v_i \frown v_j) \overset{2}{.}\ \nabla \frown w_k = 0\ ^{1)}, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

en daar:

$$\nabla \frown {}_{n-p}w = \sum_k^{1,\dots,n-p} a\, w_1 \ldots w_{k-1}\, (a \cdot \nabla)\, w_k\, w_{k+1} \ldots w_{n-p}, \quad . \quad . \quad (13)$$

ook met:

$$\boxed{_p v \overset{2}{.}\ \nabla \frown {}_{n-p}w = 0\ ^{2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

(*B*) kan ook uit (*A*) worden afgeleid zonder weer tot de hulpvektoren $\mathbf{v}_i$ en $\mathbf{w}_k$ terug te keeren. Ook onafhankelijk van (*A*) kan de noodzakelijkheid van (*B*) worden aangetoond. Is namelijk $_{n-p}\mathbf{w}$ V_p-normaal, dan is altijd:

$$_{n-p}w = \lambda\,\{(\nabla f_1) \frown \ldots \frown (\nabla f_{n-p})\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

waarin λ een funktie van de plaats is. Bijgevolg is:

$$\nabla \frown \underset{n-p}{w} = (\nabla \lambda)\, (\nabla f_1) \frown \ldots \frown (\nabla f_{n-p}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waaruit (*B*) onmiddellijk volgt, omdat iedere $\mathbf{v} \perp \nabla f_j$.

---

[1]) De vormen (10) en (12) der voorwaarde zijn identiek met die, voorkomende bij E. von Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem (Teubner, 1900) bldz. 99 en 100.

[2]) (*A*) en (*B*) werden reeds zonder bewijs aangegeven in J. A. Schouten, Over het aantal graden van vrijheid van het geodetisch meebewegende assenstelsel. Versl. der Kon. Ak. v. Wet. 27 (18) 16—22.

[3]) De differentieerende werking van een differentiaaloperatorkern strekt zich uit tot het eerstvolgende *sluitende* haakje.

[4]) Deze term is nul, omdat $w_k \perp v_i$ en $\perp v_j$.

Voor $p = n-1$ leert (B), of duidelijker nog (15), dat $\nabla \frown \mathbf{w}$ een enkelvoudige bivektor is. Hieruit volgt, dat, wanneer een veld $\mathbf{w}$ R_{n-1}-normaal is en $\mathbf{w}$ opgevat wordt als de snelheidsvektor van een stroomende vloeistof, waarbij dan de rotatiekomponente der beweging (ten opzichte van een geodetisch meebewegend assenstelsel) gegeven is door $\nabla \frown \mathbf{w}$, bij deze rotatie de $R_{n-2} \perp \nabla \frown \mathbf{w}$ punt voor punt onveranderd blijft [1]. Immers $d\mathbf{r} \overset{1}{.} (\nabla \frown \mathbf{v})$ is een vektor in het vlak van $\nabla \frown \mathbf{v}$.

Op dezelfde wijze bewijst men, dat, indien ${}_p\mathbf{v}$ V_q-vormend en dus ${}_{n-p}\mathbf{w}$ V_q-normaal is, de vergelijkingen gelden:

$$\boxed{{}_{n-q}\mathbf{w}\; \nabla \overset{2}{.}\; {}_p\mathbf{v} = 0}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A')$$

$$\boxed{{}_q\mathbf{v} \overset{2}{.}\; \nabla \frown {}_{n-q}\mathbf{w} = 0}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B')$$

waarin ${}_q\mathbf{v}$ een q-vektor in V_q en ${}_{n-q}\mathbf{w}$ een $n-q$-vektor $\perp V_q$ voorstelt. Voor $p = n-1$ leert (B'), dat voor een V_q-normaal vektorveld $\mathbf{w}$ de componente van $\nabla \mathbf{w}$ in V_q een tensor is.

3. *Kanonische congruenties.* Een veld van eenheidsvektoren $\mathbf{i}_n$ bepaalt een congruentie [2]), $\mathbf{u}_n = \varkappa \mathbf{i}_n \overset{1}{.} \nabla\, \mathbf{i}_n$ is de kromtevektor der krommen van die congruentie en de modulus $(\mathbf{u}_n)_m$ is de geodetische kromming.

Daar:

$$(\nabla\, \mathbf{i}_n) \overset{1}{.}\, \mathbf{i}_n = \tfrac{1}{2} \nabla\, (\mathbf{i}_n \,.\, \mathbf{i}_n) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

bevat de tweede ideale faktor van $\nabla\, \mathbf{i}_n$ geen index n. $\nabla\, \mathbf{i}_n$ bestaat dus uit twee deelen, een deel $\overset{2}{\mathbf{h}}$ in de $R_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$, en het deel $\mathbf{i}_n\, \mathbf{i}_n \overset{1}{.} \nabla\, \mathbf{i}_n = \mathbf{i}_n\, \mathbf{u}_n$:

$$\nabla\, \mathbf{i}_n = \overset{2}{\mathbf{h}} + \varkappa \mathbf{i}_n\, \mathbf{u}_n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$\overset{2}{\mathbf{h}}$ is in het algemeen de som van een tensor ${}^2\mathbf{h}$ en een bivektor ${}_2\mathbf{h}$. Is $\mathbf{i}$ een eenheidsvektor in een der $n-1$ onderling loodrechte hoofdrichtingen van ${}^2\mathbf{h}$, dan is:

$$\varkappa\, {}^2\mathbf{h} \overset{1}{.}\, \mathbf{i} = \lambda\, \mathbf{i}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

en daar:

$$\nabla \smile \mathbf{i}_n = {}^2\mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\varkappa\, (\mathbf{i}_n\, \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_n\, \mathbf{i}_n), \quad \ldots \quad (19)$$

is:

$$\varkappa (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{.}\, \mathbf{i} = \lambda\, \mathbf{i} + \mu\, \mathbf{i}_n, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

[1]) Voor de R_n is dit opgemerkt door A. SOMMERFELD. Geometrischer Beweis des DUPIN'schen Theorems und seiner Umkehrung, Jahresberichte der Deutsch. Math. Ver. 6 (99) 123—128, bldz. 128.

[2]) In A. R. bldz. 38 e.v. is het woord hypercongruentie gebruikt. Wij spreken hier eenvoudigheidshalve van congruentie, in overeenstemming o.a. met RICCI en LEVI-CIVITA.

of:

$$(\nabla \smile \mathbf{i}_n - \lambda\, {}^2\mathbf{g}) \overset{1}{\cdot} \mathbf{i} = \varkappa\mu\, \mathbf{i}_n, \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

daar:

$${}^2\mathbf{g} \overset{1}{\cdot} \mathbf{i} = \mathbf{i}. \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Uit (21) volgt:

$$\mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathbf{i}_n - \lambda\, {}^2\mathbf{g})^{-1} \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n = 0, \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

of, indien $X_{\lambda\mu}$ de kovariante coordinaten van $\nabla \smile \mathbf{i}_n$ zijn en $i_{n\lambda}$ de kovariante coordinaten van $\mathbf{i}_n$, in coördinaten:

$$\begin{vmatrix} 0 & i_{n a_1} & \ldots\ldots & i_{n a_n} \\ i_{n a_1} & X_{a_1 a_1} - \lambda g_{a_1 a_1} & \ldots & X_{a_1 a_n} - \lambda g_{a_1 a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n a_n} & X_{a_n a_1} - \lambda g_{a_n a_1} & \ldots & X_{a_n a_n} - \lambda g_{a_n a_n} \end{vmatrix} = 0\,. \quad (24)$$

Deze vergelijking van den graad n—1 in λ noemt RICCI de *algebraïsche karakteristieke vergelijking* der congruentie $\mathbf{i}_n$. [1]) Daar de tensor ${}^2\mathbf{h}$, zooals bekend is, n—1 reëele hoofdrichtingen heeft, heeft zij n—1 reëele wortels. [2]) Zijn alle wortels verschillend (d.w.z. zijn niet twee wortels in *alle* punten van V_n gelijk, hetgeen niet uitsluit, dat zij in bepaalde uitgebreidheden van minder dan n afmetingen gelijk kunnen worden), dan behoort volgens (21) bij een bepaalde wortel λ_j de richting:

$$\mathbf{i}_j = \mu_j (\nabla \smile \mathbf{i}_n - \lambda_j\, {}^2\mathbf{g})^{-1} \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n\,. \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Twee bij verschillende wortels behoorende richtingen zijn onderling loodrecht, omdat volgens (20):

$$\lambda_j\, \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_j = \lambda_k\, \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_j = 0, \quad j \neq k \quad \ldots \quad (26)$$

Een p-voudige wortel bepaalt een gebied R_p, volkomen loodrecht op de gebieden der andere wortels, in welk gebied p willekeurige onderling loodrechte richtingen als hoofdrichtingen gekozen kunnen worden.

In elk geval kan men dus bij de gegeven richting $\mathbf{i}_n$ *in ieder punt* n—1 *onderling loodrechte hoofdrichtingen aanwijzen, waardoor aan de congruentie* $\mathbf{i}_n$ n—1 *onderling loodrechte congruenties* $\mathbf{i}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$—1 *worden toegevoegd.* RICCI noemt deze de tot $\mathbf{i}_n$ behoorende *orthogonale kanonische congruenties.* [3])

[1]) G. RICCI. Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque, Memorie R. Acc. Lincei Ser. V 2 (95) 276—322, bldz. 301.

[2]) Voor een rechtstreeksch bewijs zie b.v. G. RICCI, Sui sistemi di integrali independenti di una equatione lineare ed omogenea a derivate partiali di 1^0 ordine, Ann. di Mat. Ser. II 15 ($^{87}/_{88}$) 127—159, bldz. 134.

[3]) RICCI. Dei sistemi, bldz. 302. Wij spreken hier kortheidshalve van kanonische congruenties.

Voor de skalairen λ en μ volgt uit (20):

$$\lambda_j = \mathrm{i}_j \mathrm{i}_j \overset{2}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_n, \qquad (27)$$

$$\mu_j = \mathrm{i}_j \mathrm{i}_n \overset{2}{.}\ \nabla \smile \mathrm{i}_n = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{i}_j \,.\, \mathrm{u}_n, \qquad (28)$$

en uit (18) volgt voor $'\mathbf{h}$:

$$'\mathbf{h} = \sum_{j}^{1,\ldots,n-1} \lambda_j\, \mathrm{i}_j \mathrm{i}_j, \qquad (29)$$

en

$$\mathrm{i}_j \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\ '\mathbf{h} = 0, \qquad (30)$$

of:

$$\mathrm{i}_j \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\ \nabla \smile \mathrm{i}_n = 0, \quad j \neq k. \qquad (31)$$

In het bijzondere geval, dat i_n V_{n-1}-normaal is, leert (B):

$$\mathrm{i}_j \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\ \nabla \frown \mathrm{i}_n = 0, \quad j \neq k, \qquad (32)$$

waaruit volgt, dat ${}_2\mathbf{h} = 0$. In plaats van (17) treedt dan de vergelijking:

$$\nabla\, \mathrm{i}_n = {}'\mathbf{h} + \varkappa\, \mathrm{i}_n \mathrm{u}_n. \qquad (33)$$

Aan de kanonische richtingen kan met behulp van het begrip geodetische verandering, d.i. verandering ten opzichte van een geodetisch meebewegend assenstelsel, een eenvoudige meetkundige beteekenis toegekend worden. Tengevolge van (17) en (30) is:

$$\mathrm{i}_j \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_n = -\, \mathrm{i}_k \mathrm{i}_j \overset{2}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_n, \quad j \neq k. \qquad (34)$$

Nu is $\varkappa \mathrm{i}_k \overset{1}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_n$ de geodetische toename van i_n bij een verplaatsing in het veld langs i_k per lengteeeenheid, en $\mathrm{i}_j \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_n$ is dus de projektie van deze specifieke toename op de j-richting, d. i. de specifieke geodetische verdraaiing in de $n \to j$ richting. Is dus ${}_2\mathbf{B}_k$ de bivektor der specifieke geodetische verdraaiing van het assenstelsel $\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_n$ bij een verplaatsing in de k-richting:

$$\mathrm{i}_k \overset{1}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_\alpha = {}_2\mathbf{B}_k \overset{1}{.}\ \mathrm{i}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \qquad (35)$$

dan is $\mathrm{i}_j \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_n$ de nj-komponente van ${}_2\mathbf{B}_k$:

$$\mathrm{i}_n \mathrm{i}_j \overset{2}{.}\ {}_2\mathbf{B}_k = \mathrm{i}_j \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_n, \quad j \neq k. \qquad (36)$$

De nj-komponenten van de draaiing ${}_2\mathbf{B}_k$ is dus gelijk aan de nk-komponente van de draaiing ${}_2\mathbf{B}_j$. [1])

Is i_n V_{n-1}-normaal, dan wordt tengevolge van (31) en (32):

$$\mathrm{i}_j \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\ \nabla\, \mathrm{i}_n = 0, \quad j \neq k \qquad (37)$$

De nj-komponente van ${}_2\mathbf{B}_k$ wordt dus nul voor $j \neq k$, d.w.z. de geodetische verdraaiing van i_n bij een verplaatsing in de k-richting

[1]) Ricci, Dei sistemi, bldz. 303 geeft een andere geometrische interpretatie, waarbij geen gebruik gemaakt wordt van het begrip geodetische verplaatsing. Daarbij is het dan echter noodig, de V_n te leggen in een euklidische ruimte van meer dan n afmetingen.

heeft plaats in het nk-vlak. Definiëert men de hoofdkromterichtingen in een punt van de V_{n-1} als de richtingen $\mathbf{i}_k$, volgens welke de geodetische verdraaiing van $\mathbf{i}_n$ plaats vindt in het nk-vlak [1]), dan volgt hieruit, *dat de kanonische congruenties de hoofdkromtelijnen der* $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$ zijn.

Uit (29) en (33) volgt nog:

$$\varkappa \mathbf{i}_j \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_n = \lambda_j \mathbf{i}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \ldots \quad (38)$$

welke vergelijking met (37) aequivalent is en evenzeer als definitievergelijking der hoofdkromterichtingen van de $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$ kan worden opgevat.

4. *De tweede fundamentaaltensor der* $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$. Ten einde de beteekenis van ${}^2\mathbf{h}$ nog nader in het licht te stellen kiezen wij de $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$ als aequiskalaire gebieden van de grondvariabele x^{a_n} en $n-1$ willekeurige stelsels van V_{n-1} door $\mathbf{i}_n$ als aequiskalaire gebieden der grondvariabelen $\varkappa^\lambda$, $\lambda = a_1, \ldots a_{n-1}$. Dan liggen de richtingen van $\mathbf{e}_\lambda$ en $\mathbf{e}'_\lambda$ in de $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$, terwijl $\mathbf{e}_{a_n}$ en $\mathbf{e}'_{a_n}$ de richting van $\mathbf{i}_n$ hebben:

$$\mathbf{i}_n = \varepsilon_n \mathbf{e}_{a_n} = \varepsilon_n \nabla x^{a_n} = \frac{1}{\varepsilon_n} \mathbf{e}'_{a_n} \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

Het kontravariante $\lambda\mu$-kental van ${}^2\mathbf{h}$ is dan:

$${}^2h^{\lambda\mu} = \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu \overset{2}{\cdot} {}^2\mathbf{h} = \tfrac{1}{2} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_n + \tfrac{1}{2} \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\lambda \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_n, \quad \ldots \quad (40)$$

of, omdat $\mathbf{i}_n \perp \mathbf{e}_\lambda$ en $\perp \mathbf{e}_\mu$, en:

$$\nabla \frown \mathbf{e}_\nu = \nabla \frown \nabla x^\nu = 0, \quad \nu = a_1, \ldots, a_{n-1}, \quad \ldots \quad (41)$$

ook:

$$\left.\begin{aligned} {}^2h^{\lambda\mu} &= -\tfrac{1}{2} \mathbf{i}_n \mathbf{e}_\mu \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{e}_\lambda - \tfrac{1}{2} \mathbf{i}_n \mathbf{e}_\lambda \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{e}_\mu = \\ &= -\tfrac{1}{2} \mathbf{e}_\mu \mathbf{i}_n \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{e}_\lambda - \tfrac{1}{2} \mathbf{i}_\lambda \mathbf{e}_n \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{e}_i = \\ &= -\frac{1}{2\varepsilon_n} (\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}'_{a_n} \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}'_{a_n} \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{e}_\mu) = \\ &= -\frac{1}{2\varepsilon_n} \left(\frac{\partial a^\lambda}{\partial x^{a_n}} a^\mu + \frac{\partial a^\mu}{\partial x^{a_n}} a^\lambda \right) = \\ &= -\frac{\varkappa}{2\varepsilon_n} (\mathbf{e}'_{a_n} \cdot \nabla) g^{\lambda\mu} = -\tfrac{1}{2} \varkappa (\mathbf{i}_n \cdot \nabla) g^{\lambda\mu} . \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (42)$$

Evenzoo is het kovariante kental van ${}^2\mathbf{h}$:

---

[1]) Deze definitie is de natuurlijke uitbreiding van de definitie der kromtelijnen op een V_2 in een R_3 als de lijnen, waarlangs de normalen een ontwikkelbaar oppervlak vormen.

$$\left.\begin{aligned} {}'h^{\lambda\mu} &= \mathbf{e}_\lambda' \mathbf{e}_\mu' \overset{2}{\cdot}\, {}'\mathbf{h} = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{e}_\lambda' \mathbf{e}_\mu' \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_n + \tfrac{1}{2}\, \mathbf{e}_\mu' \mathbf{e}_\lambda' \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_n = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_n} \mathbf{e}_\lambda' \mathbf{e}_\mu' \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{e}_{a_n} + \frac{1}{2\varepsilon_n} \mathbf{e}_\mu' \mathbf{e}_\lambda' \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{e}_{a_n} = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_n}\left(\frac{\partial a_{a_n}}{\partial x^\mu} a_\lambda + \frac{\partial a_{a_n}}{\partial x^\lambda} a_\mu\right) = \frac{1}{2\varepsilon_n}\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial x^{a_n}} a_\lambda + \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^{a_n}} a_\mu\right) \\ &= \frac{\varkappa}{2\varepsilon_n}(\mathbf{e}'_{a_n} \cdot \nabla) g_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\varkappa(\mathbf{i}_n \cdot \nabla)\, g_{\lambda\mu}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (43)$$

$'\mathbf{h}$ *is dus de tweede fundamentaaltensor der* $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$ [1]).

Is $\mathbf{i}_n$ geodetisch, zonder V_{n-1}-normaal te zijn, dan is $\mathbf{u}_n = 0$ en $\nabla \mathbf{i}_n$ ligt geheel in het gebied $\perp \mathbf{i}_n$:

$$\nabla \mathbf{i}_n = \overset{2}{\mathbf{h}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (44)$$

Daar $\mathbf{i}_n$ bovendien normaal is, wordt $\nabla \mathbf{i}_n$ symmetrisch:

$$\nabla \mathbf{i}_n = {}'\mathbf{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

Kiest men in dit laatste geval voor x^{a_n} de lengte, gemeten van uit een bepaalde $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$ langs de krommen der congruentie $\mathbf{i}_n$, dan wordt:

$$\mathbf{e}_{a_n} = \mathbf{e}_{a_n}' = \mathbf{i}_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

5. *Onderling orthogonale* V_{n-1}*-stelsels door een gegeven congruentie bij eenduidig bepaalde kanonische congruenties.*

Zij gevraagd bij een gegeven $\mathbf{i}_n$ de grondvariabelen $y^1, \ldots y^{n-1}$ aldus te kiezen, dat de bijbehoorende aequiskalaire V_{n-1} door $\mathbf{i}_n$ gaan en de vektoren $\mathbf{s}_j = \nabla y^j$, $j = 1, \ldots, n-1$, onderling loodrecht zijn.

Het stelsel vergelijking:

$$\mathbf{i}_n \cdot \nabla y^j = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

$$\mathbf{s}_k \cdot \nabla y^j = 0, \quad k \neq j \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (48)$$

moet dus voor iedere waarde van j $n-2$ onafhankelijke oplossingen toelaten. De noodzakelijke en voldoende voorwaarde hiervoor is volgens (7):

$$\mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_n = \alpha_k \mathbf{s}_k + \alpha_n \mathbf{i}_n, \quad . \; . \; . \; . \; (49)$$

waarin α_k en α_n willekeurige coëfficienten zijn. Daar $\mathbf{i}_n \perp \mathbf{s}_k$, en dientengevolge:

$$\mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{s}_k = (\nabla \mathbf{s}_k) \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n = \nabla(\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{i}_n) - (\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{s}_k = -(\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{s}_k, \quad . \; (50)$$

is (49) aequivalent met:

---

[1]) Vergelijk BIANCHI-LUKAT, Vorlesungen über Differentialgeometrie (1899) bldz. 601, form. (7). Men kan de hoofdkromterichtingen ook definieeren als de hoofdrichtingen van den tweeden fundamentaaltensor. Dit doet BIANCHI bldz. 609, 618.

$$2\,(\nabla \smile \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{s}_k = -\,\alpha_k\, \mathrm{s}_k - \alpha_n\, \mathrm{i}_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Deze vergelijking is echter van den vorm (20) en elk der gezochte vektoren $\mathbf{s}_k$ vormt dus een der tot $\mathbf{i}_n$ behoorende kanonische congruenties. Wij beschouwen nu eerst het geval, dat de n—1 wortels van (24) alle verschillend zijn. In dat geval moet iedere vektor $\mathbf{s}_k$ met een bepaalde $\mathbf{i}$ gelijk gericht zijn:

$$\mathrm{i}_k = \sigma_k\, \mathrm{s}_k = \frac{1}{\sigma_k}\, \mathrm{s}_k' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

De n—1 bij $\mathbf{i}_n$ behoorende kanonische congruenties moeten dus alle V_{n-1}-normaal zijn. Opdat dit het geval zij, moet $\mathbf{i}_n$ aan zekere voorwaarden voldoen, die als volgt zijn af te leiden.

Toepassing van ∇ op (31) leert:

$$(\nabla\, \mathrm{i}_j) \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{i}_k + (\nabla\, \mathrm{i}_k) \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{i}_j + \{\nabla(\nabla \smile \mathrm{i}_n)\} \overset{2}{\cdot}\, \mathrm{i}_j \mathrm{i}_k = 0, j \neq k, (53)$$

en overschuiving met $\mathbf{i}_n$:

$$\mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} (\nabla \mathrm{i}_j) \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{i}_k + \mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} (\nabla\, \mathrm{i}_k) \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{i}_j + \mathrm{i}_j\, \mathrm{i}_k\, \mathrm{i}_n \overset{3}{\cdot}\, \nabla(\nabla \mathrm{i}_n) = 0. (54)$$

Volgens (46) en (51) bevat $(\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot}\, \mathbf{i}_k$ alleen $\mathbf{i}_k$ en $\mathbf{i}_n$. Verder is $\mathbf{i}_j$ V_{n-1}-normaal, zoodat volgens (B):

$$\mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} (\nabla\, \mathrm{i}_j) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{i}_k = \mathrm{i}_k \overset{1}{\cdot} (\nabla\, \mathrm{i}_j) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{i}_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

(54) is dus aequivalent met:

$$-\mathrm{i}_k \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot} (\nabla \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{i}_j - \mathrm{i}_j \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot} (\nabla \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot}\, \mathrm{i}_k + \mathrm{i}_j\, \mathrm{i}_k\, \mathrm{i}_n \overset{3}{\cdot}\, \nabla(\nabla \smile \mathrm{i}_n) = 0. \quad (56)$$

Is nu:

$$'\mathrm{g}_n = \mathrm{a}_n\, \mathrm{a}_n = \mathrm{b}_n\, \mathrm{b}_n = \varkappa \sum_j^{1,\ldots,n-1} \mathrm{i}_j\, \mathrm{i}_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

dan is:

$$\overset{4}{\mathrm{g}}_n = \mathrm{a}_n\, \mathrm{b}_n\, \mathrm{b}_n\, \mathrm{a}_n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

een grootheid, die tweemaal overschoven met een willekeurigen affinor van den tweeden graad de komponente van dezen affinor in de R_{n-1} $\perp \mathbf{i}_n$ geeft. Bij invoering van den tensor:

$$'\mathrm{p} = \overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{\cdot} \{(\mathrm{i}_n \cdot \nabla)(\nabla \smile \mathrm{i}_n) - 2\, T(\nabla \smile \mathrm{i}_n) \overset{1}{\cdot} (\nabla\, \mathrm{i}_n)\}, \quad . \quad . \quad (59)$$

gaat dan (56) over in

$$\boxed{\mathrm{i}_j\, \mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot}\, '\mathrm{p} = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n-1} \quad . \quad . \quad (C')$$

De eerste voorwaarde is dus, dat de tensor **'p** *dezelfde hoofdrichtingen heeft als* **'h**.

Daar tengevolge van (19):

$$\overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{\cdot} (\mathrm{i}_n \cdot \nabla)(\nabla \smile \mathrm{i}_n) = \overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{\cdot} (\mathrm{i}_n \cdot \nabla)\, '\mathrm{h} + \mathrm{u}_n\, \mathrm{u}_n, \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

en tengevolge van (19) en (33):

$$\overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{\cdot} 2\,T\,(\nabla \smile \mathrm{i}_n)\overset{1}{\cdot}(\nabla\,\mathrm{i}_n) = 2\,{}^2\mathrm{h} \overset{1}{\cdot} {}^2\mathrm{h} + \mathrm{u}_n\,\mathrm{u}_n + \overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{\cdot} 2\,T\,{}^2\mathrm{h} \overset{1}{\cdot} {}_2\mathrm{h}, \quad (61)$$

is:

$$'\mathrm{p} = \overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{\cdot} (\mathrm{i}_n \cdot \nabla)\,{}^2\mathrm{h} - 2\,T\,{}^2\mathrm{h} \overset{1}{\cdot} {}_2\mathrm{h} - 2\,{}^2\mathrm{h} \overset{1}{\cdot} {}^2\mathrm{h}. \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Daar ${}^2\mathrm{h} \overset{1}{\cdot} {}^2\mathrm{h}$ dezelfde hoofdrichtingen heeft als ${}^2\mathrm{h}$, *kan men als eerste voorwaarde dus ook stellen, dat:*

$$\overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{\cdot} \{(\mathrm{i}_n \cdot \nabla)\,{}^2\mathrm{h} - 2\,T\,{}^2\mathrm{h} \overset{1}{\cdot} {}_2\mathrm{h}\}$$

dezelfde hoofdrichtingen heeft als ${}^2\mathrm{h}$:

$$\boxed{\mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot} \{(\mathrm{i}_n \cdot \nabla)\,{}^2\mathrm{h} - 2\,T\,{}^2\mathrm{h} \overset{1}{\cdot} {}_2\mathrm{h}\} = 0,\ j \neq k,\ j, k = 1, 2, .., n-1\,.} \quad (C)$$

(C) kan men ook direkt vinden door uit te gaan van (30), en dan dezelfde redeneering te volgen als bij de afleiding van (C').

Om een tweede voorwaarde te verkrijgen, passen we ∇ toe op (30), en overschuiven daarna met i_l. Dit levert:

$$\{(\mathrm{i}_l \cdot \nabla)\,\mathrm{i}_j\}\,\mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot} {}^2\mathrm{h} + \{(\mathrm{i}_l \cdot \nabla)\,\mathrm{i}_k\}\,\mathrm{i}_j \overset{2}{\cdot} {}^2\mathrm{h} + \mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot} (\mathrm{i}_l \cdot \nabla)\,{}^2\mathrm{h} = 0 \quad . \quad (63)$$

of, in verband met (29):

$$\lambda_k\,\mathrm{i}_k\,\mathrm{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_j + \lambda_j\,\mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_k + \varkappa\,\mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot} (\mathrm{i}_l \cdot \nabla)\,{}^2\mathrm{h} = 0 \quad . \quad . \quad (64)$$

of:

$$(\lambda_k - \lambda_j)\,\mathrm{i}_k\,\mathrm{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_j + \varkappa\,\mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot} (\mathrm{i}_l \cdot \nabla)\,{}^2\mathrm{h} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Nu zijn i_j, i_k, i_l alle V_{n-1}-normaal en onderling loodrecht, zoodat:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{i}_k\,\mathrm{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_j = \mathrm{i}_l\,\mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_j = -\,\mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_l = -\,\mathrm{i}_k\,\mathrm{i}_j \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_l = \\ = \mathrm{i}_l\,\mathrm{i}_j \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_k = \mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_k = -\,\mathrm{i}_k\,\mathrm{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_j, \end{array}\right\} \quad (66)$$

of:

$$\mathrm{i}_k\,\mathrm{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\,\mathrm{i}_j = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

en dientengevolge is (65) aequivalent met:

$$\boxed{\mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_k \overset{2}{\cdot} (\mathrm{i}_l \cdot \nabla)\,{}^2\mathrm{h} = 0,\quad j \neq k, k \neq l, l \neq j,\quad j, k, l = 1, 2, .., n-1\,.} \quad (D)$$

Daar $(\nabla \mathrm{i}_j) \overset{1}{\cdot} \mathrm{i}_j$ en dus $(\mathrm{i}_l . \nabla)\,(\mathrm{i}_j . \mathrm{i}_j)$ nul is, zoodat:

$$\mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_j \overset{2}{\cdot} (\mathrm{i}_l \cdot \nabla)\,{}^2\mathrm{h} = (\mathrm{i}_l \cdot \nabla)\,(\mathrm{i}_j\,\mathrm{i}_j \overset{2}{\cdot} {}^2\mathrm{h}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

zijn ook de hoofdrichtingen van $(\mathrm{i}_l . \nabla)\,{}^2\mathrm{h}$ eenduidig bepaald.

Aangezien $\varkappa ds\, \mathrm{i}_l \overset{1}{\cdot} \nabla\,{}^2\mathrm{h}$ de geodetische differentiaal is van ${}^2\mathrm{h}$ bij een verplaatsing ds in de richting van i_l, *drukt de tweede voorwaarde* (D) *dus uit, dat bij een verplaatsing in een richting, loodrecht op* i_n *en loodrecht op* $m \leqslant n-2$ *der bij* i_n *behoorende kanonische richtingen, de komponente van de geodetische differentiaal van* ${}^2\mathrm{h}$ *in de door deze* m *richtingen bepaalde* R_m *hoofdrichtingen heeft, die met* m *der hoofdrichtingen van* ${}^2\mathrm{h}$ *samenvallen.*

De beide voorwaarden (C) en (D) zijn behalve noodzakelijk ook voldoende. Immers, uit (C) of (C'), die volkomen aequivalent zijn volgt (56), terwijl uit (30) verg. (54) volgt. Vergelijking van (54) en (56) geeft (55). Uit (D) volgt na vergelijking met de uit (30) volgende vergelijking (65) vergelijking (67). Doch (55) en (67) toonen aan, dat de congruentie $\mathbf{i}_j$ V_{n-1}-normaal is.

Wij hebben dus ten slotte het resultaat:

Opdat door de congruentie $\mathbf{i}_n$, *waarvan de bijbehoorende algebraïsche karakteristieke vergelijking slechts ongelijke wortels heeft,* $n-1$ *onderling orthogonale* V_{n-1} *gelegd kunnen worden, is het noodzakelijk en voldoende, dat* $\mathbf{i}_n$ *voldoet aan de voorwaarden* (C) *en* (D).[1]

Het aantal der vergelijkingen (C) is $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, het aantal der vergelijkingen (D) is, in verband met het feit, dat men j en k mag verwisselen, zonder dat een nieuwe vergelijking ontstaat, j en l echter niet, $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$.[2] Als differentiaalvergelijkingen in de kentallen van $\mathbf{i}_n$ zijn beide stelsels (C) en (D) van de tweede orde.

6. *Vereenvoudigingen voor het geval, dat de gegeven congruentie* V_{n-1}*-normaal is.* Is $\mathbf{i}_n$ V_{n-1}-normaal, dan wordt ${}_2\mathbf{h}=0$, ${}^2\mathbf{g}_n$ wordt de eerste en ${}^2\mathbf{h}$ de tweede fundamentaaltensor der $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$. Zijn hoofdrichtingen bepalen de kromterichtingen. (61) gaat over in:

$$\overset{4}{\mathbf{g}}_n \overset{2}{\cdot}\, 2\, T\, (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} (\nabla \mathbf{i}_n) = 2\, {}^2\mathbf{h} \overset{1}{\cdot} {}^2\mathbf{h} + \varkappa \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n, \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

en (62) in:

$${}^2\mathbf{p} = \overset{4}{\mathbf{g}}_n \overset{2}{\cdot} (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, {}^2\mathbf{h} - 2\, {}^2\mathbf{h} \overset{1}{\cdot} {}^2\mathbf{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

(C) gaat over in:

$$\boxed{\mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, {}^2\mathbf{h} = 0,} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C_1)$$

en verkrijgt daarmede dezelfde gedaante als (D).

Op analoge wijze als bij (68) blijkt:

$$\mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, {}^2\mathbf{h} = (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, (\mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} {}^2\mathbf{h}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

---

[1] (C') is het eerst door Ricci afgeleid, Dei sistemi, vergel. (A), bldz. 309. (D) komt bij hem voor in den minder eenvoudigen vorm:

$$\mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} \nabla\, (\nabla \smile \mathbf{i}_n) = \tfrac{1}{2}\, (\mathbf{i}_k \,.\, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\, \mathbf{i}_n + \tfrac{1}{2}\, (\mathbf{i}_j \,.\, \mathbf{u}_n)\, \mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla\, \mathbf{i}_n, \qquad (D')$$

als vergelijking (B), bldz. 309. (D') ontstaat, wanneer de bewerking $(\mathbf{i}_l \,.\, \nabla)$ toegepast wordt op (31). (C) en (D) zijn gevolgtrekkingen uit (30), (C') en (D') uit (31). Hier hebben wij eerst (C') afgeleid, omdat de voorwaarde in dezen vorm identiek is met de voorwaarde, die voor R_3 is gegeven door Lilienthal, en die voor het probleem zeer belangrijk is, zooals in het tweede gedeelte van deze verhandeling zal blijken.

[2] G. Ricci, Sui sistemi, bldz. 152.

zoodat ook de hoofdrichtingen van $\varkappa(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\ {}^2\mathbf{h}$ eenduidig zijn bepaald.

In verband met de reeds gevonden meetkundige interpretatie van (D) hebben wij dus het volgende theorema verkregen.

I. *Een stelsel van* ∞^1 V_{n-1} *in een* V_n, *waarvan de tweede fundamentaaltensor* ${}^2\mathbf{h}$, *behalve op bepaalde* $V_r, r < n-1$, $n-1$ *eenduidig bepaalde hoofdrichtingen heeft, behoort dan en dan alleen tot een n-voudig orthogonaalstelsel, indien bij een verplaatsing loodrecht op m der hoofdrichtingen de komponente van de geodetische differentiaal van* ${}^2\mathbf{h}$ *in de door deze m richtingen bepaalde* R_m *hoofdrichtingen heeft, die met de genoemde m hoofdrichtingen van* ${}^2\mathbf{h}$ *samenvallen.*

Dit theorema is voor een stelsel V_2 in de R_3 uitgesproken door MAURICE LEVY [1]).

Zijn de hoofdrichtingen van ${}^2\mathbf{h}$ voor een zeker punt P niet eenduidig bepaald, dan volgt uit (68), dat dan de hoofdrichtingen van $\varkappa(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\ {}^2\mathbf{h}$, en dientengevolge die van ${}^2\mathbf{h}$, voor alle punten van een kromme der congruentie $\mathbf{i}_n$ door P op dezelfde wijze onbepaald zijn. Hieruit blijkt de stelling:

II. *Bij een stelsel van* ∞^1 V_{n-1} *in een* V_n, *dat tot een n-voudig orthogonaal stelsel behoort, liggen de punten, waar alle of enkele kromtelijnen geen eenduidig bepaalde richting hebben (umbilicaalpunten in ruimeren zin) op meetkundige plaatsen, die gevormd worden door krommen der congruentie, loodrecht op de* V_{n-1}.

Ook deze stelling is voor een stelsel V_2 in de R_3 door M. LÉVY het eerst uitgesproken. [2])

Daar de kentallen van $\mathbf{i}_n$ uitgedrukt kunnen worden in de eerste differentiaalquotienten van den parameter. die het stelsel der V_{n-1} bepaalt, worden de vergelijkingen (C) en (D) partiëele differentiaalvergelijkingen van de *derde* orde in dezen parameter. [3])

[1]) M. LÉVY. Mémoire sur les coördonnées curvilignes orthogonales. Journal de l'Ecole Imp. Polytechnique 26 (70) 157—200, bldz. 159.

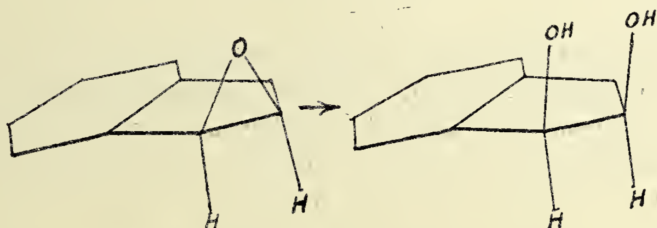
[2]) M. LÉVY. Mémoire etc. bldz. 174.

[3]) Voor een kort overzicht over en een bespreking van de literatuur over deze differentiaalvergelijking van de derde orde bij een stelsel V_2 in de R_3 (want hier vervalt (D) en reduceert het stelsel (C) zich tot één enkele vergelijking), zie LUCIEN LÉVY, Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux. Mém. couronnés et Mém. des savants étrangers, Bruxelles 54 (96), 89 bldz., bldz. 5 en volgende.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN doet eene mededeeling, mede namens den Heer CHR. VAN LOON: „*Over de configuratie-bepaling der cyclische cis-trans-diolen en de verstoringen in de rangschikking der atomen en atoomgroepen bij chemische reacties.*"

In vorige mededeelingen waarin de configuratie der hydrindeen-diolen besproken is, hebben wij er de aandacht op gevestigd dat het *indeenoxyde*, wanneer dit wordt gehydrateerd, zoowel het cis-diol, als het trans-diol kan geven. Wij hebben intusschen vastgesteld, dat de hoeveelheden dezer diolen afhankelijk zijn van de reactie van het medium, in zoover het trans-diol vooral gevormd wordt in alkalisch milieu.

Nu is het ontstaan van trans-diol uit het oxyde, met het oog op de waarschijnlijke ligging der atomen in het laatste molekuul opmerkelijk; men zoude het cis-diol verwachten.



Het was nu van het hoogste belang om de configuratie van het cis- en trans-diol, met alle zekerheid vast te stellen. Ongelukkigerwijze kan hier de klassieke methode, de al of niet splitsing in optische isomeren, niet ter hulp worden geroepen, omdat de beide diolen asymmetrisch zijn en derhalve splitsbaar, zoodat een andere methode moest worden gezocht.

Wij hadden reeds aangetoond, dat één der diolen de geleidbaarheid van het boorzuur vermeerderde, de andere niet en wij hebben gemeend, zooals nader blijken zal terecht, aan de eerste de cis-, aan de tweede de trans-configuratie te mogen toekennen.

[Ik mag hierbij als bekend veronderstellen, dat bij een aantal gevallen gebleken is, dat de vermeerdering van de zure eigenschappen van het boorzuur berust op de vorming van complexe dissociabele verbindingen, hetgeen vooral plaats grijpt wanneer twee OH-groepen „gunstig" ten opzichte van het boorzuur gelegen zijn].

Daar dit eenige argument staat of valt met het doeltreffende van de boorzuurmethode dient het te worden getoetst aan ons onderzoek inzake de *cyclopentaandiolen.*

Hier toch kunnen wij de boorzuur-methode controleeren met de klassieke methode, daar alleen het trans-diol niet met zijn spiegelbeeld dekbaar is en derhalve alleen deze stof in zijn optische isomeren splitsbaar moet zijn.

Wij zullen hier niet in bijzonderheden treden over de bereiding dezer beide diolen; wij volstaan met de mededeeling, dat het eene diol werd bereid door hydratatie van het *cyclopenteenoxyde*, terwijl het andere uit cyclopenteen door oxydatie met $KMnO_4$ werd gewonnen.

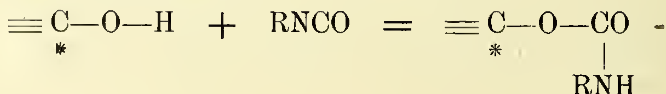
De eigenschappen der diolen zijn de volgende:

	Smp.	Kp.	Sm. diphenyl-urethaan.	Sm. di-p. nitro-benzoaat.
$C_5H_8(OH)_2$ uit C_5H_8 en $KMnO_4$	29°—30°	123.9°29	205°	117°—118°
$C_5H_8(OH)_2$ uit C_5H_8O en H_2O	54°.5—55°	136°21.5	221°	145°

Om nu met zekerheid uit te maken welke van deze twee glycolen het cis- en welke het trans-diol was, werden ze met *l-menthylisocyanaat* behandeld, waarbij het eerste één enkel di-l-menthylurethaan gaf, terwijl het hoogsmeltende diol een mengsel van di-menthylurethanen met zeer verschillend draaiend vermogen opleverde. Zonder deze urethanen af te zonderen en te verzeepen kunnen wij het besluit trekken, dat hierbij de urethanen van het trans-diol waren gevormd en wel *d-trans-diol-di-l-menthylurethaan* en *l-trans-diol-di-l-menthylurethaan.*

Daarmede is echter nog niet zonder nadere toelichting te besluiten dat nu ook het hoogsmeltende diol het trans-diol was. Er zoude immers tijdens de inwerking van het l-menthylisocyanaat een soort van Walden'sche omkeering kunnen zijn ingetreden.

Bij nadere overweging is dit echter in hooge mate onwaarschijnlijk. Zooals wij in onze vorige mededeeling hebben uiteengezet is een zoodanige configuratie-wisseling alleen te verwachten, wanneer de reactie intreedt aan het atoom, dat de rangschikking beheerscht. Dit nu is hier niet het geval:


$$\equiv \overset{}{\underset{*}{C}}—O—H + RNCO = \equiv \underset{*}{C}—O—\underset{RNH}{\underset{|}{CO}}-$$

aangezien de reactie plaats heeft, door splitsing van de O—H-binding, en het typische C-atoom dus met rust wordt gelaten [1]).

Wij mogen derhalve met groote zekerheid besluiten, dat het hoogsmeltende isomeer het trans-diol is, het laagsmeltende het cis-diol.

Vervolgens werd het gedrag der beide diolen ten opzichte van het boorzuur bestudeerd.

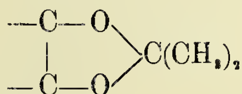
Inderdaad werd gevonden, dat het cis-diol de geleidbaarheid van het boorzuur aanmerkelijk vermeerderde, terwijl het trans-diol een geringe vermindering veroorzaakte.

De boorzuur-methode blijkt dus alleen een positief resultaat op te leveren in het geval, dat de OH-groepen in elkanders nabijheid liggen.

Wij kunnen dus nu ook met volkomen zekerheid zeggen, dat het hydrindeendiol (z. v. m.) smp. 108°, dat de geleidbaarheid van het boorzuur vermeerdert, het cis-hydrindeen diol, terwijl het hoogsmeltende (159°) zonder eenigen twijfel het transdiol is. Dit laatste oefent een geringe vermindering uit op de geleidbaarheid van het boorzuur.

Daartoe aangespoord door een mededeeling van E. Fischer (B. 28, 1146, 2496 (1895)) over de gemakkelijke vorming van cyclische additie-verbindingen van polyalkoholen met aldehyden en ketonen heeft een onzer (Chr. van Loon) een voorloopig onderzoek ingesteld naar het gedrag dezer stereoisomerediolen ten opzichte van aceton.

Hierbij worden vijf- (of zes-) ringen gevormd van het type:



Hoewel het niet geheel zeker is, is het toch hoogst waarschijnlijk, dat bij deze condensatie de toonaangevende C-atomen buitenspel zijn, zoodat ook hierbij een configuratie-verandering in den zin van de Walden'sche omkeering wel buitengesloten is.

Met verrassend gemak ontstond zoowel bij het cis-hydrindeendiol als bij het cis-cyclopentaandiol het verwachte condensatie-produkt, terwijl de trans-verbindingen onder dezelfde omstandigheden [24 uur laten staan met een overmaat 20 : 1 zuiver aceton, waarin 1 % HCl was opgelost] absoluut onveranderd bleven.

Wij hebben van deze methode onmiddellijk gebruik gemaakt om de configuratie van de cyclohexaandiolen vast te doen stellen.

---

[1]) Het is om deze reden, dat wij andere splitsingsmethoden (bijv. verestering met actieve zuren) niet hebben aangewend, omdat daarbij de geheele OH-groep kan worden verplaatst en alsdan het asymmetrie bepalende C-atoom wordt aangetast.

Deze beide verbindingen waren gemaakt door

1°. Inwerking van kali op het cyclohexeenjoodhydrine volgens Brunel, waarbij het oxyd als tusschenprodukt mag worden aangenomen.

Dit diol, smeltend bij 104°, werd door Brunel krachtens zijn ontstaan uit het oxyde aangemerkt voor cis-diol.

2°. Oxydatie van cyclohexeen met $KMnO_4$, waarbij een verbinding ontstaat die bij 99° smelt en welke dus aangezien werd voor het transdiol.

Daar echter deze laatste verbinding volgens proeven van H. G. Derx kwantitatief de aceton-verbinding gaf terwijl de bij 104° smeltende niet in reactie trad, moeten wij haar de cis-configuratie toekennen.

Merkwaardigerwijze oefent zij een geringen negatieven invloed uit op de geleidbaarheid van het boorzuur, zoodat in dit geval de aceton-methode betrouwbaarder is, dan de boorzuur-methode.

Wij moeten echter opmerken, dat de klassieke methode door inwerking van een actief isocyanaat nog niet is toegepast.

Bij de cyclopentaandiolen is dus op drie volkomen van elkander onafhankelijke wijzen de configuratie vastgesteld; de betrouwbaarheid der boorzuur-methode is daardoor in sterke mate verhoogd, terwijl de aceton-methode nog nader zal moeten worden bestudeerd. Zij heeft het groote voordeel snel tot het doel te voeren; heeft echter het nadeel, dat onder invloed van het condensatie-middel (HCl) omleggingen niet geheel buitengesloten zijn.

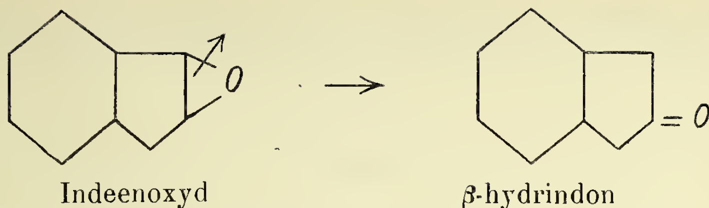
De vaststelling van de configuratie der cyclische 1.2-diolen heeft het merkwaardige feit aan het licht gebracht, dat bij de aanlegging van water aan de oxyden niet uitsluitend het verwachte cis-diol ontstaat, maar daarnaast en soms uitsluitend het trans-isomeer.

Komt dus aan het oxyde een configuratie toe waarbij het zuurstofatoom buiten den cyclopentaan-ring valt, welke met het oog op de materie-verdeeling de meest waarschijnlijke is, dan moet er bij de drie-ring-opening een omkeering intreden.

Het is merkwaardig, dat deze omkeering bij de symmetrische oxyden van het cyclopenteen en cyclohexeen vrijwel volledig is en wel onder alle omstandigheden, terwijl zij bij het asymmetrische indeen-oxyde afhankelijk is van de reactie van het medium.

Een zeer geringe alkalische reactie doet de hoeveelheid cis-diol, die in zuur medium in hoofdzaak ontstaat, tot nul naderen.

Er moge op gewezen worden, dat bij de reactie in alkalisch milieu steeds *β-hydrindon* gevormd wordt (of een condensatie-produkt daarvan), zoodat door het alkali de *α*-CO-binding losser schijnt te worden.



Indeenoxyd β-hydrindon

Aangezien nu juist hierbij het trans-diol gevormd wordt en een Walden'sche omkeering niet anders kan plaats vinden dan aan het atoom dat de stereoisomerie bepaalt, is het zeer waarschijnlijk, dat de configuratie-wisseling aan het α-C-atoom plaats grijpt.

Een tweede opmerking moge ten slotte gemaakt worden over de oxydatie van het cyclopenteen en het cyclohexeen door $KMnO_4$. Er blijken daarbij, ten minste in hoofdzaak, de cis-diolen te ontstaan. Hieruit volgt, dat de oxyden geen tusschenprodukten kunnen zijn, daar deze onder de omstandigheden van het experiment in de trans-diolen zouden overgaan.

Wellicht houdt de voorkeur van de vorming der cis-diolen door $KMnO_4$ samen met het ontstaan van complexe verbindingen van het driewaardige mangaan.

Er is toch eenerzijds gebleken dat de oxydatie van oxaalzuur door $KMnO_4$ juist ook bij de vorming van deze mangani-verbindingen intreedt terwijl anderzijds gevonden is, dat de α-Oxyzuren zeer tot het vormen van complexe mangani-verbindingen geneigd zijn. Bij deze verbindingen zijn de hydroxyl-groepen gunstig gelegen, zooals uit de metingen met boorzuur gebleken is. Men zou dan hier moeten aannemen, dat de mogelijkheid van vorming dezer complexen met de cis-diolen een zekeren drang zou uitoefenen op hun ontstaan.

Er is dan echter ook een gemakkelijke verdere oxydatie der cis-diolen te verwachten, evenals de α-oxyzuren ook gemakkelijk door mangani-hydroxyde worden aangegrepen. Dit zoude dan de zeer slechte opbrengsten kunnen verklaren, die de 20 % niet overschreden; een nadere studie zal dit echter moeten ophelderen.

Dordrecht/*Delft*, Juni 1919.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan over: „*Verdere proeven met vloeibaar helium.*

(Deze mededeeling zal opgenomen worden in het volgende Zittingsverslag).

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer J. BOEKE, namens den Heer G. C. HERINGA, aangeboden het manuscript van diens verhandeling: „Untersuchungen über den Bau und die Entwicklung des sensibeln peripheren Nervensystems."

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren J. BOEKE en C. WINKLER met verzoek om rapport, uit te brengen in de volgende vergadering.

De Heer ERNST COHEN biedt voor de boekerij ten geschenke aan een exemplaar van het door hem met den Heer W. SCHUT uitgegeven werk: „*Piezochemie kondensierter Systeme*".

De vergadering wordt gesloten.

---

25 November 1919.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 27 SEPTEMBER 1919.

DEEL XXVIII.

N°. 3.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgeving van de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF, H. J. HAMBURGER en S. HOOGEWERFF, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Eene missive van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 22 Augustus 1919, N°. 2931, Afd. K. W. met verzoek om het advies der Afdeeling te mogen vernemen over een request om Rijkssubsidie ad *f* 2000.— ten behoeve van de Publicatie-Commissie van het Geologisch Mijnbouwkundig Genootschap voor Nederland en Koloniën, waarop ten vervolge van denzelfden Minister ontvangen werd eene missive van den 27 September d.a.v. N°. 3439, Afd. K. W., waarbij ter kennisneming was ingesloten een request van dezelfde strekking als dat bij 's Ministers schrijven van 22 Augustus overgelegd en Zijne Excellentie toegezonden door het Bestuur van voormeld Genootschap.

De Voorzitter stelt de stukken in handen van de Heeren M. W. BEIJERINCK en J. F. VAN BEMMELEN met verzoek om prae-advies, uit te brengen in de volgende vergadering.

3°. Eene missive van Zijne Exc. den Minister van Waterstaat dd. 1 Juli 1919, N°. 239, Afd. Waterstaat T, met verzoek om een lid der Afdeeling aan te wijzen, dat zitting zou willen nemen als lid der Commissie van Toezicht op den Geologischen Dienst, op welke missive als vervolg ontvangen werd van denzelfden Minister een missive van 17 Juli 1919, N°. 245, Afd. Waterstaat T met bericht dat het den Minister aangenaam zou zijn als uit de leden der Afdeeling twee personen werden aangewezen om als leden in bovengenoemde Commissie zitting te nemen.

Door den Voorzitter werden reeds aangezocht de leden der Afdeeling, de Heeren K. MARTIN en G. A. F. MOLENGRAAFF, die zich bereid verklaarden het lidmaatschap dier Commissie te aanvaarden.

Aan den Minister zal hiervan mededeeling gedaan worden.

4°. Brieven van de Heeren C. BRAAK te Weltevreden en O. DE VRIES te Buitenzorg, met bericht van beiden dat zij hunne benoeming tot Correspondent der Afdeeling gaarne aannemen.

Voor kennisgeving aangenomen.

5°. Brief van den Heer Axel Holst, hoogleeraar aan de Universiteit te Kristiania, met bericht dat hij zijne benoeming tot buitenlandsch lid der Afdeeling gaarne aanneemt.

Voor kennisgeving aangenomen.

6°. Bericht van het overlijden te Berlijn op 15 Juli 1919 van het buitenlandsch lid der Afdeeling, den Heer Emil Fischer.

Dit bericht werd met een brief van rouwbeklag beantwoord, waarvoor reeds een dankzegging is ontvangen.

Bij het vermelden van dit overlijden herinnert de Voorzitter tevens aan het verlies, dat de Afdeeling geleden heeft in den dood van nog een buitenlandsch lid, Lord Rayleigh, van wiens overlijden geen bericht ontvangen is.

Aan de nagedachtenis van beide overledenen wijdt de Voorzitter een woord van sympathie en hulde.

7°. Bericht van het Bestuur der *„Senckenbergische naturforschende Gesellschaft"* te Frankfurt a/M, dat aldaar den 24 Augustus 1919 haar eerste Direkteur, de Heer August Knoblauch, is overleden.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

8°. Bericht van het overlijden op 2 Juli 1919 van het rustend lid der Afdeeling, den Heer A. P. N. Franchimont.

Dit bericht werd met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Naar aanleiding van dit overlijden zegt de Voorzitter:

ANTOINE PAUL NICOLAS FRANCHIMONT,

die ons weinige dagen na onze laatste vergadering ontviel, was een scheikundige van groote beteekenis, die tot de ontwikkeling van het deel der wetenschap, waaraan hij zich wijdde, in hooge mate heeft bijgedragen en de beoefening daarvan in Nederland krachtig heeft bevorderd.

Hij werd den 10den Mei 1844 te Leiden geboren en was een leerling van het gymnasium en de Universiteit daar ter stede. Dit laatste echter eerst op iets lateren leeftijd; hij had in 1864 het apothekersexamen gedaan en zich in 1866 als apotheker gevestigd. Maar al spoedig gevoelde hij in dezen werkkring niet voldoende bevrediging van zijn zucht naar zuivere wetenschap te kunnen vinden; in 1869 verliet hij zijne apotheek, na het jaar te voren als student te zijn ingeschreven. In korten tijd volbracht hij zijn studiën; reeds den 24sten Maart 1871 verwierf hij den doctorstitel op een proefschrift: „Bijdrage tot de kennis van het ontstaan en de chemische constitutie der zoogenaamde Terpeenharsen".

Van grooten invloed op zijn verdere ontwikkeling is een daarop volgend verblijf in het buitenland geweest. Te Bonn vond hij bij Kekulé, wiens privaatassistent hij werd en in wiens laboratorium hij menig onderzoek verrichtte, een opwekking die hij steeds dankbaar herdacht heeft. Het volgend jaar, van Augustus 1872 tot den herfst van 1873, was hij te Parijs als assistent van Wurtz werkzaam. Hij voelde zich zeer tot dezen aangetrokken, en sloot zich bij Friedel, Le Bel en andere voortreffelijke vertegenwoordigers der Fransche scheikunde aan.

Na zijn terugkeer uit Parijs was Franchimont eenigen tijd leeraar aan de Hoogere Burgerschool met voortgezet landbouwonderwijs te Wageningen, terwijl hij reeds van 1869 tot 1871 te Leiden onderwijs had gegeven aan de

avondschool van het Genootschap „Mathesis Scientiarum Genitrix". Ook het verblijf te Wageningen was van korten duur. Na het aftreden van VAN DER BOON MESCH kwamen er te Leiden twee leerstoelen voor scheikunde, de eene voor organische en de andere voor anorganische chemie, en zag FRANCHIMONT zich den eersten daarvan toevertrouwd. Hij aanvaardde zijn nieuwe ambt, een buitengewoon professoraat, dat in 1877 in een gewoon werd veranderd, den 2den Mei 1874 met een redevoering: „De verschillende richtingen der chemie. Blikken in het verleden, het heden en de toekomst dier wetenschap".

Met deze intreerede begon een bewonderenswaardige, door nooit verflauwde toewijding gedragen werkzaamheid in onderzoek en onderwijs. Wanneer men, zooals ik, het voorrecht had, vriendschappelijk met FRANCHIMONT om te gaan, kwam men, ook al was men zelf geen scheikundige, onder den weldadigen indruk van zijn wetenschappelijke geestdrift en van den ernst waarmee hij er naar streefde, op zijn gebied door het ontraadselen van den bouw der verbindingen en het te voorschijn roepen van nieuwe atoomschikkingen in de verschijnselen door te dringen. Men gevoelde tegenover een meester der wetenschap te staan en begreep hoeveel bezieling van hem tot zijn leerlingen moest uitgaan.

FRANCHIMONT heeft het geluk gehad, vele jongeren aan zich te binden, velen tot leidsman te zijn. Meer dan een dertigtal proefschriften zijn bij hem bewerkt en er is een tijd geweest, toen men kon zeggen dat alle Nederlandsche hoogleeraren in de organische chemie uit zijn laboratorium waren voortgekomen. Hoe hij de bewondering zijner leerlingen had opgewekt en hunne genegenheid had gewonnen, bleek bij menige gelegenheid, bij de veertigjarige herdenking zijner promotie, bij zijn veertigjarige ambtsvervulling en thans na zijn overlijden. Gewaagden de onderen dan van de moeilijkheden waarmee hij in den beginne had te kampen gehad, toen slechts weinig hulp en gebrekkige hulpmiddelen hem ten dienste stonden, van de volharding waarmede hij die bezwaren was te boven gekomen en van de oorspronkelijkheid waarmee hij het college en het labo-

ratoriumwerk had ingericht, de jongeren wezen erop dat in hun tijd FRANCHIMONT nog dezelfde was geweest als in die eerste, lang vervlogen jaren.

Met welke uitkomsten hij de wetenschap verrijkt heeft, hoe hij door de ontdekking van de nitraminen een nieuw hoofdstuk aan haar heeft toegevoegd, hoe hij wist te woekeren met nieuwe methoden zooals de behandeling met het „reëele" salpeterzuur, hoe, al zocht hij zelf dien weg niet, sommige zijner vondsten belangrijke technische toepassing hebben gevonden, dit, en veel meer, heeft in het bijzonder ons medelid VAN ROMBURGH in het licht gesteld. Ik zal mij niet vermeten, op mijn beurt een overzicht van zijn werk te geven. Maar wel mag ik eraan herinneren, omdat het ook mij niet verborgen bleef, dat hij, ondanks zijn verbazende feitenkennis, steeds het inzicht boven het weten stelde, dat hij de structuurchemie lenig en plooibaar wist te houden, getuige de voorliefde waarmede hij den onderlingen invloed van dicht bij elkaar staande atoomgroepen deed uitkomen, en dat hij een open oog had voor de beteekenis van andere richtingen in de scheikunde, de stereochemie aan den eenen, de physische chemie aan den anderen kant.

Tot den bloei der scheikunde in Nederland heeft hij bijgedragen door zijn leerboeken, en evenzeer door zijn aandeel in de oprichting van het Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas, in welk tijdschrift hij bij voorkeur zijne onderzoekingen publiceerde.

Dat hij eerelid van de Nederlandsche Chemische Vereeniging was en dat ook menige buitenlandsche onderscheiding getuigde van het hooge aanzien waarin hij bij zijn vakgenooten stond, behoef ik nauwelijks te zeggen. Sedert 1879 was hij lid dezer Akademie.

Een rijk en uitermate vruchtbaar wetenschappelijk leven heeft FRANCHIMONT gehad. Nadat, nu zeventien jaren geleden, een zware ziekte ons geruimen tijd ernstige bezorgdheid had gegeven, bleken tot onze vreugde zijn veerkracht en zijn werklust onverminderd te zijn. Zij zijn hem tot het laatst, ook na zijn aftreden als hoogleeraar, bijgebleven en zoo mochten wij hopen, hem nog lang van een gelukkigen

levensavond te zien genieten. Die hoop is helaas niet vervuld; na een zwaar en droevig lijden, met voorbeeldigen moed en berusting gedragen, werd hij den 2den Juli van ons weggenomen, een groote leegte achterlatende.

In de geschiedenis der wetenschap en in onze herinnering zal hij een eereplaats innemen.

Anatomie. — De Heer J. BOEKE brengt, mede namens den Heer C. WINKLER, het volgende rapport uit:

Dr. G. C. HERINGA, Conservator aan het laboratorium voor Embryologie en histologie der Rijks-Universiteit te Utrecht, heeft onder den titel „Untersuchungen über den Bau und die Entwickelung des sensibelen periferen Nerven-systems", een werk van 185 bladzijden schrift met 43 tekst-figuren en 65 teekeningen, aangeboden voor plaatsing in de Verhandelingen der Natuurkundige Afdeeling van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

De Commissie tot beoordeeling van dit werk, in de vorige vergadering benoemd, brengt daarover het volgende verslag uit.

De schrijver begint zijn arbeid met een onderzoek naar bepaalde tastorganen in den eendensnavel, de z. g. lichaampjes van GRANDRY. Hij voert het bewijs, dat de toevoerende fibrillenbundel, nadat hij zich heeft opgelost in een van axoplasma omgeven fibrillenreticulum — de tastschijf tusschen de twee het orgaan opbouwende cellen — zich met intraplasmatische fibrillen voortzet in de intracellulaire fibrillenreticula dier beide cellen. Dit reeds oudere werk breidt de schrijver uit tot de z.g. tastlichaampjes van MEISSNER. Na vergelijking met de literatuur komt hij tot de slotsom, dat ook dit orgaan mag worden opgevat, als de in fibrillen uiteengevallen fibrillenbundel der toevoerende zenuwvezels, welke intraplasmatisch samenhangen met de fibrillenreticula van alle zich in de kolf bevindende cellen.

Toch zijn deze vooraf gaande uiteenzettingen, alsmede een hoofdstuk, dat aan een kritisch overzicht der literatuur is gewijd, slechts de aanloop tot een breed opgezette studie over de wording van het periphere, vooral van het sensibele zenuwstelsel.

De schrijver staat daarbij op de schouders van HANS HELD.

Hij neemt een van diens grondgedachten, op grond van eigen waarneming, over en neemt aan, dat een zenuwfibril nimmer naakt wordt aangetroffen, maar altijd omgeven is door protoplasma en dus midden in een celuitlooper, een syndesma of plasmodesma ligt, die daardoor tot neurodesma wordt.

Zijn onderzoek bevestigt ook een ander resultaat van HELD, n.l. dat het plasma, waarin de zenuwfibrillen worden aangetroffen, niet alleen afkomstig is van het plasma der neuro-blasten maar ook door het plasma der mesenchymcellen wordt geleverd. Dan echter wijkt

hij van Held af, gaat veel verder dan Held is gegaan en spreekt de meening uit, dat de mesenchymcellen, die onderling door plasmadesmen tot een syncytium vereenigd zijn, zonder meer in staat zijn ook de vorming der neurofibrillen op zich te nemen. Is dit fibrillisatie-proces tot op zekere hoogte gekomen, dan snellen secundair nieuwe mesenchymcellen te hulp om het te voltooien en deze cellen worden deels tot cellen der scheede van Schwann, deels krijgen zij eigenschappen tot vorming van intracellulaire fibrillennetten, die men gewoon was slechts aan neuroblasten toe te schrijven en doen zich voor als de cellen der lichaampjes van Grandry of als cellen der binnenkolven in andere tastlichaampjes.

Had Held gehoopt de neuron-hypothese, de uitgroeiïng van een fibrillenbundel uit den neuroblast, te kunnen verzoenen met de z.g. ketenhypothese, d.w.z. die de fibrillen doet voortgaan in en voortkomen uit rijen aaneengeschakelde cellen, welke als geleidingscellen de latere zenuwbaan bepalen, de schrijver maakt tegen beide voorstellingen front.

Indien Held zich steunt op het feit, dat dicht bij het ruggemerg, gliablasten (vooral uit de ruglijst) zich langs den fibrillenbundel voortschuiven, de schrijver erkent voor het perifere deel van het zenuwstelsel dit feit niet, en ontkent daar het bestaan van geleidingscellen, in welken vorm dan ook.

In tegenstelling van Held, die de vorming van fibrillenreticula specifiek acht voor den neuroblast, is voor den schrijver het mesenchymsyncytium universeel tot fibrillenvorming in staat.

De onderzoekingen van den schrijver raken de grondbeginselen van het ontstaan van het perifere zenuwstelsel. Zonder twijfel laten een aantal zijner beschouwingen kritiek toe en is het niet te verwachten, dat zijn gedachtengang zonder tegenspraak zal blijven, maar zijne onderzoekingen zijn verricht met beheersching der beste en nieuwste methoden voor fibril- en celkleuring, door een scherp waarnemer, die met helderen gedachtengang, de vragen, die hij aan de natuur stelt, goed weet te formuleeren.

De ondergeteekenden hebben dan ook geen oogenblik geaarzeld om te adviseeren zijn werk in de Verhandelingen op te nemen.

Wel is bij hen de vraag gerezen of er geen nader overleg zou kunnen worden gepleegd over beperking der textfiguren, reproducties van afbeeldingen door anderen over dit onderwerp.

Zij zouden kunnen vervangen worden door verwijzing naar de juiste plaats, waar die afbeelding oorspronkelijk is gegeven.

Het nadeel, dat de lezing van zijn werk moeilijker wordt, wordt hierbij opgewogen door het feit, dat afbeeldingen, waarbij het op

minutieuse details aankomt, als textfiguren slecht gereproduceerd zullen worden en de geduchte onkosten, die eraan verbonden zijn, doen de vraag ontstaan, of dan die reproductie gewettigd is.

Utrecht, 26 September 1919.

(get.) C. Winkler.
,, J. Boeke.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan het rapport, zoodat de verhandeling zal worden opgenomen in de Werken der Akademie. Aan den Heer Heringa zal hiervan kennis gegeven worden.

De Voorzitter doet vervolgens mededeeling van een schrijven van de Commissie van Uitvoering van het Zoölogisch Insulinde Fonds aan het Bestuur der Akademie, waarin er op gewezen wordt dat in artikel 5 der Statuten van dit fonds wordt bepaald, dat de Commissie van Uitvoering gedurende het leven van den stichter naast hem uit nog drie leden moet bestaan, van welke drie leden er twee door de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Akademie worden benoemd, die het derde lid assumeeren door een keuze uit beoefenaars der Zoölogie, geen leden der Akademie zijnde. De benoeming van den Heer C. Ph. Sluiter tot lid der Akademie maakte dat de drie naast den stichter fungeerende leden der Commissie nu allen tevens leden der Akademie waren. Tengevolge hiervan heeft het lid, de Heer K. Martin, den wensch te kennen gegeven uit de Commissie te treden en zijn de twee overblijvende leden, de Heeren Max Weber en C. Ph. Sluiter, nu voornemens den Heer P. N. van Kampen, Hoogleeraar aan de Universiteit te Leiden, uit te noodigen in de Commissie zitting te nemen.

Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS biedt eene mededeeling aan over: *„In-, mono- en divariante evenwichten"*. XIX.

Evenwichten van n komponenten in $n+1$ phasen.

In mededeeling XVI hebben wij gezien dat op een bivariant veld $E = F_1 + \ldots F_n$ de volgende evenwichten kunnen optreden.

1° de grenskurve E_0, als de hoeveelheid van een der komponenten tot nul nadert.

2° de keerlijn E_R, als tusschen de n phasen eene phasenreactie kan optreden.

3° de kritische kurve E_K, als tusschen 2 phasen kritische verschijnselen optreden.

In mededeeling XVII en XVIII hebben wij de keerlijn E_R en het veld in de nabijheid dezer lijn nader besproken. Wij zullen thans in het kort nog de grenslijn E_0 beschouwen.

Wordt in een evenwicht $E = F_1 + \ldots + F_n$ de hoeveelheid van een der komponenten nul, dan gaat het over in het evenwicht $E_0 = F_1 + \ldots + F_n$ van $n-1$ komponenten in n phasen, of, wat op hetzelfde neerkomt, van n komponenten in $n+1$ phasen. Wij beschouwen dus dit laatste evenwicht, nl.:

$$E = F_1 + F_2 + \ldots + F_{n+1}$$

van n komponenten in $n+1$ phasen.

De evenwichtsvoorwaarden zijn:

$$Z_i - x_i \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} - y_i \frac{\partial Z_i}{\partial y_i} - \ldots = K \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

waarin: $i = 1, 2, \ldots (n+1)$

en verder:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Z_2}{\partial x_2} = \ldots = \dfrac{\partial Z_{n+1}}{\partial x_{n+1}} = K_x \\ \dfrac{\partial Z_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial Z_2}{\partial y_2} = \ldots = \dfrac{\partial Z_{n+1}}{\partial y_{n+1}} = K_y \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

waarbij nog de overeenkomstige vergelijkingen voor $z_1\, z_2 \ldots u_1\, u_2 \ldots$ enz. moeten gevoegd worden.

In (1) hebben wij $n+1$, in (2) $(n-1)(n+1)$ vergelijkingen; samen dus n^2+n vergelijkingen. Behalve de $(n-1)(n+1)$ veranderlijken $x_1\, x_2 \ldots y_1\, y_2 \ldots$ enz., hebben wij nog de $n+2$ veranderlijken

$P\,T\,K\,K_x \ldots$, dus in het geheel $n^2 + n + 1$ veranderlijken; het evenwicht heeft dus éene vrijheid, het is monovariant.

Bij de afleiding van (1) en (2) is aangenomen dat elke phase alle komponenten bevat en eene veranderlijke samenstelling heeft; de beschouwingen gelden echter ook als er phasen met constante samenstelling optreden of die niet alle komponenten bevatten, mits er ten minste éene veranderlijke phase is, die alle komponenten bevat. Op andere gevallen komen wij later terug.

Uit (1) volgt:

$$-V_i\,dP + H_i\,dT + x_i\,d\frac{\partial Z_i}{\partial x_i} + y_i\,d\frac{\partial Z_i}{\partial y_i} + \ldots = -\,dK \quad . \quad . \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \ldots (n+1)$$

waarin het teeken d aangeeft, dat gedifferentieerd moet worden ten opzichte van alle veranderlijken, die de functie Z_i bevat, dus ten opzichte van $P\,T\,x_i\,y_i \ldots$ Uit (2) volgt:

$$\left.\begin{array}{l} d\dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1} = d\dfrac{\partial Z_2}{\partial x_2} = \ldots = d\dfrac{\partial Z_{n+1}}{\partial x_{n+1}} = dK_x \\[2ex] d\dfrac{\partial Z_1}{\partial y_1} = d\dfrac{\partial Z_2}{\partial y_2} = \ldots = d\dfrac{\partial Z_{n+1}}{\partial y_{n+1}} = dK_y \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin het teeken d dezelfde beteekenis heeft als boven.

Wij schrijven de phasenreactie, die in het evenwicht $E = F_1 + \ldots + F_{n+1}$ kan optreden:

$$\lambda_1\,F_1 + \lambda_2\,F_2 + \ldots + \lambda_{n+1}\,F_{n+1} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De n verhoudingen tusschen de $n+1$ reactie-coefficienten zijn dan bepaald door de n vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,(\lambda) \;\;\, = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} = 0 \\ \Sigma\,(\lambda\,x) = \lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2 + \ldots + \lambda_{n+1}\,x_{n+1} = 0 \\ \Sigma\,(\lambda\,y) = \lambda_1\,y_1 + \lambda_2\,y_2 + \ldots + \lambda_{n+1}\,y_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Telt men de $n+1$ vergelijkingen (3) zamen, nadat men de eerste met λ_1, de tweede met λ_2, enz. vermenigvuldigd heeft, dan volgt met behulp van (4) en (6):

$$-\,\Sigma\,(\lambda\,V)\,.\,dP + \Sigma\,(\lambda\,H)\,.\,dT = 0$$

of

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Sigma\,(\lambda\,H)}{\Sigma\,(\lambda\,V)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarin:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,(\lambda V) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_{n+1} V_{n+1} \\ \Sigma\,(\lambda H) = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_{n+1} H_{n+1} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hierin hebben $\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1}$ de waarden, die uit (6) volgen. $\Sigma\,(\lambda\,V)$

is dus de volume- en $\Sigma(\lambda H)$ de entropieverandering, die bij de phasenreactie (5) optreden.

Daar het evenwicht monovariant is, wordt het in het P,T-diagram voorgesteld door eene kurve, die wij E zullen noemen; haar richting is bepaald door (7).

Doorloopt men deze kurve E dan veranderen $x_1\, y_1 \ldots x_2\, y_2 \ldots$ en dus ook $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots$ van punt tot punt langs deze kurve. Als nu in een bepaald punt q dezer kurve $\lambda_q = 0$ wordt, dan worden in (8) $\lambda_q\, V_q = 0$ en $\lambda_q\, H_q = 0$. In het punt q geldt dan:

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_q = \frac{\Sigma(\lambda H)_q}{\Sigma(\lambda V)_q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Het evenwicht E gaat in het beschouwde punt q nu over in een evenwicht:

$$E_R = F_1 + \ldots + F_{q-1} + F_{q+1} + \ldots + F_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

nl. in een der vroeger beschouwde evenwichten E_R van n komponenten in n phasen, waartusschen eene phasenreactie

$$\lambda_1\, F_1 + \ldots \lambda_{q-1}\, F_{q-1} + \lambda_{q+1}\, F_{q+1} + \ldots + F_{n+1} = 0 \quad . \quad (11)$$

kan optreden. Dit evenwicht is eveneens monovariant en wordt in het P,T-diagram voorgesteld door eene kurve, de keerlijn E_R van het veld:

$$(F_q) = F_1 + \ldots + F_{q-1} + F_{q+1} + \ldots + F_{n+1} \quad . \quad . \quad (12)$$

Voor deze keerlijn geldt nu eveneens formule (9). Uit onze beschouwingen blijkt:

„de kurve, die het evenwicht

$$E = F_1 + F_2 + \ldots + F_{n+1}$$

„voorstelt, ligt in het P,T-diagram in het gemeenschappelijk deel „der $n+1$ velden $(F_1)(F_2)\ldots(F_{n+1})$; neemt in een punt q dezer „kurve de phase F_q niet aan de reactie deel, dan raakt de kurve „in dit punt q aan de keerlijn van het veld (F_q). In het algemeen „kunnen er $n+1$ van deze raakpunten optreden".

Past men dit toe op het binaire evenwicht $E = F + L + G$, waarin F, L en G eene binaire verbinding, vloeistof en damp voorstellen, dan volgt dat de kurve E binnen de drie velden $F+L$, $F+G$ en $L+G$ moet liggen. Krijgt in een punt a de vloeistof L dezelfde samenstelling als F, dan raakt kurve E de grenskurve $E_R = F + L$, (dus de smeltlijn van F) in a. Krijgt in b G dezelfde samenstelling als F, dan raakt kurve E de grenskurve $E_R = F + G$, (dus de sublimatiekurve van F) in b. Kunnen in een punt c L en G dezelfde samenstelling krijgen, dan raakt kurve E de grenskurve $E_R = L + G$ in c.

Uit (7) volgen dadelijk de bekende voorwaarden, waaronder druk of temperatuur langs kurve E stationnair (maximum of minimum) is. Is een der phasen b.v. F_1 een gas, dan is in het algemeen V_1 zeer groot in vergelijking met V_2 V_3 .... Wij nemen nu op knrve E een punt a, waar $\lambda_1 = 0$ is. Kurve E raakt in dit punt a dus aan de grenslijn van het veld F_1. In dit punt a is

$$\Sigma (\lambda V)_a = (\lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_{n+1} V_{n+1})_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

en in het algemeen van nul verschillend.

In de nabijheid van punt a is λ_1 echter niet meer nul en geldt voor $\Sigma(\lambda V)$ niet meer de waarde uit (13) maar die uit (8). Daar V_1 groot is in vergelijking met V_2 V_3 ..., kan $\Sigma(\lambda V)$ in (8) dus reeds nul zijn voor eene kleine waarde van λ_1. Is nu $\Sigma(\lambda V) = 0$ dan is volgens (7) $dT = 0$ dus de temperatuur maximum of minimum.

Wij vinden dus: „als van het evenwicht

$$E = F_1 + F_2 + \dots + F_{n+1}$$

„een der phasen b.v. F_1 een gas is dan ligt het temperatuurmaximum „(of minimum) van kurve E in het algemeen in de nabijheid van „het raakpunt dezer kurve met de grenskurve

$$E_R = F_2 + \dots + F_{n+1}$$

„van het veld (F_1)."

Past men dit toe op het boven besproken binaire evenwicht $E = F + L + G$ dan blijkt dat deze kurve E haar maximumtemperatuurpunt heeft in de nabijheid van haar raakpunt met de smeltlijn van F. Men kan dit ook zoo uitdrukken: het maximumtemperatuurpunt van het evenwicht $F + L + G$ verschilt weinig van het smeltpunt van F onder eigen dampdruk.

Beschouwt men de ternaire kurve $E = F_1 + F_2 + L + G$ dan volgt dat deze haar maximumtemperatuurpunt moet hebben in de nabijheid van haar raakpunt met de grenskurve $F_1 + F_2 + L$; de gemeenschappelijke smeltkurve (of omzettingskurve) van $F_1 + F_2$. Men kan ook zeggen: het maximumtemperatuurpunt van het evenwicht $F_1 + F_2 + L + G$ verschilt weinig van het gemeenschappelijk smeltpunt (of omzettingspunt) onder eigen dampdruk van $F_1 + F_2$.

Denkt men zich de oplossingen van dit evenwicht E door eene kurve in een concentratiediagram (b.v. een driehoek) voorgesteld, dan ligt haar maximumtemperatuurpunt dus in de nabijheid van haar snijpunt met de lijn F_1F_2.

Hetzelfde geldt natuurlijk ook voor het quaternaire evenwicht $E = F_1 + F_2 + F_3 + L + G$. Stelt men de oplossingen van dit evenwicht door eene kurve in een concentratiediagram (b.v. een tetraeder) voor, dan ligt haar maximumtemperatuurpunt dus in de nabijheid van haar snijpunt met het vlak $F_1F_2F_3$.

Leiden, Anorg. Chem. Lab. (*Wordt vervolgd*).

Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS biedt eene mededeeling aan van den Heer P. H. J. HOENEN S.J. over: „*Uitbreiding der wet van* BRAUN."

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Door de fraaie onderzoekingen, in de laatste jaren in het VAN 'T HOFF-laboratorium uitgevoerd, is de aandacht weer gevestigd op de zoogenaamde „wet van BRAUN." Tegenwoordig stelt men deze wet gewoonlijk voor door de formule

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_T : \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_p = -\frac{T\Delta V}{Q}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

waarin (voor het evenwicht: vaste stof-vloeibare oplossing) $\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_T$ voorstelt den drukcoëfficiënt der oplosbaarheid, $\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_p$ den temperatuurcoëfficiënt, Q de differentiëele oploswarmte, ΔV de differentiëele volumetoename.

Deze wet van BRAUN is een bijzonder geval eener algemeene wet, die we hier zullen afleiden.

1. We stellen ons voor, dat we een oplossing hebben, met n vaste stoffen verzadigd; de hoeveelheid oplosmiddel zij één mol, de hoeveelheid der opgeloste stoffen, die bij een druk p en een temperatuur T in de verzadigde oplossing aanwezig is, zij $x, y, z \ldots$ molen. Welnu, in dit geval geldt de betrekking:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_T \times \frac{Q_x}{T} + \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_p \times \Delta V_x + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)_T \times \frac{Q_y}{T} + \left(\frac{\partial y}{\partial T}\right)_p \times \Delta V_y + \ldots = 0 \quad (2)$$

Hierin stelt Q_x voor: de warmte noodig voor het in oplossing brengen van één mol van den eersten component in een oneindig groote hoeveelheid vloeistof van de aangegeven samenstelling bij constante p en T, dus de differentiëele moleculaire oploswarmte van dien component; ΔV_x: de overeenkomstige volumetoename, dus de differentiëele moleculaire volumetoename. De andere notaties behoeven verder geen toelichting.

Hebben we slechts met één vaste stof te doen, dan gaat (2) over in

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_T \times \frac{Q_x}{T} + \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_p \times \Delta V_x = 0,$$

welke vergelijking dezelfde is als (1). Het is dus duidelijk, dat de wet van BRAUN een bijzonder geval is van (2).

2. We zullen (2) eerst bewijzen voor het eenvoudige geval, dat de oplossing met slechts twee vaste stoffen verzadigd is, waarbij we onderstellen, dat deze twee stoffen en het oplosmiddel in den zin der phasenleer onafhankelijke componenten zijn, zoodat we over 2 vrijheden, druk en temperatuur, beschikken. De ζ-functie der totale vloeistofphase stellen we Z, die der vaste phasen (per mol) ζ_x en ζ_y. Er is evenwicht als

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \zeta_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \zeta_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De eerste leden dezer vergelijkingen zijn functies van x, y, p en T, waarin echter slechts twee onafhankelijk veranderlijk. Differentiëeren we beide vergelijkingen naar p bij constante T, dan komt er:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial p} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} - v_x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial p} = -\left(\frac{\partial V}{\partial y} - v_y\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

waarin de notatie wel geen toelichting behoeft; we merken nog op, dat het tweede lid van $(3a) = -\Delta V_x$ het tweede lid van $(4a) = -\Delta V_y$.

Differentiëeren we beide vergelijkingen naar T bij constante p, dan krijgen we:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial T} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial T} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \eta_x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial T} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial T} = \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \eta_y\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

Het tweede lid van $(3b) = \frac{Q_x}{T}$, het tweede lid van $(4b) = \frac{Q_y}{T}$.

Welnu uit deze 4 vergelijkingen volgt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) \times \frac{Qx}{T} + \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)\Delta V_x + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\frac{Qy}{T} + \left(\frac{\partial y}{\partial T}\right)\Delta V_y = 0 \quad . \quad (5)$$

Bewijs: Uit $(3a)$ en $(4a)$ volgt, als we stellen $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = t$,

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{s\Delta V_y - t\Delta V_x}{rt - s^2} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{s\Delta V_x - r\Delta V_y}{rt - s^2} \; ;$$

Uit (3*b*) en (4*b*) volgt:

$$T\frac{\partial x}{\partial T} = \frac{tQ_x - sQ_y}{rt - s^2} \quad ; \quad T\frac{\partial y}{\partial T} = \frac{rQ_y - sQ_x}{rt - s^2} \; .$$

Substitutie dezer waarden in het eerste lid van (5) geeft een breuk, waarvan de teller $= 0$, terwijl de noemer $rt - s^2$ bij stabiel evenwicht > 0 is; hiermee is dus de betrekking (5) bewezen.

Merken we nog op, dat de afzonderlijke sommen als $\frac{\partial x}{\partial p} \times \frac{Q_x}{T} + \frac{\partial x}{\partial T} \Delta V_x$ niet nul zijn, behalve in het bijzondere geval dat $\frac{Q_x}{Q_y} = \frac{\Delta V_x}{\Delta V_y}$.

3. We zullen nu trachten, de algemeene betrekking (2) te bewijzen. We onderstellen dus, dat we een vloeistofphase hebben, bestaande uit één mol oplosmiddel en $x, y, z, \ldots$ mol der opgeloste stoffen; bij een druk p en een temperatuur T is de oplossing met deze n stoffen verzadigd. We hebben dus $n + 1$ componenten in evenveel phasen en beschikken dus over twee vrijheden.

De evenwichtsvoorwaarden zijn (voor de notatie zie boven):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} - \zeta_x &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} - \zeta_y &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial z} - \zeta_z &= 0 \\ \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

De eerste leden dezer n vergelijkingen zijn weer functies van $x, y, z, \ldots p$ en T; De laatste twee beschouwen we als onafhankelijk veranderlijken. Differentiëeren we weer, eerst alleen naar p, dan alleen naar T, dan resulteeren de twee stellen vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial p} + \ldots\ldots &= -\Delta V_x \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial p} + \ldots\ldots &= -\Delta V_y \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial p} + \ldots\ldots &= -\Delta V_Z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6a)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial T}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial T}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial T}+\ldots\ldots = \frac{Q_x}{T}\\
\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial T}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial T}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial T}+\ldots\ldots = \frac{Q_y}{T}\\
\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z}\frac{\partial x}{\partial T}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial z}\frac{\partial y}{\partial T}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial T}+\ldots\ldots = \frac{Q_z}{T}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad . \; . \; (6b)$$

We hebben voor $\frac{\partial V}{\partial x} - v_x$ weer ΔV_x, voor $\frac{\partial H}{\partial x} - \eta_x$ weer $\frac{Q_x}{T}$ enz. geschreven.

Vermenigvuldigen we nu de eerste der vergelijkingen ($6a$) met $-\frac{\partial x}{\partial T}$, de tweede met $-\frac{\partial y}{\partial T}$ enz., de eerste der vergelijkingen ($6b$) met $\frac{\partial x}{\partial p}$, de tweede met $\frac{\partial y}{\partial p}$ enz. en sommeeren we de $2n$ vergelijkingen dan resulteert er een vergelijking, waarvan het tweede lid is:

$$\frac{\partial x}{\partial p}\times\frac{Q_x}{T}+\frac{\partial x}{\partial T}\Delta V_x+\frac{\partial y}{\partial p}\times\frac{Q_y}{T}+\frac{\partial y}{\partial T}\times\Delta V_y+\ldots\ldots$$

Het eerste lid der resulteerende vergelijking is nul, gelijk blijken kan als volgt. Iedere term van dit eerste lid bevat één der „onbekenden" $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$ enz. uit de vergelijkingen ($6a$). Beschouwen we de termen, die één dezer onbekenden bv. $\frac{\partial x}{\partial p}$ bevatten. Deze termen worden in de som geleverd 1e. door de eerste termen der vergelijkingen ($6a$) en door geen andere termen dezer vergelijkingen, 2e. door het geheele eerste lid van de eerste vergelijking ($6b$), die immers met $\frac{\partial x}{\partial p}$ vermenigvuldigd werd, en door geen andere vergelijking ($6b$).

De termen, die $\frac{\partial x}{\partial p}$ bevatten zijn dus:

$$-\frac{\partial x}{\partial T}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, -\frac{\partial y}{\partial T}\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}, -\frac{\partial z}{\partial T}\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z}, \quad . \; . \; . \; \text{uit } (6a) \text{ en}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial T}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial T}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial T}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{uit } (6b),$$

alle termen vermenigvuldigd met $\frac{\partial x}{\partial p}$.

Welnu uit den bouw der vergelijkingen ($6a$) en ($6b$) blijkt, dat

de som der factoren, waarmee $\frac{\partial x}{\partial p}$ vermenigvuldigd wordt, gelijk is aan nul, en dat ditzelfde het geval is voor elk der „onbekenden". Het eerste lid der resulteerende vergelijking is dus inderdaad nul en we vinden als resultaat:

$$\frac{\partial x}{\partial p} \times \frac{Q x}{T} + \frac{\partial x}{\partial T} \Delta V_x + \frac{\partial y}{\partial p} \times \frac{Q y}{T} + \frac{\partial y}{\partial T} \Delta V_y + \ldots\ldots \quad = 0,$$

d.i. de vergelijking (2), die we ons als uitbreiding der wet van Braun te bewijzen voorstelden.

Opmerking 1. Het „oplosmiddel" behoeft geen zuivere stof te zijn, het kan een mengsel zijn van verschillende stoffen (waarvan er echter geene als vaste stof optreedt); in deze onderstelling blijft onze bewijsvoering geheel dezelfde; het resultaat blijft dus geldig. De grootheden Q enz. hebben echter, als het „oplosmiddel" een andere samenstelling heeft, natuurlijk in het algemeen een andere waarde.

Opmerking 2. Wij hebben in onze beschouwingen nergens gebruik gemaakt van de wijze, waarop Z expliciet afhangt van de samenstelling; waaruit volgt, dat de resultaten zoowel bij constante als bij reageerende componenten geldig zijn. Alleen onderstelden we, dat de $n+1$ componenten onafhankelijk in den zin der phasenleer zijn.

Opmerking 3. We kunnen voor het algemeen geval een bewijs geven, dat zich meer aansluit bij het bewijs, dat we voor het eenvoudige geval van 3 componenten gaven; daarbij zou ook blijken, dat we met een stabielen evenwichtstoestand te doen moeten hebben. Daar het bewijs ingewikkelder is, dan het boven gegevene, laten we het achterwege. Een ander bewijs zullen we nog in een volgende mededeeling bij een algemeener probleem ontmoeten.

Katwijk a. d. Rijn, Augustus 1919.

Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS biedt aan eene mededeeling van den Heer P. H. J. HOENEN S. J. over: „*Druk- en temperatuurcoëfficiënten, volume- en warmte-effecten in bivariante stelsels*".

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

In eene vorige mededeeling [1]) leidden we een algemeene wet af, (waarvan de zoogenaamde „wet van BRAUN" een bijzonder geval is en) die een verband aangeeft tusschen de druk- en temperatuurcoëfficiënten der oplosbaarheid van verschillende vaste stoffen, waarmee een vloeistof verzadigd is, en de oploswarmte en volume toename bij oplossing der betreffende vaste stoffen. In deze mededeeling zullen we een dergelijk verband trachten op te sporen voor willekeurige bivariante stelsels.

I. *Heterogene evenwichten.*

1. Bij n componenten hebben we een bivariant stelsel in den gewonen zin van het woord, als er n phasen coëxisteeren; dan zijn er twee onafhankelijk veranderlijken, b.v. druk en temperatuur. We kunnen echter ook bij minder dan n phasen slechts deze twee als onafhankelijk veranderlijken overhouden, als we ons n.l. bij alle veranderingen in het stelsel de voorwaarde opleggen, dat de samenstelling van het totale complex constant blijft. Dan blijven, hoeveel phasen we ook hebben (mits niet meer dan n), alleen druk en temperatuur als onafhankelijk veranderlijken over.

Er moet dus overeenkomst tusschen al deze stelsels bestaan; een groot verschil met bivariante stelsels in den gewonen zin (dus met n phasen) bestaat hierin, dat in het laatste geval de samenstelling der phasen afzonderlijk onafhankelijk is van de samenstelling van het complex, wat niet het geval is met de stelsels, die alleen „bivariant bij constante totaalsamenstelling" zijn.

We zullen het bovenstaande even toelichten door de evenwichtsvergelijkingen te beschouwen. We nemen aan, dat we hebben n componenten in l phasen.

De samenstelling der 1ste phase zij: $x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots$

„ „ „ 2de „ „: $x_2,\ y_2,\ z_2, \ldots$

. . . .

„ „ „ l^{de} „ „: $x_l,\ y_l,\ z_l, \ldots$

---

[1]) Deze Verslagen onmiddellijk voorafgaande mededeeling.

We geven dus de samenstelling van iedere phase aan door de absolute hoeveelheid (in mol.) van elken component. Tusschen deze grootheden bestaan de betrekkingen:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \ldots . . x_l = X \\ y_1 + y_2 + \ldots . . y_l = Y \\ z_1 + z_2 + \ldots . . z_l = S \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Het aantal vergelijkingen (1) bedraagt n. De grootheden X, Y, $S\ldots$, die de totaalsamenstelling bepalen, worden constant gedacht.

Als we de ζ-functies der afzonderlijke phasen voorstellen door Z_1, $Z_2, \ldots Z_l$, zijn de evenwichtsvoorwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial Z_2}{\partial x_2} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_1} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_1} = 0 \;\; ; \ldots . . \;\; \frac{\partial Z_l}{\partial x_l} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_1} = 0\,; \\ \frac{\partial Z_2}{dy_2} - \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial Z_3}{\partial y_3} - \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} = 0 \;\; ; \ldots . . \;\; \frac{\partial Z_l}{\partial y_l} - \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} = 0\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \;.\;.\quad (2)$$

Het aantal vergelijkingen (2) bedraagt $n\,(l-1)$.

Wat den vorm dezer vergelijkingen betreft: de eerste leden zijn functies van den graad 0 in de veranderlijken $x_1\, y_1 \ldots$, hangen dus alleen af van de onderlinge verhoudingen (b.v. $\frac{y_1}{x_1}$, $\frac{z_1}{x_1}$ enz.) niet van de absolute waarde. We hebben daarin dus, behalve p en T, slechts $l\,(n-1)$ veranderlijken of onbekenden, daar we in iedere phase slechts $n-1$ verhoudingen hebben, die de samenstelling bepalen.

Als nu $l=n$, hebben we dus $n\,(n-1)$ vergelijkingen (2) met $n\,(n-1)$ onbekenden (behalve p en T); deze vergelijkingen bepalen dus, bij gegeven p en T, de samenstelling volkomen, die dus onafhankelijk is van de totaal-samenstelling X, $Y, \ldots$ De vergelijkingen (1) kunnen alleen dienen ter berekening van de absolute waarden van x_1 enz.

Is nu $l < n$, dan hebben we minder vergelijkingen (2) dan onbekenden, die de samenstelling van iedere phase bepalen; dan moeten we dus ter berekening dier samenstelling de vergelijkingen (1) mede gebruiken, zoodat dan de samenstelling van iedere phase afhankelijk wordt van de totaalsamenstelling X, $Y, \ldots.$ We hebben echter steeds genoeg vergelijkingen om, bij gekozen p en T, de samenstelling van elke phase te berekenen, want we hebben $n + n(l-1) = nl$ vergelijkingen met nl onbekenden x_1, $y_1 \ldots x_2$, $y_2, \ldots$, waarbij dus p en T als onafhankelijk veranderlijk kunnen beschouwd worden.

We hebben dus inderdaad, onafhankelijk van het aantal phasen

(als $l < n$), een „bivariant stelsel bij constante totaalsamenstelling".

2. Voor een bivariant stelsel, bestaande uit n componenten in l phasen ($l \leqq n$) zullen we nu een verband opsporen tusschen de druk- en temperatuurcoëfficiënten voor den overgang der componenten uit de ééne phase in eene andere en de warmte-effecten en volumeveranderingen, die deze overgangen met zich meebrengen.

De samenstelling der verschillende phasen stellen we voor als boven. De ζ-functie van het stelsel stellen we voor door Z, de entropie door H, het volume door V; deze grootheden voor de afzonderlijke phasen noemen we Z_1, H_1, V_1, enz.; we hebben dan:

$$Z = Z_1 + Z_2 \ldots\ldots + Z_l.$$
$$V = V_1 + V_2 \ldots\ldots + V_l.$$
$$H = H_1 + H_2 \ldots\ldots + H_l.$$

Deze grootheden zijn gegeven als functies van p en T en verder van $x_1, y_1 \ldots, x_2, y_2, \ldots$ enz., waarbij alleen p en T onafhankelijk veranderlijk. Wat de notatie betreft, zij het volgende opgemerkt: een partiëele differentiatie naar één onafhankelijk veranderlijke, waarbij de andere onafhankelijk veranderlijke alleen constant gedacht wordt (waarbij dus steeds evenwicht heerscht) zullen we aangeven door een streep boven het differentiaalquotiënt; een partiëele differentiatie naar één veranderlijke, waarbij alle andere veranderlijken constant gedacht worden (waarbij geen heterogeen evenwicht behoeft te heerschen) zullen we zonder streep of indices schrijven.

De gezochte betrekkingen kunnen we afleiden, gelijk we dat in een vorige mededeeling in een analoog geval deden, door de vergelijkingen (2) partiëel eerst naar p, dan naar T te differentiëeren en dan na vermenigvuldiging met geschikte factoren, te sommeeren. De volgende methode is echter korter en, geloof ik, eleganter.

Wij gaan uit van de eenvoudige, zuiver analytische betrekking:

$$\overline{\frac{\partial^2 Z}{\partial T \partial p}} = \overline{\frac{\partial^2 Z}{\partial p \partial T}},$$

die we kunnen schrijven:

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial T}} = -\overline{\frac{\partial H}{\partial p}} \text{ of } \overline{\frac{\partial V}{\partial T}} + \overline{\frac{\partial H}{\partial p}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nu is

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial T}} = \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\left(\overline{\frac{\partial x_1}{\partial T}}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(\overline{\frac{\partial x_2}{\partial T}}\right) \cdots + \frac{\partial V}{\partial y_1}\left(\overline{\frac{\partial y_1}{\partial T}}\right) + \frac{\partial V}{\partial y_2}\left(\overline{\frac{\partial y_2}{\partial T}}\right) + \cdots \quad (4)$$

en

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial p}} = \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial x_1}\left(\overline{\frac{\partial x_1}{\partial p}}\right) + \frac{\partial H}{\partial x_2}\left(\overline{\frac{\partial x_2}{\partial p}}\right) + \cdots \frac{\partial H}{\partial y_1}\left(\overline{\frac{\partial y_1}{\partial p}}\right) + \frac{\partial H}{\partial y_2}\left(\overline{\frac{\partial y_2}{\partial p}}\right) + \ldots (5)$$

Verder is

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial V_1}{\partial T} + \frac{\partial V_2}{\partial T} + \dots \frac{\partial V_l}{\partial T}$$

en

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H_1}{\partial p} + \frac{\partial H_2}{\partial p} + \dots \frac{\partial H_l}{\partial p}$$

Daar nu voor een willekeurige phase (k)

$$\frac{\partial V_k}{\partial T} + \frac{\partial H_k}{\partial p} = 0\,,$$

omdat

$$\frac{\partial V_k}{\partial T} = \frac{\partial^2 Z_k}{\partial T \partial p} \text{ en } \frac{\partial H_k}{\partial p} = - \frac{\partial^2 Z_k}{\partial p \partial T},$$

hebben we ook

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Sommeeren we dus (4) en (5) en letten we op (3), dan resulteert er:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x_1}\left(\overline{\frac{\partial x_1}{\partial T}}\right) + \frac{\partial H}{\partial x_1}\left(\overline{\frac{\partial x_1}{\partial p}}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(\overline{\frac{\partial x_2}{\partial T}}\right) + \frac{\partial H}{\partial x_2}\left(\overline{\frac{\partial x_2}{\partial p}}\right) + \dots \\ \dots + \frac{\partial V}{\partial y_1}\left(\overline{\frac{\partial y_1}{\partial T}}\right) + \frac{\partial H}{\partial y_1}\left(\overline{\frac{\partial y_1}{\partial p}}\right) + \frac{\partial V}{\partial y_2}\left(\overline{\frac{\partial y_2}{\partial T}}\right) + \frac{\partial H}{\partial y_2}\left(\overline{\frac{\partial y_2}{\partial p}}\right) + \dots = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Nu blijkt uit de vergelijkingen (1):

$$\overline{\frac{\partial x_1}{\partial T}} = - \overline{\frac{\partial x_2}{\partial T}} - \overline{\frac{\partial x_3}{\partial T}} \dots - \overline{\frac{\partial x_l}{\partial T}}$$

$$\overline{\frac{\partial x_1}{\partial p}} = - \overline{\frac{\partial x_2}{\partial p}} - \overline{\frac{\partial x_3}{\partial p}} \dots - \overline{\frac{\partial x_l}{\partial p}},$$

terwijl dergelijke uitdrukkingen voor de grootheden y_1 enz. af te leiden zijn.

Substitueeren we deze uitdrukkingen in (6), dan komt er:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\overline{\frac{\partial x_2}{\partial T}} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_1}\right)\overline{\frac{\partial x_2}{\partial p}} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2} - \frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\overline{\frac{\partial y_2}{\partial T}} + \left(\frac{\partial H}{\partial y_2} - \frac{\partial H}{\partial y_1}\right)\frac{\partial y_2}{\partial p} + \dots = 0$$

Hierin stelt $\frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1}$, $\left(\text{wat hetzelfde is als } \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)$, voor: de volumetoename bij den overgang van één mol. van den component (x) uit een oneindig groote hoeveelheid der eerste phase in een oneindig groote hoeveelheid der tweede phase, bij constante p, T en overige componenten; deze volumevergrooting stellen we voor door V_{x12}.

$\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_1}$ stelt voor: de warmteopname bij dezelfde verandering, gedeeld door T; dit warmte-effect stellen we voor door Q_{x12}; voor de overeenkomstige verschillen voor de andere phasen en andere componenten kunnen we analoge notaties gebruiken; dan krijgen we:

$$\left. \begin{array}{l} V_{x12} \overline{\frac{\partial x_2}{\partial T}} + \frac{Q_{x12}}{T} \overline{\frac{\partial x_2}{\partial p}} + V_{x13} \overline{\frac{\partial x_3}{\partial T}} + \frac{Q_{x13}}{T} \overline{\frac{\partial x_3}{\partial p}} + \ldots \\ \quad + \ldots V_{y12} \overline{\frac{\partial y_2}{\partial T}} + \frac{Q_{y12}}{T} \overline{\frac{\partial y_2}{\partial p}} + \ldots = 0. \end{array} \right\} \quad . \; . \quad (7)$$

En dit is een betrekking, die we trachtten op te sporen. We kunnen uit (6) nog l—1 andere dergelijke betrekkingen afleiden, waarin telkens de druk- en temperatuurcoëfficiënten voor de bestanddeelen van één der l—1 volgende phasen niet optreden.

Andere, minder symmetrische betrekkingen krijgen we, als we voor den eenen component de coëfficiënten voor één der phasen elimineeren, voor een tweeden component zijne coëfficiënten voor een andere phase.

Komt een component in één der phasen niet voor, dan verdwijnen de betreffende coëfficiënten.

Opmerking 1. Bevat één der phasen alle componenten en zijn de andere phasen alle zuivere componenten, dan hebben we het geval, waarvoor we in de vorige mededeeling de „uitgebreide wet van Braun" bewezen hebben. Voeren we deze condities in (6) in, dan resulteert inderdaad de vroeger bewezen wet. De controle kunnen we wel aan den lezer overlaten.

Opmerking 2. De warmte-effecten en volume-vermeerderingen, die in (7) optreden hebben een waarde onafhankelijk van de totaalsamenstelling, als we n componenten in n phasen hebben; hun waarde is functie der totaalsamenstelling als het aantal phasen kleiner is dan n, dus als het evenwicht slechts „bivariant bij constante totaalsamenstelling" is.

Opmerking 3. We hebben in onze beschouwingen weer nergens gebruik gemaakt van de wijze, waarop Z expliciet afhangt van de samenstelling. De resultaten gelden dus weer ook bij reageerende componenten.

Opmerking 4. De hier ontwikkelde gedachtengang leidt bij homogeen evenwicht tot een overeenkomstige formule. Hierover in een volgende mededeeling.

Katwijk a. d. Rijn, Augustus 1919.

Physiologie. — De Heer MAGNUS biedt eene mededeeling aan van den Heer J. W. LE HEUX: „*De afhankelijkheid der werking van atropine op den darm van diens cholinegehalte*".

(Mede aangeboden door den Heer PEKELHARING).

De werking van atropine op den intacten en geisoleerden dunnedarm van zoogdieren heeft herhaaldelijk punt van onderzoek uitgemaakt, zonder dat evenwel een verklaring gegeven kon worden van de wisselende en dikwijls zeer uiteenloopende resultaten, welke door de verschillende onderzoekers verkregen werden. [1])

Terwijl aanvankelijk door MAGNUS [2]) gevonden was, dat de geisoleerde darm van de kat, die zich in RINGER's vloeistof bevindt, door groote doses atropine (0.3 $^0/_0$) verlamd wordt, doch op middelmatige hoeveelheden atropine (0.025—0.075 $^0/_0$) meestal met prikkelingsverschijnselen reageert, waarbij tevens de slingerbewegingen, welke de darm uitvoert meer regelmatig worden en wel vooral dan, wanneer de bewegingen van den darm te voren zwak waren, constateerde UNGER [3]) buitendien nog een remmende werking van zeer geringe atropinedoses (0.005—0.05 $^0/_0$). Door andere onderzoekers werd deze laatste (verlammende) werking nu eens wel dan weer niet gevonden.

Bij den geisoleerden dunnedarm van konijnen en honden nam KRESS [4]) prikkeling door middelmatige, verlamming door groote hoeveelheden atropine waar, terwijl door anderen zeer wisselende resultaten verkregen werden. In de meeste gevallen veroorzaakten bij den dunnedarm van konijnen kleine hoeveelheden atropine remming, terwijl middelmatige atropinedoses schijnbaar zonder eenige regelmaat nu eens den darm prikkelden dan weer verlammend werkten.

De intacte konijnedarm reageert volgens P. TRENDELENBURG [5]) regel-

[1]) Een uitgebreid literatuuroverzicht is door G. LILJESTRAND, Pflüger's Archiv. Bd. 175, pag. 111, 1919, gegeven.

[2]) R. MAGNUS, Versuche am überlebenden Dünndarm von Säugetieren. I. Mitt. Pflüger's Archiv. Bd. 108, pag. 1. 1905.

[3]) M. UNGER, Beiträge zur Kenntnis der Wirkungsweise des Atropins und Physostigmins auf den Dünndarm von Katzen. Pflüger's Archiv. Bd. 119, pag. 373, 1907.

[4]) K. KRESS, Wirkungsweise einiger Gifte auf den isolierten Dünndarm von Kaninchen und Hunden. Pflüger's Archiv. Bd. 109, pag. 608, 1905.

[5]) P. TRENDELENBURG, Physiol. u. Pharmacol. Untersuchungen über Dünndarmperistaltik. SCHMIEDEBERG's Archiv. Bd. 81, pag. 55, 1907.

matig op kleine quanta atropine met verlamming, doch op middelmatige hoeveelheden atropine nu eens met prikkeling- dan weer met verlammingsverschijnselen.

Een uitzondering op het onregelmatig gedrag van den darm der verschillende diersoorten tegenover atropine zou volgens TRENDELENBURG [1]) de dunnedarm van de cavia maken, welke regelmatig door atropine geremd wordt, een kwestie waarop we hier nader zullen terugkomen.

Uit dit korte overzicht blijkt voldoende het sterk wisselend en afwijkend gedrag van den darm van verschillende zoogdieren tegenover kleine en middelmatige hoeveelheden atropine, dat door de onderscheidene onderzoekers geconstateerd is onder de blijkbaar incongruente omstandigheden, waaronder zij hun onderzoek deden.

Een verklaring te geven van deze elkaar tegensprekende resultaten is tot nu toe niet gelukt.

Uit onderzoekingen van v. LIDTH DE JEUDE [2]) bleek duidelijk, dat niet de verklaring gezocht moet worden in de verschillende samenstelling der voedingsvloeistoffen, waarin de geisoleerde darm werd onderzocht.

LILJESTRAND [3]) toonde aan, dat evenmin de wisselende samenstelling der gebruikte atropinepraeparaten de oorzaak der afwijkende resultaten kon zijn; veel meer komt hij tot de slotsom, dat in den toestand van den darm zelf de verklaring gezocht moet worden; een opvatting welker juistheid ik hier zal trachten te bewijzen.

WEILAND [4]) heeft aangetoond, dat uit de geisoleerde maag, dunnedarm en dikkedarm van verschillende diersoorten door uittrekken met water een coctastabiele stof geextraheerd kan worden, welke de eigenschap heeft de beweging van den darm aan te zetten, en dat deze prikkelende werking door kleine hoeveelheden atropine antagonistisch wordt opgeheven. Later bleek ons [5]) dat deze stof althans voor het grootste gedeelte uit choline bestaat en in zulk een hoeveelheid uit den dunnedarm van het konijn verkregen kan worden, dat aan haar een belangrijke rol bij het tot stand komen der automatische darmbewegingen moet worden toegekend.

---

[1]) P. TRENDELENBURG, l.c.

[2]) A. P. v. LIDTH DE JEUDE, Quantitatieve onderzoekingen over het antagonisme van sulfas atropini enz. Diss. Utrecht 1916.

[3]) G. LILJESTRAND, l.c.

[4]) WEILAND, Zur Kenntnis der Entstehung der Darmbewegung. Pflüger's Archiv. Bd. 147, pag. 171, 1912.

[5]) J. W. LE HEUX, Cholin als Hormon der Darmbewegung. Pflüger's Archiv. Bd. 173, pag. 8, 1918.

Pharmacologisch nu behoort choline tot de groep van het pilocarpine; de prikkelende werking die choline, evenals pilocarpine op den darm uitoefent wordt door geringe hoeveelheden atropine antagonistisch opgeheven.

Volgens waarnemingen van v. LIDTH DE JEUDE[1]) zijn de hoeveelheden atropine, welke noodig zijn om de pilocarpinewerking op den darm antagonistisch op te heffen, zeer gering; reeds een concentratie atropine van 1 op 10—50 millioen is hiertoe in staat. Van gelijke grootteorde (1 : 40 millioen) nu bleek bij mijn onderzoek de atropine-concentratie te zijn, welke een voorbijgaande remming der darmbewegingen tot stand brengt.

Brengen we deze feiten met elkaar in verband, dan kunnen we ons de vraag voorleggen of niet de remmende werking van kleine atropinedoses als eene antagonistische tegen het in den darmwand aanwezige choline moet worden opgevat.

Is deze opvatting juist, dan zal de remmende werking van kleine hoeveelheden atropine, wanneer te voren het choline door uitwasschen uit den darmwand verwijderd is, niet meer mogen optreden, doch zal na bijvoegen van choline weer op toedienen van atropine te voorschijn treden.

Afgezien van deze zoo juist besproken remmende werking van kleine hoeveelheden is de feitelijke werking van atropine volgens de onderzoekingen van MAGNUS[2]) een den plexus van AUERBACH prikkelende. Eerst zeer groote hoeveelheden verlammen de zenuwcentra, zenuwen en spieren van den darmwand.

De werking dezer laatste hoeveelheden blijft hier buiten beschouwing.

Bewijsmateriaal voor de bovenstaande onderstelling zal nu op de volgende wijze kunnen worden geleverd.

1°. Zal een darm, welke oorspronkelijk door kleine hoeveelheden atropine geremd wordt, door herhaald uitwasschen, waardoor choline aan den darmwand onttrokken wordt, in een toestand gebracht moeten worden, waarin een kleine hoeveelheid atropine geen effect meer heeft.

2°. Zal bij dezen darm na toedienen van choline het oorspronkelijk atropine-effect weer te voorschijn moeten treden.

3°. Zal een darm, welke oorspronkelijk op middelmatige hoeveelheden atropine met remming reageert door herhaald uitwasschen in

---

1) A. P. v. LIDTH DE JEUDE, l.c.

2) R. MAGNUS, Versuche am überlebenden Dünndarm von Saugetieren. V. Mitt. Pflüger's Archiv. Bd. 108, pag. 1, 1905.

een toestand gebracht moeten worden, waarin dezelfde hoeveelheid atropine enkel prikkeling geeft.

De proeven om dit te bewijzen werden verricht met de geïsoleerde dunnedarmen van konijnen en caviae, die zooals ons vroeger gebleken was rijkelijke hoeveelheden choline bevatten en deze — naar verwacht mocht worden — betrekkelijk gemakkelijk aan de vloeistof, waarin ze bewaard werden, afgeven.

Proeven met den dunnedarm van het konijn.

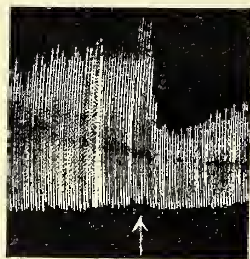
Bij de proeven met den dunnedarm van het konijn deed zich aanvankelijk het bezwaar voor, dat na eenige dagen tegelijk met het wegwasschen van het choline ook de spontane bewegingen minder werden, waardoor minder goede curven verkregen werden. Gebruik makende van de ervaring van LAQUEUR [1]), dat darmlissen, welke in paardeserum bij lage temperatuur bewaard worden, gedurende dagenlang hun motiliteit behouden, werd nu de gang van het onderzoek als volgt.

Van den verschen, zorgvuldig met Tyrode vloeistof gereinigden dunnedarm werden willekeurig enkele lissen afgesneden en hiervan de bewegingen volgens de door MAGNUS aangegeven methode geregistreerd. De vaten waarin de darmlissen zich bevonden bevatten 75 c.c. Tyrode vloeistof van 38° C.

Werden hierbij kleine hoeveelheden atropine gevoegd (0.002—0.01 mgr.) dan werden zonder uitzondering de slingerbewegingen der darmlissen kleiner.

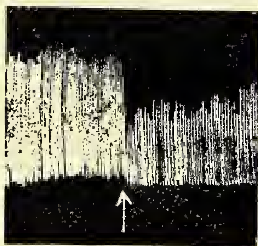
Fig. 1 geeft hiervan een voorbeeld.

Fig. 1.



0.01 Atropine

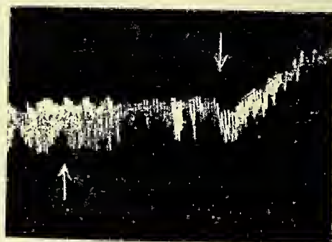
Fig. 2.



15 mg. Atropine

Fig. 3.

15 mg. Atropine



0.01 Atropine

[1]) E. LAQUEUR, Over den levensduur van geisoleerde zoogdier-organen met automatische functie. Kon. Akademie v. Wetenschappen te Amsterdam. Verslag vergadering wis- en natuurk. afdeeling van 24 April 1914, XXII, pag. 1318.

Fig. 1.

Slingerbewegingen van den dunnedarm van het konijn onmiddellijk na het dooden van het dier opgespannen. Door toedienen van 0.01 mgr. atropine wordt de grootte der bewegingen tot op de helft teruggebracht.

Fig. 2.

De darmlis, waarvan de bewegingen hier zijn opgeteekend, is dezelfde als in fig. 1. Door 3 maal uitwasschen met Tyrode vloeistof is de voorafgegane werking van de atropine (0 01 mgr.) volkomen verwijderd. 15 mgr. atropine geeft nu sterke remming der bewegingen met geringe daling van den tonus.

Fig. 3.

Een darmlis van denzelfden darm, welke gedurende 3 maal 24 uur in de ijskast in herhaaldelijk ververscht paardeserum bewaard is. De darmlis is daarna 8 maal met warme Tyrode vloeistof uitgewasschen en reageert nu niet meer op 0.01 mgr. atropine. Na 15 mgr. atropine treedt een krachtige prikkeling met sterke toename van den tonus op.

Hierna werden driemaal om de 10 minuten de darmlissen met versche Tyrode vloeistof uitgewasschen, waardoor, zooals ons uit eigen ervaring bekend is, het, door de voorafgegane kleine atropinegift teweeggebrachte, effect weer volkomen wordt uitgewischt.

Werd nu vervolgens een middelmatige dosis (15 mgr.) atropine bijgevoegd, dan werden in verreweg de meeste gevallen de slingerbewegingen aanzienlijk kleiner, gepaard gaande met een meer of minder sterke daling van den tonus.

Een voorbeeld hiervan geeft fig. 2.

In enkele gevallen volgde op de aanvankelijke remming, welke deze middelmatige hoeveelheid atropine teweegbracht een meer of minder sterke prikkeling. Dit was het geval, wanneer de darmlis reeds *meerdere* malen was uitgewasschen, waardoor de darm in een stadium is gekomen, waarin de remmende werking van middelmatige atropinedoses in een prikkelende overgaat.

Van den darm, welke gedurende den nacht in paardeserum bij lage temperatuur was bewaard, werden den volgenden dag weer eenige lissen genomen en, na zorgvuldig van aanhangend serum te zijn bevrijd, als boven opgespannen.

Deze lissen werden nu alle, iedere tien minuten, met versche Tyrode vloeistof uitgewasschen. Een der lissen, en hiervoor diende steeds dezelfde, werd als object gebruikt om na te gaan of door 0.01 mgr. atropine nog remming der bewegingen werd teweeggebracht. Was dit niet meer het geval, dan werden de andere darmlissen nogmaals eenige keeren uitgewasschen en op haar gedrag tegenover atropine onderzocht.

In verreweg de meeste gevallen veroorzaakte nu ook hierbij een

kleine hoeveelheid atropine (0.01 mgr.) niet de minste verandering in de bewegingen of in den tonus, doch trad na toediening van 15 mgr. atropine een prikkeling der darmbewegingen met sterke verhooging van den tonus op. Zie fig. 3.

Bovendien kon in dit stadium de oorspronkelijke remmende werking van de atropine weer te voorschijn gebracht worden, wanneer te voren een kleine hoeveelheid choline (1—2 mgr.) bij de darmlis gevoegd werd.

Niet steeds gelukte het reeds den tweeden dag dit stadium te bereiken, doch was het noodig den darm eenige dagen langer in herhaaldelijk ververscht paardeserum te laten, om daarna door herhaald uitwasschen met Tyrode vloeistof den toestand te verkrijgen, waarin de darm door kleine doses atropine onbeinvloed blijft.

Ook zonder gebruik te maken van paardeserum als vloeistof, waarin de darm bewaard wordt, gelukt het door uitwasschen met enkel Tyrode vloeistof den darm in den gewenschten toestand te brengen, hoewel, zooals reeds boven vermeld, de bewegingen dan na eenige dagen kleiner worden en minder fraaie curven verkregen worden. Bewezen wordt hierdoor echter, dat door het gebruik van paardeserum de resultaten niet beinvloed zijn.

Voor den dunnedarm van het konijn is dus aangetoond:

1°. dat door herhaald uitwasschen, waardoor, zooals vroeger is aangetoond, choline aan den darmwand onttrokken wordt, een toestand verkregen wordt, waarin de aanvankelijk aanwezige remmende werking van kleine hoeveelheden atropine is opgeheven.

2°. dat door toedienen van choline deze remmende werking van atropine weer te voorschijn kan worden gebracht.

3°. dat de aanvankelijk wisselende, bij mijn proeven zich meest als een remming uitende, werking van middelmatige hoeveelheden atropine door herhaald uitwasschen van den darm in een constant prikkelende werking kan worden veranderd.

Proeven met den dunnedarm van de cavia.

Als tweede object voor dit onderzoek diende de dunnedarm van de cavia.

Kortgeleden heeft TRENDELENBURG [1]) een fraaie methode aangegeven, waarop men de peristaltische bewegingen van den overlevenden dunnedarm van de cavia graphisch kan registreeren en de werking,

[1]) P. TRENDELENBURG, l.c.

welke verschillende vergiften op deze bewegingen uitoefenen, tot op zekere hoogte in getallen kan uitdrukken.

Over de werking van atropine (op den dunnedarm van de cavia) geeft TRENDELENBURG op, dat deze *steeds* een de peristaltiek remmende zou zijn.

Bij ons onderzoek, waarbij het er op aankwam na te gaan of ook hier, evenals bij den dunnedarm van het konijn, de toestand waarin de darm verkeert, zijn gedrag ten opzichte van atropine beheerscht, hebben we in hoofdzaak de door TRENDELENBURG aangegeven methode gevolgd en zijn aldus te werk gegaan.

De cavia werd door een slag in den nek gedood, de dunnedarm voorzichtig van het mesenterium losgeknipt en herhaalde malen met warme vloeistof volgens LOCKE [1]) gereinigd. Vervolgens werd de darm in 5 stukken verdeeld, waarvan een stuk direct werd opgespannen, de andere stukken werden in afzonderlijke schaaltjes met LOCKE's vloeistof gelegd, welke vloeistof af en toe ververscht werd.

De darmlis, welke in een vat van 150 cc. inhoud was opgespannen, werd eerst eenigen tijd bij een binnendruk van 0 mM. H_2O aan zichzelf overgelaten, daarna werd langzaam de binnendruk verhoogd en bepaald bij welken druk voor de eerste maal peristaltiek optrad (kritische druk). De binnendruk werd daarna weer op 0 gebracht; na 3 minuten werd opnieuw de kritische druk bepaald.

Deze bepaling werd herhaald nadat successievelijk 0.1, 1, en 5 mgr. atropine was toegevoegd. In overeenstemming met de opgave van TRENDELENBURG was remming der peristaltiek opgetreden, zoodat nu bij zelfs aanzienlijk hoogeren binnendruk geen peristaltiek meer optrad.

Na zorgvuldige reiniging van het apparaat werd nu een tweede darmlis opgespannen, welke eenige uren in LOCKE's vloeistof bewaard was, en hiermede dezelfde bepalingen herhaald voor en na toedienen van atropine. In de meeste gevallen bleek nu de kleine atropinedosis reeds een veel geringere remming der peristaltiek te geven als bij de eerste darmlis.

Daarna werd weer een volgende darmlis onderzocht, die weer eenige uren langer in LOCKE's vloeistof bewaard was gebleven en eenige malen meer was uitgewasschen, enz.

Een overzicht van een volledige proef geeft tabel I.

Uit deze tabel ziet men dat de darm, die aanvankelijk door hoeveelheden van 0.1, 1 en 5 mgr. atropine volledig geremd wordt na 2.5 uur uitwasschen met LOCKE's vloeistof reeds in een toestand

---

[1]) Van groot belang is het, dat de vloeistof uit zuivere zouten en met zuiver, uit glazen apparaten gedistilleerd, water bereid wordt.

gebracht is, waarin 0.1 en 1 mgr. atropine reeds een *veel minder* sterke remming geven.

Nadat het uitwasschen 6 uur is voortgezet is van een remmende

TABEL I.

Nummer der darmlis.	duur van het uitwasschen.	Kritische binnendruk in mM H_2O.			
		normaal.	na 0.01 mgr. atropine.	na 1 mgr. atropine.	na 5 mgr. atropine.
1	0	7	remming	remming	remming
2	2.5	20	25	30	remming
3	6	20	16	20	20 (levendige slingerbew.
4	8	12—16	13	—	—
5	11	10	7	—	—

werking dezer atropinehoeveelheden geen sprake meer, daarentegen treedt nu na 0.1 mgr. atropine reeds bij lageren binnendruk als in de normaalperiode peristaltiek op. Ook bij de darmlissen, die 8 en 11 uur zijn uitgewasschen is een duidelijke prikkeling door atropine te constateeren, waardoor bij lageren binnendruk reeds peristaltiek optreedt.

Bij darmlis N°. 3 was tevens na 5 mgr. atropine een zeer sterke vermeerdering der slingerbewegingen merkbaar.

Hiermede is dus ook voor den dunnedarm van de cavia aangetoond, dat de remmende werking van atropine, welke TRENDELENBURG hierbij steeds constateerde, door uitwasschen kan worden opgeheven, en dat dan de eigenlijke atropinewerking, prikkeling van den plexus van AUERBACH door middelmatige hoeveelheden atropine te voorschijn treedt.

Begrijpelijk wordt het nu ook, waarom TRENDELENBURG steeds slechts de remmende werking van atropine waarnam, daar hij bij zijn onderzoekingen de darmlissen niet in vloeistof bewaarde, doch deze steeds opnieuw aan de met urethaan genarcotiseerde cavia ontnam.

De resultaten uit dit onderzoek verkregen stellen ons nu in staat de afwisselende werking van atropine op den darm uit een ander oogpunt te beschouwen en de elkaar tegensprekende waarnemingen der verschillende onderzoekers te verklaren.

In den darmwand komt gedurende het leven choline in zulke hoeveelheden voor, dat zij den plexus van AUERBACH in prikkelingstoestand brengen. Wordt door herhaald uitwasschen choline uit den overlevenden darm in meerdere of mindere mate verwijderd, dan komt bij zoo'n darm de eigenlijke werking van de atropine zuiver voor den dag. Zij bestaat volgens de vroegere onderzoekingen van

Magnus[1]) in een prikkeling van den plexus van Auerbach door middelmatige hoeveelheden, terwijl eerst zeer groote doses de centra, zenuw en spier verlammen.

Kleine hoeveelheden atropine beïnvloeden de darmbewegingen primair niet.

Afhankelijk van de aanwezigheid van meer of minder choline in den darmwand zal nu het resultaat der atropinewerking verschillend kunnen zijn.

Choline werkt prikkelend op den plexus van Auerbach, zijne werking laat zich door atropine antagonistisch beïnvloeden. Zoolang dus een voldoende hoeveelheid choline in den darmwand aanwezig is, zal dus een kleine dosis atropine de werking van het choline antagonistisch beïnvloeden en daardoor de darmbewegingen remmen.

Het resultaat der werking van middelmatige hoeveelheden atropine zal daarvan afhangen, of de directe prikkelende werking op den plexus, of de antagonistische werking tegen choline de overhand heeft. Bevat de darm weinig choline dan treedt de prikkelende werking op den voorgrond, bevat hij veel choline dan overweegt de antagonistische (remmende) werking. Bij een middelmatig gehalte aan choline zal op een aanvankelijke remming een prikkeling kunnen volgen.

Ook de resultaten van vroegere onderzoekers kunnen nu verklaard worden.

Dat bij den dunne darm van de kat de prikkelende werking van middelmatige hoeveelheden atropine vaker zich voordoet als bij den konijne- en caviadarm stemt met onze ervaring overeen, dat de eerste minder choline bevat dan de beide laatste.

Anderzijds is het begrijpelijk dat bij den caviadarm, dien we steeds rijk aan choline vonden, regelmatig de remmende werking van atropine te voorschijn treedt.

Ook kunnen we nu inzien, waarom de geïsoleerde konijnedarm afhankelijk van de voorafgegane behandeling nu eens door atropine geremd, dan weer geprikkeld wordt, terwijl de intacte darm, waarbij geen uitwasschen van choline kan plaats gehad hebben, volgens Trendelenburg[2]) regelmatig geremd wordt.

Samenvatting.

We hebben vroeger aangetoond, dat de geïsoleerde dunnedarm aan zoutoplossingen hoeveelheden choline afgeeft, welke in staat zijn op den plexus van Auerbach prikkelend te werken.

[1]) R. Magnus, l.c.

[2]) P. Trendelenburg, l.c.

Met dit verlies aan choline gaat gepaard een veranderd gedrag van den darm tegenover atropine.

De dunnedarm van het konijn, welke voor het uitwasschen door kleine giften atropine geremd wordt, reageert nu niet meer hierop, doch wordt nu door middelmatige doses geprikkeld.

De normale caviadarm wordt door atropine steeds geremd. Na uitwasschen verdwijnt ook hierbij deze werking, om plaats te maken voor eene prikkeling door middelmatige hoeveelheden atropine.

De verklaring hiervoor is nu deze: de feitelijke werking van middelmatige hoeveelheden atropine op den darm is prikkeling van den plexus van Auerbach; bevat de darm veel choline en bevindt zich hierdoor de plexus in sterken prikkelingstoestand dan wordt door een kleine hoeveelheid atropine deze prikkeling „antagonistisch" opgeheven, eventueel verminderd, en het resultaat is remming.

Middelmatige hoeveelheden atropine werken evenzeer remmend, wanneer deze antagonistische werking sterk genoeg is, doch bij aanwezigheid van geringe hoeveelheden choline in den darm zal deze geprikkeld worden.

We hebben hier dus een geval, waarbij de aanwezigheid van een bekende chemische stof (choline) in het weefsel bepaalt, op welke wijze dit op een gift (atropine) reageert.

Utrecht, September 1919. *Pharmacologisch Instituut der Rijksuniversiteit.*

Physiologie. — De Heer MAGNUS biedt een mededeeling aan van de Heeren A. DE KLEIJN en C. R. J. VERSTEEGH: *„Over de al of niet labyrinthaire genese van den donkernystagmus bij honden".*

(Mede aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER).

Na een uitgebreid klinisch onderzoek bij mijnwerkers is OHM tot de conclusie gekomen, dat de, bij deze menschen veel optredende nystagmus, van labyrinthairen oorsprong is.

Door de ontdekking van RAUDNITZ, dat bij honden na een tijdlang verblijf in het donker, nystagmus optreedt, is het OHM mogelijk geworden voor zijn genoemde conclusie experimenteel bewijzen aan te voeren,

Hij gaat hierbij uit van de onderstelling „dass der bei jungen Hunden durch Dunkelheit hervorgerufene Nystagmus in bezug auf Ablauf, Ausschlag und Dauer der Zuckung, den Einflusz von Ruhe und Bewegung mit dem Augenzittern der Bergleute vollkommen übereinstimmt".

In verschillende mededeelingen beschrijft hij dan enkele proeven, waarbij hij geprobeerd heeft dubbelzijdige labyrinthexstirpatie te verrichten bij honden met bestaanden donkernystagmus.

Als regel is hem dit zooals uit proeven blijkt niet gelukt. Een maal echter schijnt het hem gelukt te zijn. Het proefdier vertoonde hierna geen donkernystagmus meer, was echter zoo slap dat het eenige uren daarna overleed.

Hieruit trekt OHM de twijfelachtige conclusie, dat de labyrinthaire oorsprong van den donkernystagmus experimenteel bewezen is.

Met behulp van een betere methode van labyrinthexstirpatie is het ons echter gelukt aan te toonen dat:

De donkernystagmus bij jonge honden (RAUDNITZ, OHM) *niet van labyrinthairen oorsprong is.*

Gebleken is dat:

1°. Na dubbelzijdige labyrinthexstirpatie de bestaande donkernystagmus nog blijft voortduren.

2°. Na dubbelzijdige labyrinthexstirpatie nog donkernystagmus is op te wekken.

Fig. 1 geeft dezen nystagmus in curve gebracht weer en we zien

in deze curve den typischen donkernystagmus afgewisseld door enkele spontane groote oogbewegingen.

De registratie is verricht door een draad door de ongevoelig gemaakte cornea te hechten en zoodoende de beweging op een hefboom over te brengen.

3°. De donkernystagmus verhoudt zich t.o. van een bijgevoegden vestibulairen nystagmus anders dan een vestibulaire nystagmus. Voeren we nl. een hond met bestaanden donkernystagmus een vestibulairen prikkel toe, welke eenen vestibulairen nystagmus geeft, dan zien we deze twee nystagmusvormen naast elkaar voortbestaan, zonder op elkaar in te werken.

Voeren we echter aan eenen bestaanden vestibulairen nystagmus (b.v. calorische) eenen tweeden vestibulairen nystagmus, (b.v. draainystagmus) toe, dan zien we de eerste nystagmus-uitslagen wel iets

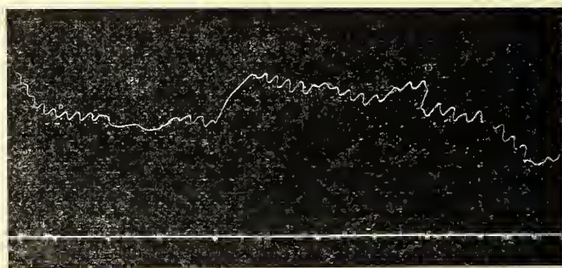


Fig 1.

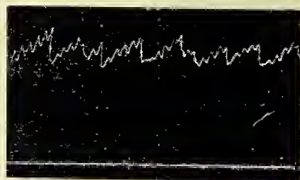


Fig 2.

onregelmatig en verschillend van grootte worden, men krijgt echter den indruk met een resulteerende werking te doen te hebben.

Fig. 2 geeft het typische voorbeeld weer van wat we noemen de combinatie van donkernystagmus en calorischen nystagmus. De kleine slagen zijn van den rustig verder gaanden donkernystagmus; de groote golven zijn gevolg van de oogbewegingen opgewekt door één oor met koud water uit te spuiten.

In hoeverre Ohm dus recht heeft om de oorzaak van de mijnwerkersnystagmus in het labyrinth te zoeken kan hier niet uitgemaakt worden; zeker is zijn meening, dat de donkernystagmus bij honden van labyrinthairen oorsprong is, onjuist.

Utrecht. (*Pharmacologisch Instituut der Rijksuniversiteit*).

Physiologie. — De Heer MAGNUS biedt eene mededeeling aan van den Heer W. STORM VAN LEEUWEN en Mej. M. V. D. MADE: „*Onderzoekingen over scopolamine-morphine-narcose*".

(Mede aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER).

Nadat SCHNEIDERLIN[1]) in 1900 de scopolamine-morphine-narcose in de praktijk heeft ingevoerd, is veel over dit onderwerp gewerkt en geschreven. Een van de belangrijkste punten, die daarbij naar voren kwamen, was de vraag of bij het toedienen van een mengsel dezer beide vergiften „potentieering" optreedt. Onder potentieering verstaat men, volgens BÜRGI, het verschijnsel, dat een mengsel van twee vergiften soms een sterkere werking uitoefent dan op grond van de werking van de samenstellende deelen kon worden verwacht. Over de vraag of bij het mengsel scopolamine-morphine potentieering optreedt is experimenteel werk verricht door HAUCKOLD[2]) bij konijnen, door KOCHMANN[3]) bij honden en door SCHNEIDERLIN bij menschen. HAUCKOLD injiceerde subcutaan bij konijnen respectievelijk morphine, scopolamine en morphine + scopolamine en vond daarbij een potentieering. Hij deelde o. a. mede, dat 5 mgr. morphine + 0.5 mgr. scopolamine per KG. bij het konijn narcose kan veroorzaken, terwijl 10 mgr. morphine en 200 mgr. scopolamine, alleen ingespoten, geen narcoseverschijnselen gaven. HAUCKOLD besloot hieruit, dat, hoewel scopolamine op zichzelf bij het konijn niet narcotisch werkt, het toch in staat is een niet narcotische morphinegift werkzaam te maken. Deze vondst bleek echter op een onjuiste waarneming te berusten. Want ten eerste hebben wij met een hieronder te vermelden methode aangetoond, dat zoowel 0.5 mgr. scopolamine als 5 mgr. morphine bij het konijn wel degelijk narcotisch werken en ten tweede vonden wij, ook wanneer wij HAUCKOLD's methode benutten, geen potentieering, maar een eenvoudige additie der werkingen.

HAUCKOLD spoot bij normale konijnen de scopolamine, de morphine

---

[1]) SCHNEIDERLIN. Eine neue Narkose. Ärztl. Mitt. aus u. für Baden. Mai 1900, geciteerd n. HAUCKOLD SCHNEIDERLIN. Die Skopolamin-Morphin-Narkose. Münch. Med. Wochenschr. 1903. N⁰. 9, pag. 371.

[2]) E. HAUCKOLD. Ueber die Beeinflussung von Narkoticis durch Skopolamin. Zeitschr. f. exp. Path. u. Ther. Bd. 7, pag. 743, 1910.

[3]) M. KOCHMANN. Ueber die therapeutischen Indikationen des Skopolaminum hydrobromicum. Die Therapie der Gegenwart. 1903, pag. 202.

en het mengsel scopolamine-morphine onderhuids in en ging dan na of al dan niet een narcose optrad. Wij hebben deze proeven herhaald, maar, aangezien — zooals ook HAUCKOLD aangeeft — het beoordeelen der narcosediepte bij konijnen moeilijk is, wijzigden wij eenigszins de techniek. Wij spoten n.l. steeds op een dag een heele serie van ca 20 konijnen met de verschillende vergiften in en zorgden dat alle injecties nagenoeg tegelijkertijd plaats vonden. Dan werd om het kwartier de toestand van de dieren beoordeeld en genoteerd, waarbij het steeds zoo ingericht werd, dat de beoordeelaar niet wist met welk vergift elk dier was ingespoten.

Op deze wijze deden wij de volgende proeven:

6 konijnen kregen 10 mgr. morphine per KG. subcutaan.

6 konijnen kregen 1 mgr. scopolamine per KG. subcutaan.

6 konijnen kregen 5 mgr. morphine + 0.5 mgr. scopolamine per KG. subcutaan.

Alle dieren werden gedurende $2^1/_2$—3 uur regelmatig onderzocht en daarbij bleek dat 1 mgr. scopolamine slechts een zeer geringe narcotische werking uitoefent. De werking van 10 mgr. morphine was duidelijk; die van 0.5 mgr. scopolamine + 5 mgr. morphine was minder sterk, dan die van 10 mgr. morphine alleen; er was dus geen sprake van potentieering.

Nadat wij dit negatieve resultaat verkregen hadden, onderzochten wij de narcotische werking van scopolamine en morphine nog op een andere wijze. Bij gedecerebreerde konijnen werd een z.g. geïsoleerd rectus femoris praeparaat gemaakt en daarbij werd de invloed van morphine, van scopolamine en van morphine + scopolamine op den homolateralen buigreflex van het konijn onderzocht. Na een kleine technische verbetering bleek deze methode, die wij bij katten reeds herhaaldelijk hadden toegepast [1]), zich ook goed te leenen voor het onderzoek op konijnen.

De door faradischen prikkel bij de gedecerebreerde konijnen opgewekte reflexen werden op een kymographion geregistreerd, de op deze wijze verkregen curven van elke proef werden uitgemeten en het resultaat graphisch voorgesteld. Als voorbeeld wordt in fig. 1 de invloed van 5 mgr. morphine op den homolateralen buigreflex bij het konijn gegeven.

We hebben nu in deze proeven telkens bij series van 5 konijnen — wanneer gebleken was, dat de door prikkeling met dezelfde

[1]) W. STORM VAN LEEUWEN. Quantitatieve pharmakologische Untersuchungen über die Reflexfunktionen des Rückenmarks bei Warmblütern. I. Mitt. Pflügers Arch. Bd. 154, pag. 307, 1913. III. Mitt. Pflügers Arch. Bd. 165, pag. 84, 1916.

intensiteit opgewekte reflexen even groot waren — ingespoten 0.5 mgr. scopolamine of 5 mgr. morphine of 0.5 mgr. scopolamine + 5 mgr. morphine. In het laatste geval werd eerst de scopolamine gegeven en 20 minuten later de morphine. Het resultaat van de inspuitingen op de grootte der reflexen werd beoordeeld voor de

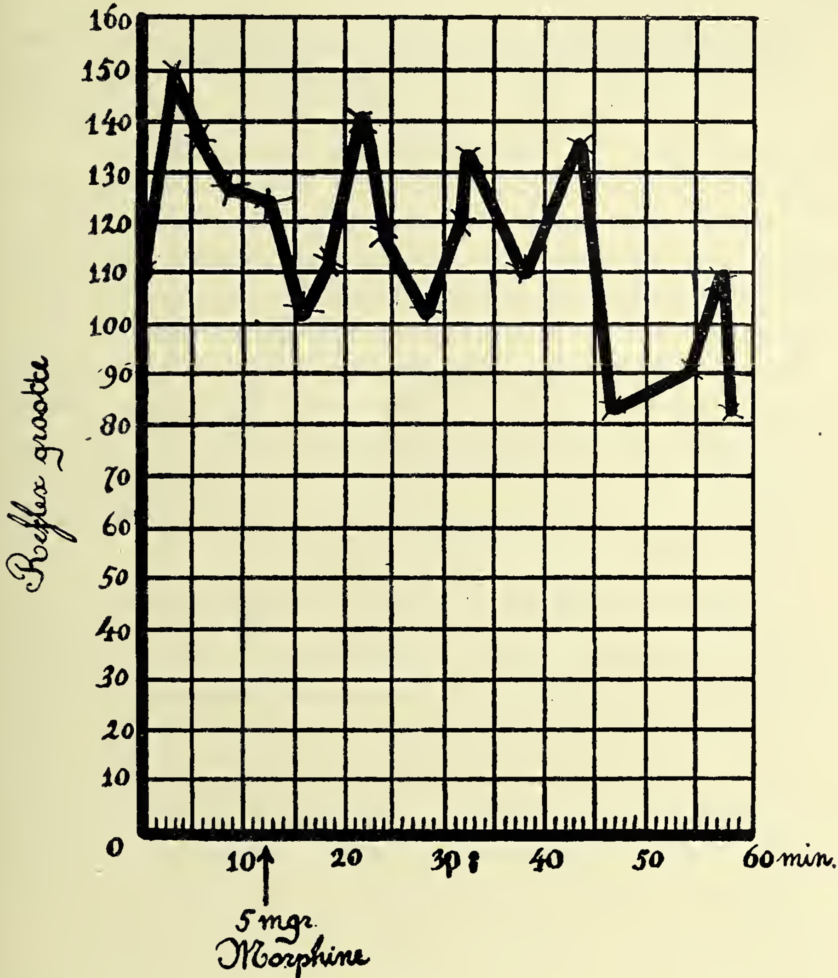


Fig. 1.

scopolamine na 40 minuten, voor het mengsel scopolamine + morphine 40 minuten na de scopolamine-injectie en voor de morphine na 20 minuten. In procenten uitgedrukt hadden nu de ingespoten vergiften den volgenden invloed op de grootte der reflexen:

0.5 mgr. scopolamine	geeft na	40 min.	een vermindering	van 37 %
5 mgr. morphine	,, ,,	20 ,,	,, ,,	,, 15 %
0.5 mgr. scop. + 5 mgr. morph.		40 ,,	,, ,,	,, 32 %

Deze getallen moeten nog gecorrigeerd worden. Uit een aantal controleproeven bleek, dat de reflexgrootte — wanneer geen ver-

gift wordt toegediend — na 40 minuten spontaan 9 °/₀ daalt en na 20 minuten 4 °/₀. Na deze correctie krijgt men de volgende waarden:

Na 0.5 mgr. scopolamine een vermindering van 28 °/₀

na 5 mgr. morphine een vermindering van 11 °/₀

na 0.5 mgr. scopolamine + 5 mgr. morphine een vermindering van 23 °/₀.

Hieruit is duidelijk, dat men ook bij deze wijze van werken zeker geen potentieering vindt, want het in de combinatie-proeven gevonden getal is niet hooger, maar lager dan de som van de werkingen van morphine en van scopolamine afzonderlijk.

Velen, o.a. HAUCKOLD nemen aan, dat kleine dosen scopolamine bij het konijn geen narcotische werking zouden hebben. Uit onze proeven is dus gebleken, dat 0.5 mgr, scopolamine een duidelijk narcotische werking heeft op de reflexgrootte. In proeven, die wij te zamen met Dr. G. LILJESTRAND deden, gingen wij den invloed na van verschillende dosen scopolamine op een ruggemergsreflex van het gedecerebreerd konijn. Hieruit bleek, dat deze narcotische werking bij stijgen der dosis niet voortdurend toeneemt, maar vrij spoedig een maximum bereikt en daarna zelfs weer daalt (zie fig. 2 getrokken lijn). Blijkbaar voegt zich bij hoogere dosen bij de narcotische werking van het vergift nog een prikkelende.

Men zou kunnen verwachten, dat in het algemeen wanneer van een vergift een twee maal grootere dosis gegeven wordt hierdoor ook een twee maal grootere werking wordt teweeg gebracht. Bij een aantal vergiften, o.a. bij vele der alcaloiden, is dit echter niet het geval. Brengt men de verhouding tusschen de dosis per K.G. dier en de werking van een dergelijk vergift in curve, zoodat op de abcis de dosen worden uitgezet en op de ordinaat de — in casu narcotische — werking, dan verkrijgt men een lijn, die in het aanvangsdeel steil en daarna bijna horizontaal verloopt. Duidelijk is het o.a. te zien in fig. 2 (gestippelde lijn) die ontleend is aan een mededeeling van LILJESTRAND, V. D. MADE en STORM VAN LEEUWEN [1]) en waar in de getrokken lijn de narcotische werking van scopolamine in verschillende dosen is in curve gebracht (concentratiewerkingscurve van scopolamine).

Behalve HAUCKOLD onderzocht ook KOCHMANN dit vraagstuk. Hij nam proeven op honden en meende daarbij een potentieerende werking gevonden te hebben. Daar wij noch met HAUCKOLD's methode, noch met de in ons instituut gebruikelijke methode (invloed op reflexen der gedecerebreerde dieren) een potentieering konden aantoonen, hebben wij ook KOCHMANN's proeven gecontroleerd.

Series van 3—6 honden werden daartoe subcutaan ingespoten met morphine of met scopolamine of met morphine + scopolamine. Alle dosen werden berekend per KG. dier.

---

[1]) LILJESTRAND, V. D. MADE en STORM VAN LEEUWEN. Zur Konzentrations-Wirkungskurve des Skopolamins. Verschijnt in Pflügers Arch. 1919.

In een eerste proef werkten we met dezelfde dosis, die KOCHMANN gebruikt had. KOCHMANN geeft nl. aan, dat 5 mgr. morphine en

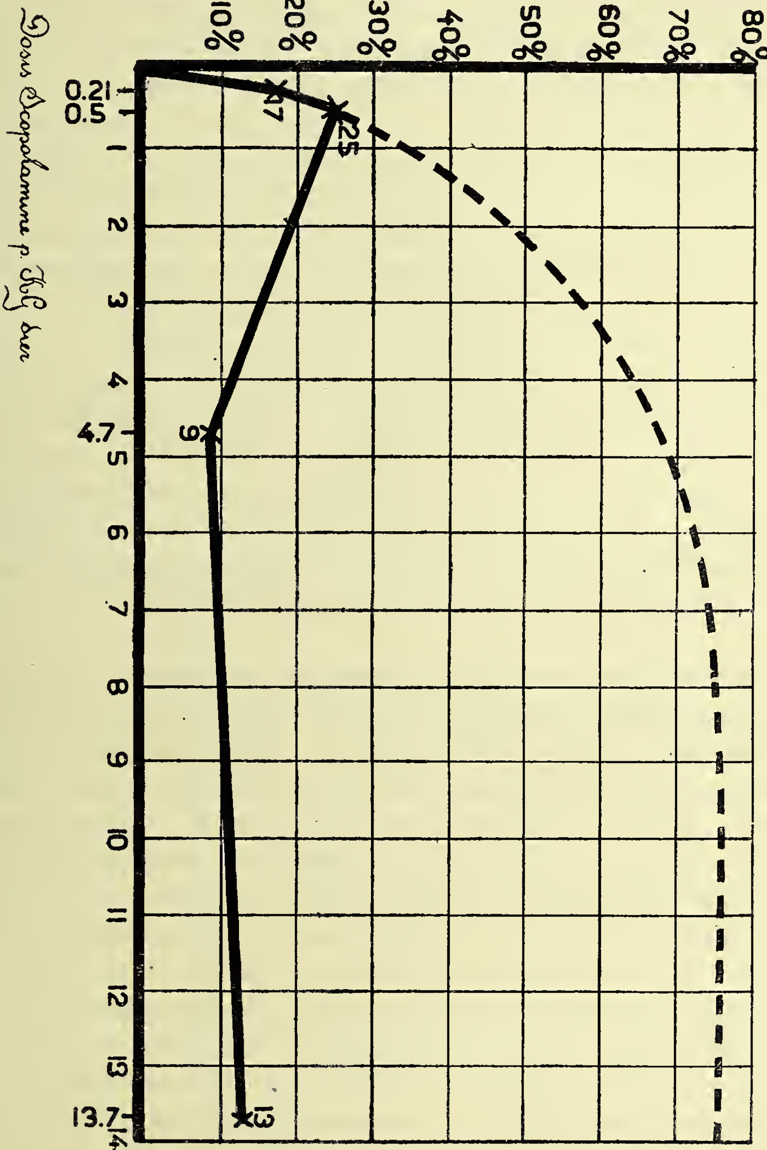


Fig. 2.

0.5 mgr. scopolamine (hoewel het in zijn stuk niet vermeld staat hebben wij aangenomen, dat hij zijn dosen per KG. dier opgegeven heeft) elk op zichzelf geen narcotische werking bij den hond uitoefenen, maar te zamen het dier in diepe narcose brengen. Hij heeft

dit overigens slechts in enkele gevallen waargenomen. In den beginne meenden wij zijn resultaten te kunnen bevestigen, want het bleek dat bij den hond 5 mgr. morphine + 0.5 mgr. scopolamine samen een even sterke werking uitoefenen als 10 mgr. morphine alleen, terwijl 0.5 mgr. scopolamine alleen eerder een prikkelende, dan een verlammende werking heeft. Bij nader qnderzoek bleek nu echter, dat de zaak toch anders is, want werd 5 mgr. morphine alleen gegeven (dus zonder scopolamine) dan was de werking daarvan evenmin te onderscheiden van die van 10 mgr. morphine. Deze vondst was aanleiding om de werking van verschillende dosen morphine op den hond te onderzoeken. Daarbij bleek, dat dosen beneden de 1.5 mgr. slechts een geringe of geen narcotische werking hebben, 1.5 mgr. geeft een duidelijke werking, 2.5 mgr. geeft een narcotische werking, die aanzienlijk sterker is, terwijl de werking van 5 mgr. weinig verschilt van die van 2.5 en tenslotte 10 mgr. — zooals reeds vermeld — ongeveer dezelfde werking geeft als 5 mgr. Wilde men deze eigenaardige verhouding tusschen werking en concentratie in curve brengen, dus een z.g. concentratie-werkingscurve van morphine vervaardigen, dan zou men weder een curve krijgen, die in den aanvang een vrij steil verloop heeft en daarna ongeveer horizontaal verloopt. Een curve dus die in verloop overeenkomt met die van morphine en die van scopolamine op de reflexen van het konijn.

Nadat dus gebleken was, dat de werking van 5 mgr. morphine + 0.5 mgr. scopolamine wel gelijk is aan die van 10 mgr. morphine, maar tevens niet grooter is dan die van 5 mgr. morphine alleen, werd onderzocht of de werking van kleinere dosen morphine door scopolamine zouden worden versterkt. Daartoe kregen in een nieuwe serie twee honden I en II elk 2.5 mgr. morphine per K.G. en twee andere honden III en IV ieder 2.5 mgr morphine + 0.5 mgr. scopolamine. Hond III was daarna even diep genarcotiseerd als hond I en II, maar de narcose van hond IV was aanzienlijk *minder* diep dan die van I en II. Hieruit moet dus de gevolgtrekking gemaakt worden, dat in dit geval scopolamine niet alleen niet potentieerend werkte, maar zelfs de werking van morphine tegenging. Dit resultaat werd nog bevestigd door een reeks van proeven op honden, waarbij eenige dieren 1.5 mgr. morphine kregen en eenige dieren 1.5 mgr. morphine + 0.5 mgr. scopolamine. De eerste dieren waren alle dieper genarcotiseerd dan die van de tweede groep.

Uit deze proeven is dus gebleken, dat scopolamine in dosen van 0.5—1 mgr. per K.G. narcoseverschijnselen geeft, maar daarnaast ook prikkelend werkt. Worden kleine dosen morphine met scopo-

lamine gecombineerd, dan verkrijgt men de algebraische som van de werking der beide componenten en de narcotische werking van de morphine heft de prikkelende werking van de scopolamine maar gedeeltelijk op. Geeft men grootere dosen morphine dan treedt de prikkelende werking van de scopolamine op den achtergrond en het schijnt, dat de narcotische werking van de morphine soms in geringe mate door de scopolamine kan worden versterkt, maar in zulk een geringe mate, dat het geen potentieering genoemd kan worden, maar beschouwd moet worden als een eenvoudige additie.

Schneiderlin schijnt op grond van zeer nauwkeurige proeven bij menschen een potentieering gevonden te hebben. Hij gaf n.l. aan eenige patiënten eerst een vrij groote dosis morphine, na enkele dagen een dosis scopolamine en weer enkele dagen later de halve dosis morphine + de halve dosis scopolamine. Ter controle werd in sommige gevallen eerst de morphine + scopolamine gegeven en eerst later de vergiften elk op zichzelf. In alle gevallen kwamen de patiënten na toedienen van het mengsel in algemeene narcose, wat na morphine of scopolamine alleen niet gebeurde. Men kan hier dus van een werkelijke potentieering spreken. Groot voordeel heeft dit echter voor de kliniek niet op kunnen leveren, omdat blijkbaar het verschijnsel niet constant is en de gevoeligheid van verschillende personen voor scopolamine blijkbaar te sterk verschilt om een goede doseering mogelijk te maken.

Uit de hier beschreven proeven is dus het volgende gebleken.

Morphine werkt narcotisch bij het konijn, bij den hond (en ook bij den mensch) maar de curve die de verhouding tusschen dosis en werking aangeeft heeft het verloop van een parabool, wat beteekent, dat in den aanvang van de curve een grooter worden van de dosis ook een intensievere narcotische werking met zich brengt, maar dat daarna bij de hoogere dosen een even groot stijgen van de dosis een veel geringere vermeerdering der narcotische werking geeft.

Scopolamine werkt bij het konijn narcotisch. De concentratie-werkingscurve komt overeen met die van morphine. Bij den hond treedt de prikkelende werking meer op den voorgrond, bij den mensch werkt het blijkbaar narcotisch.

De combinatie scopolamine-morphine heeft bij het konijn, noch wanneer met onze reflexmethode wordt onderzocht, noch wanneer Hauckold's methode wordt benut, een potentieerende werking. Bij den hond vonden we eveneens geen potentieering.

Bij den mensch bestaat volgens Schneidelrin een potentieering, deze is vermoedelijk niet constant.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER biedt eene mededeeling aan: „*Over de reeks van* LAMBERT".

De reeks van LAMBERT

$$L(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{n=\infty} t(n)\, z^n$$

vervormende, leidde SCHLÖMILCH [1]) de asymptotische ontwikkeling

$$L(z) = \frac{C - \log\log\frac{1}{z}}{\log\frac{1}{z}} + \tfrac{1}{4} - \frac{B_1^{\,2}}{2\,.\,2!}\left(\log\frac{1}{z}\right) - \frac{B_2^{\,2}}{4\,.\,4!}\left(\log\frac{1}{z}\right)^3 - \ldots\ldots$$

af, die geschikt is om de waarde van $L(z)$ te berekenen voor bestaanbare waarden van z, die tot $+1$ naderen. WIGERT [2]) verkreeg door eene kleine wijziging in de formule eene iets meer algemeene ontwikkeling, die bruikbaar is, wanneer z al naderende tot $+1$ complexe waarden aanneemt en LANDAU [3]) heeft het bewijs van de uitkomst van WIGERT vereenvoudigd. HANSEN [4]) heeft aangetoond, dat de cirkel $|z| = 1$ eene natuurlijke grens is van $L(z)$, en in zijne lessen heeft LANDAU diezelfde uitkomst op eene eenvoudige en rechtstreeksche wijze afgeleid.

Het bewijs van LANDAU is gegeven in eene verhandeling van KNOPP, [5]) die in dit opstel en ook in zijne dissertatie [6]) reeksen van het meer algemeene type

$$N(z) = \sum_{n-1}^{n=\infty} b_n \frac{z^n}{1-z^n}$$

beschouwde. Aannemend, dat de coëfficiënten b_n aan zekere beperkende voorwaarden voldeden, kon hij verschillende gevallen aangeven,

---

[1]) Ueber die Lambertsche Reihe. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 6, 1861, p. 407.

[2]) Sur la série de Lambert et son application à la théorie des nombres. Acta Math., XLI, 1918, p. 197.

[3]) Ueber die Wigertsche asymptotische Funktionalgleichung für die Lambertsche Reihe. Archiv der Math. u. Phys., III. Reihe, XXVII, 1918, p. 141.

[4]) Démonstration de l'impossibilité du prolongement analytique de la série de Lambert et des séries analogues. Kong. Danske Vitensk. Selskab Forth.. 1907, p. 3.

[5]) Ueber Lambertsche Reihen. Journal f. d. reine u. ang. Math., Bd. 142, 1913, p. 283.

[6]) Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Berlin, 1907.

waarin de voortzetting der functie $N(z)$ over den omtrek van den convergentiecirkel ommogelijk is.

In het volgende wil ik eene nieuwe asymptotische ontwikkeling afleiden, die past bij de onderstelling, dat z, zich bewegende langs een straal van den cirkel $|z|=1$, een rationaal punt op den cirkelomtrek nadert. Buitendien zal het onderzoek dienen om eenige uitkomsten toe te voegen aan die van KNOPP aangaande de functie $N(z)$.

1. Als men aanneemt, dat p en q onderling ondeelbare geheele getallen zijn. is $e^{\frac{2\pi i p}{q}} = \theta^p$ een rationaal punt van de orde q op den cirkel $|z|=1$, en als men neemt $0 < x < 1$, heeft men

$$N(x\theta^p) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_{nq} \frac{x^{nq}}{1-x^{nq}} + \sum_{h=1}^{h=q-1} \sum_{n=0}^{n=\infty} b_{nq+h} \frac{x^{nq+h}\,\theta^{hp}}{1-x^{nq+h}\,\theta^{hp}}.$$

Nu heeft men blijkbaar

$$\frac{qx^{nq^2}}{1-x^{nq^2}} = \frac{x^{nq}}{1-x^{nq}} + \sum_{h=1}^{h=q-1} \frac{x^{nq}\,\theta^{hp}}{1-x^{nq}\,\theta^{hp}}$$

en

$$\sum_{h=1}^{h=q-1} \frac{\theta^{hp}}{1-\theta^{hp}} = -\tfrac{1}{2}(q-1),$$

derhalve verkrijgt men

$$N(x\theta^p) - q\sum_{n=1}^{n=\infty} b_{nq} \frac{x^{nq^2}}{1-x^{nq^2}} + \frac{b_0}{2}(q-1) = \sum_{h=1}^{h=q-1} U_h(x,p), \quad . \quad . \quad (1)$$

waar de coëfficiënt b_0 willekeurig gekozen is en waar

$$U_h(x,p) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ b_{nq+h} \frac{x^{nq+h}\,\theta^{hp}}{1-x^{nq+h}\,\theta^{hp}} - b_{nq} \frac{x^{nq}\,\theta^{hp}}{1-x^{nq}\,\theta^{hp}} \right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

is. Het rechterlid kan worden vervormd, en men kan ook schrijven

$$\left.\begin{aligned} U_h(x,p) = &-(1-x^h)\sum_{n=0}^{n=\infty} b_{nq+h} \frac{x^{nq}\,\theta^{hp}}{(1-x^{nq+h}\,\theta^{hp})(1-x^{nq}\,\theta^{hp})} + \\ &+ \sum_{n=0}^{n=\infty} (b_{nq+h}-b_{nq}) \frac{x^{nq}\,\theta^{hp}}{1-x^{nq}\,\theta^{hp}}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

In het bijzonder vindt men door $b_n = 1$ en ook $b_0 = 1$ te nemen voor de functie van LAMBERT

$$L(x\theta^p) - q\,L(x^{q^2}) + \tfrac{1}{2}(q-1) = \sum_{h=1}^{h=q-1} T_h(x,p), \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waar

$$\left.\begin{aligned} T_h(x,p) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{x^{nq+h}\,\theta^{hp}}{1-x^{nq+h}\,\theta^{hp}} - \frac{x^{nq}\,\theta^{hp}}{1-x^{nq}\,\theta^{hp}} \right\} = \\ &= -(1-x^h)\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{nq}\,\theta^{hp}}{(1-x^{nq+h}\,\theta^{hp})(1-x^{nq}\,\theta^{hp})} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

is. Nu kan men opmerken, dat als $0 \leq x \leq 1$, de moduli der factoren $(1 - x^{nq+h}\,\theta^{hp})$ en $(1 - x^{nq}\,\theta^{hp})$ altijd eene vaste waarde te boven gaan, en dat daarom $T_h(x, p)$ eindig blijft, wanneer x nadert tot de eenheid. Dientengevolge is het verschil

$$L(x\,\theta^p) - qL(x^{q^2})$$

altijd eindig, moet het punt θ^p een singulier punt van $L(z)$ zijn, en moet de voortzetting van $L(z)$ over den cirkelomtrek heen als onmogelijk beschouwd worden.

Om het gedrag van $L(x\theta^p)$ wanneer $x \to 1$ te onderzoeken, zal het voldoende zijn om eene passende ontwikkeling van de functie $T_h(x, p)$ af te leiden.

Stellende

$$x = e^{-y} \quad , \quad \theta^p = e^{i\beta},$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{e^{u-hi\beta} - 1} = -\tfrac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{u - hi\beta + 2\pi ik},$$

heeft men dadelijk

$$T_h(x, p) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \varphi(nqy + hy) - \varphi(nqy) \right\},$$

en uit die uitdrukking kan men zien, dat de toepassing van eene geschikte sommatieformule tot de verlangde uitkomst zal leiden.

Ik beschouw het stelsel der goniometrische reeksen

$$g_1(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi\, kt}{k},$$

$$g_2(t) = +\frac{1}{2\pi^2} \sum_1^\infty \frac{\cos 2\pi\, kt}{k^2},$$

$$g_3(t) = +\frac{1}{2^2\pi^3} \sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi\, kt}{k^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

en de identiteit

$$0 = \int_0^\infty \left\{ g'_1\left(t - \frac{h}{q}\right) - g'_1(t) \right\} \varphi(t\,q\,y)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Eene integratie bij gedeelten vervormt de onbepaalde integraal tot de uitdrukking

$$\left\{ g_1\left(t - \frac{h}{q}\right) - g_1(t) \right\} \varphi(tqy) + \sum_{k=1}^{k=2m-1} (-1)^k q^k y^k \left\{ g_{k+1}\left(t - \frac{h}{q}\right) - g_{k+1}(t) \right\} \varphi^{(k)}(tqy) +$$

$$+ q^{2m} y^{2m} \int \left\{ g_{2m}\left(t - \frac{h}{q}\right) - g_{2m}(t) \right\} \varphi^{(2m)}(t\,q\,y)\,dt,$$

en hier heeft men in te voeren de grenzen 0 en ∞. Daarbij heeft men in aanmerking te nemen de ondoorloopendheden van $g_1\left(t - \frac{h}{g}\right)$ en van

$g_1(t)$. Verder is op te merken, dat $\varphi(tqy)$ en $\varphi^{(k)}(tqy)$ voor $t \to \infty$ tot nul naderen, en dat

$$g_{k+1}\left(-\frac{h}{q}\right) - g_{k+1}(0) = (-1)^{k+1} f_k\left(\frac{h}{q}\right)$$

is, waarbij f_k beteekent den veelterm van BERNOULLI van de orde k.

Op deze wijze leidt de vergelijking (6) tot

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\varphi(nqy+hy) - \varphi(nqy)\right\} = T_h(x,p) = -\sum_{k=0}^{k=2m-1} q^k y^k f_k\left(\frac{h}{q}\right)\varphi^{(k)}(0) + R.$$

Hierin heeft men

$$\varphi(0) = \frac{i}{2}\cot\frac{\pi hp}{q} - \tfrac{1}{2},$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1}\left(D^{(k)}\cot v\right)_{v=\frac{\pi hp}{q}},$$

en de restintegraal R is bepaald door de vergelijking

$$R = -q^{2m}y^{2m}\int_0^\infty \left\{g_{2m}\left(t-\frac{h}{q}\right) - g_{2m}(t)\right\}\varphi^{(2m)}(tqy)\,dt.$$

Daar men nu heeft

$$|\varphi^{(2m)}(tqy)| < 2m!\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1}{\{t^2q^2y^2+(h\beta-2\pi k)^2\}^{m+\frac{1}{2}}} <$$

$$< 2m!\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1}{t^2q^2y^2+(h\beta-2\pi k)^2}\cdot\frac{1}{|h\beta-\beta\pi k|^{2m-1}},$$

besluit men tot

$$|R| < 2|g_{2m}(0)|\,2m!\,q^{2m-1}y^{2m-1}\cdot\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1}{(h\beta-2\pi k)^{2m}},$$

of tot

$$|R| < 2m\pi\,|g_{2m}(0)|\,q^{2m-1}y^{2m-1}\,|\varphi^{(2m-1)}(0)|.$$

Op deze wijze is er aangetoond, dat $|R|$ kleiner is dan een eindig veelvoud van den modulus van den laatsten term in de som, die voorafgaat, en heeft men gevonden de asymptotische ontwikkeling

$$T_h(x,p) = \frac{h}{2q} - \sum_{k=0}^{k=2m-2}\left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} q^k\left(\log\frac{1}{x}\right)^k f_k\left(\frac{h}{q}\right)\left(D^{(k)}\cot v\right)_{v=\frac{\pi hp}{q}} +$$

$$+ Kq^{2m-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2m-1},$$

waar de waarde van K eindig en onafhankelijk van x is.

Stellende

$$A_k = \sum_{h=1}^{h=q-1} f_k\left(\frac{h}{q}\right)\left(D^{(k)}\cot v\right)_{v=\frac{\pi hp}{q}},$$

vindt men ten slotte

$$\left. \begin{aligned} L(x\theta^p) - qL(x^{q^2}) = -\tfrac{1}{4}(q-1) - \sum_{k=0}^{k=2m-2} A_k \left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} q^k \left(\log\frac{1}{x}\right)^k + \\ + K_1\, q^{2m-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2m-1}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

waarin opnieuw K_1 is eindig en onafhankelijk van x.

Uit (7) besluit men, dat als $x \rightarrow 1$, de functie $L(x\theta^p)$ oneindig wordt op dezelfde wijze als

$$qL(x^{q^2}) - \frac{C - \log\log\frac{1}{x} - 2\log q}{q\log\frac{1}{x}} + \tfrac{1}{4}q,$$

en dat men heeft in de grens

$$\operatorname*{Lim}_{x\rightarrow 1} \{L(x\theta^p) - qL(x^{q^2})\} = -\tfrac{1}{4}(q-1) - \frac{i}{2q}\sum_{h=1}^{h=q-1} h\cot\frac{\pi hp}{q}. \quad (8)$$

Aldus is de eenigszins opmerkelijke uitkomst verkregen, dat het alleen het bestaanbare gedeelte van $L(x\theta^p)$ is, dat onbepaald toeneemt op eene wijze, die geheel onafhankelijk is van p.

2. Zoo men alleen wenscht aan te toonen, dat als $x \rightarrow 1$, de functie $L(x\theta^k)$ niet eindig kan blijven voor alle van nul verschillende waarden van k, zal een elementair onderzoek van de som $\sum_{k=0}^{k=q-1} L(x\theta^k)$ voldoende zijn om die uitkomst te bereiken.

Men heeft onmiddellijk

$$\sum_{k=0}^{k=q-1} L(x\theta^k) = q\sum_{n=1}^{n=\infty} t(nq)\, x^{nq},$$

en als men door D aanwijst den grootsten gemeenen deeler van n en q, kan men substitueeren

$$t(nq) = \sum_{d/D} \mu(d)\, t\left(\frac{n}{d}\right) t\left(\frac{q}{d}\right),$$

waardoor men verkrijgt

$$\sum_{k=0}^{k=q-1} L(x\,\theta^k) = q\sum_{d/q} \mu(d)\, t\left(\frac{q}{d}\right) L(x^{qd}).$$

Derhalve, als men x tot 1 doet naderen, vindt men

$$\operatorname*{Lim}_{x\rightarrow 1} \frac{1}{L(x)} \sum_{k=0}^{k=q-1} L(x\,\theta^k) = \sum_{d/q} \frac{\varphi(d)}{d},$$

waar $\varphi(d)$ aanwijst het aantal geheele getallen kleiner dan d en ondeelbaar met d.

Onderstelt men q gelijk aan het produkt $p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$, dan is

$$\sum_{d/q} \frac{\varphi(d)}{d} = \prod_{h=1}^{h=s} \left(1 + a_h \frac{p_h - 1}{p_h}\right) > 1,$$

daarom moet $|L(x\theta_k)|$ voor $x \to 1$ voor tenminste één waarde van k, die van nul verschilt, oneindig groot worden.

3. Men ziet gereedelijk in, dat de rekenwijze gevolgd om de asymptotische ontwikkeling van $L(z)$ te vinden, ook toegepast kan worden op de reeks

$$N(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \frac{z^n}{1-z^n},$$

indien slechts de coëfficient b_n eene eenvoudige analytische functie van het rangnummer n is.

Indien wij bijv. kiezen

$$b_n = -\frac{1}{n},$$

heeft men

$$M(z) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \log(1-z^n) = \log \prod_{1}^{\infty} (1-z^n)$$

en dan opnieuw

$$M(x\,\theta^p) - M(x^{q^2}) = \log q + \sum_{h=1}^{h=q-1} V_h(x, p),$$

in welke vergelijking

$$V_h(x, p) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{\log(1 - x^{nq+h}\,\theta^{hp}) - \log(1 - x^{nq}\,\theta^{hp})\right\}$$

is. Te werk gaande als te voren zal men vinden

$$M(x\,\theta^p) - M(x^{q^2}) = \log q - \frac{1}{q} \sum_{h=1}^{h=q-1} \left\{h \log\left|2 \sin \frac{\pi h p}{q}\right| + \pi i h g_1\left(\frac{hp}{q}\right)\right\} -$$
$$- \frac{1}{24}(q^2-1) \log \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{k=2m-1} A'_k \left(\frac{i}{2}\right)^k q^k \left(\log \frac{1}{x}\right)^k + K_1,$$

waarin

$$A'_k = \sum_{h=1}^{h=q-1} f_k\left(\frac{h}{q}\right) \left(D^{(k-1)} \cot v\right)_{v=\frac{\pi h p}{q}},$$

en K_1 is een eindig getal, onafhankelijk van x.

Nu is voor het product $\prod_{1}^{\infty} (1-x^n)$ van Euler, als $0 \leq x < 1$),

$$M(x) = \frac{1}{24} \log \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2} \log 2\pi - \tfrac{1}{2} \log \log \frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{6 \log \frac{1}{x}} + M\left(e^{-\frac{4\pi^2}{\log \frac{1}{x}}}\right),$$

18

derhalve toont de formule (9) volledig het gedrag van $M(x\,\theta^p)$, als $x \to 1$.

Inderdaad kan men schrijven

$$\lim_{x \to 1} \{M(x\theta^p) - M(x^{q^2})\} = \log q - \frac{1}{q} \sum_{h=1}^{h=q-1} \left\{ h \log \left| 2 \sin \frac{\pi h p}{q} \right| + \pi i h g_1\left(\frac{hp}{q}\right) \right\} \quad (10)$$

en opnieuw kan men opmerken, dat alleen het bestaanbare gedeelte van $M(x\,\theta^p)$ oneindig groot wordt, terwijl het imaginaire gedeelte tot eene eindige grens nadert.

Neemt men bijv.: $p = 1$, $q = 2$, dan zal men vinden

$$\lim_{x \to 1} \{ M(-x) - M(x^4) \} = \tfrac{1}{2} \log 2,$$

of

$$\lim_{x \to 1} \frac{\prod_1^\infty (1 + x^{2n-1})}{\prod_1^\infty (1 + x^{2n})} = \sqrt{2},$$

eene uitkomst, bekend in de theorie der ϑ-functies.

4. Ten slotte wil ik mededeelen, dat een onderzoek van de grondformules (1), (2) en (3) het bewijs kan leveren daarvan, dat de functie

$$N(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \frac{z^n}{1 - z^n}$$

niet over den cirkel $|z| = 1$ heen kan worden voortgezet in elk der volgende gevallen.

I. $A > b_n > B > 0$.

In dit geval heeft men

$$\frac{A}{q} > \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\log \frac{1}{1-x}} N(x\,\theta^p) > \frac{B}{q}.$$

II. $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = A \neq 0$.

Nu zal men vinden

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\log \frac{1}{1-x}} N(x\,\theta^p) = \frac{A}{q}.$$

III. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{n^s} = A \neq 0, \quad s > 0$.

In dit geval geldt de vergelijking

$$\lim_{x \to 1} (1-x)^{1+s} N(x\,\theta^p) = \frac{A}{q^{1+s}} \Gamma(1+s)\,\zeta(1+s).$$

IV. $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ en hetzij $b_n > 0$, of de reeks $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_{nq}}{nq}$ is convergent voor een onbepaald aantal waarden van q en heeft eene som, die van nul verschilt. In de laatste onderstelling is

$$\lim_{x \to 1} (1-x)\, N(x\, \theta^p) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_{nq}}{nq}.$$ [1])

V. $b_n \geqq 0$ en buitendien heeft men

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \{ b_{q+h} + b_{2q+h} + b_{3q+h} + \ldots + b_{nq+h} \} = 0$$

$$(h = 1, 2, 3, \ldots, q-1)$$

voor een onbepaald aantal waarden van q.

---

[1]) Door middel van eene geheel verschillende methode leidde FRANEL deze formule af in zijne verhandeling: Sur la théorie des séries. Math. Annalen, Bd. 52, 1899, p. 529.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „*Involuties in het cirkelveld*".

1. In een vlak zijn drie cirkelbundels $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ gegeven; in elk van hen zijn de cirkels in de paren α_1, α_2 enz. van een involutie gerangschikt. Zij δ_1 de cirkel, die de cirkels $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ loodrecht snijdt, δ_2 de orthogonaalcirkel der overeenkomstige cirkels $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, dan zijn δ_1 en δ_2 aan elkaar toegevoegd in een *involutorische verwantschap* in het cirkelveld.

Daar α_1 tweemaal met α_2 samenvalt, β_1 tweemaal met β_2 en γ_1 tweemaal met γ_2, heeft de involutie (δ_1, δ_2) *acht coincidenties.*

In het algemeen wordt een willekeurig aangenomen cirkel δ_1 slechts door één cirkel α loodrecht gesneden. Behoort δ_1 evenwel tot den orthogonaalbundel van (α), dan is α_1, dus ook α_2, een willekeurige cirkel van (α), terwijl β_2 en γ_2 volkomen bepaald zijn. Met δ_1 komt in dat geval overeen elke cirkel δ_2, die β_2 en γ_2 loodrecht snijdt.

De *orthogonaalbundels* $(\alpha'), (\beta'), (\gamma')$ van $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ bestaan dus uit *singuliere cirkels*, d. w. z. cirkels, die in de involutie telkens aan oneindig vele cirkels zijn toegevoegd.

Nog op een andere wijs kan δ_1 singulier zijn. Op een cirkel α bepalen de bundels (β) en (γ) twee involuties; daar deze één paar gemeen hebben, liggen op α de twee snijpunten van een β met een γ. Elke cirkel α (of β, of γ) behoort dus tot een drietal $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die in een bundel liggen, waarvoor dus de orthogonaalcirkel δ_2 onbepaald wordt. De cirkel δ_1, die de overeenkomstige cirkels $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ loodrecht snijdt, is dus *singulier* en toegevoegd aan elken cirkel van een bepaalden bundel.

2. Een nader onderzoek van de involutie (δ_1, δ_2) wordt betrekkelijk eenvoudig, wanneer wij gebruik maken van een afbeelding van het cirkelveld op de puntenruimte, waarop in 1917 de aandacht werd gevestigd door Dr. K. W. WALSTRA [1]).

Om tot deze afbeelding te geraken, nemen wij het vlak van het cirkelveld tot coordinaatvlak $z=0$ en beschouwen als beeld van een cirkel het punt op zijn as, waarvan de coordinaat z gelijk is aan de macht van den oorsprong O t. o. v. den cirkel. De punt-

[1]) Verslagen XXV, bl. 960.

cirkels hebben hun beelden op een omwentelingsparaboloïde **G** (grensoppervlak) en de beelden van twee orthogonale cirkels worden door **G** harmonisch gescheiden. Twee wederkeerige poolrechten zijn de beelden van twee onderling orthogonale cirkelbundels.

De bundels $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ worden afgebeeld door drie op rechten a, b, c gelegen involuties (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2). Het beeld D_1 van den cirkel δ_1, die $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ loodrecht snijdt, is de pool van het vlak $A_1 B_1 C_1$. Wij hebben dus nu te beschouwen een involutie (D_1, D_2) in de puntenruimte, die daardoor is gekenmerkt, dat de poolvlakken Δ_1 en Δ_2 van D_1 en D_2 de gegeven rechten a, b, c in de paren $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2)$ van drie gegeven involuties ontmoeten.

3. Het is nu gemakkelijk, de *singuliere* elementen der cirkelinvolutie terug te vinden. Vooreerst merken wij op, dat A_1 onbepaald wordt, zoodra Δ_1 door a gaat; voor Δ_2 kan men nu elk vlak nemen dat de punten B_2 en C_2 bevat, dus voor D_2 elk punt der poollijn a'_2 van de rechte $a_2 \equiv B_2 C_2$. Laat men Δ_1 om a wentelen, dan doorloopt D_1 de poolrechte a' van a, terwijl a_2 een quadratische regelschaar beschrijft. De rechte a'_2 doorloopt eveneens een quadratische regelschaar $(a'_2)^2$, welke de poollijnen b' en c' van b en c tot richtlijnen heeft. Aan elk punt van a' is blijkbaar een bepaalde rechte van $(a'_2)^2$ toegewezen. Analoog behooren bij de *singuliere rechten* b', c' de regelscharen $(b'_2)^2$, $(c'_2)^2$.

In de tweede plaats wordt D_2 onbepaald zoodra A_2, B_2 en C_2 collineair zijn, dus op een transversaal s van a, b, c liggen. Laat men s de regelschaar doorloopen, die a, b, c tot richtlijnen heeft, dan beschrijven A_1, B_1 en C_1 drie projectieve reeksen, zoodat Δ_1 een kubische ruimtekromme osculeert. Maar dan zal D_1 tot meetkundige plaats hebben een kubische ruimtekromme σ^3, die de rechten a', b' en c' tot bisecanten heeft. Aan elk punt $S \equiv D_1$ der *singuliere kromme* σ^3 is blijkbaar een rechte s' toegewezen, nl. de poollijn der overeenkomstige rechte s. De rechten s' vormen een regelschaar $(s')^2$, met richtlijnen a', b', c'.

4. Als D_1 de rechte l beschrijft, wentelt Δ_1 om de poollijn l', zoodat A_1, B_1 en C_1 projectieve reeksen doorloopen. Ook A_2, B_2, C_2 beschrijven dan projectieve reeksen; Δ_2 osculeert dus een kubische kromme, en D_2 doorloopt een kubische kromme λ^3, welke a', b' en c' tot bisecanten heeft. Bijgevolg zijn D_1 en D_2 aan elkaar toegevoegd in een *kubische verwantschap*.

Daar l twee punten met $(s')^2$ gemeen heeft, rust λ^3 in twee punten op σ^3. De stralenruimte wordt dus omgezet in het viervoudig oneindig stelsel der kubische ruimtekrommen, die elke der lijnen a', b', c' en σ^3 tweemaal snijden.

Een vlak Φ wordt omgezet in een kubisch oppervlak Φ^3, dat door a', b', c' en o^3 gaat. De beelden van twee vlakken hebben deze vier lijnen en het beeld van λ^3 van hun snijlijn l gemeen.

5. Een raakvlak aan het grensoppervlak **G** is het beeld van de cirkels, die door een gegeven punt gaan. Voor de involutie (δ_1, δ_2) geldt dus (§ 4) de eigenschap: *Een cirkelbundel wordt omgezet in een stelsel van cirkels met index drie.*

Dit stelsel bevat *zes puntcirkels* en *drie rechten*. De *singuliere cirkels* vormen *drie bundels* (§ 1) en een stelsel met *index* drie (§ 3). Aan elken singulieren cirkel is een cirkelbundel toegewezen; deze bundels vormen vier stelsels.

Het beeld van een cirkelbundel bevat *acht* singuliere cirkels.

6. Blijkbaar stelt de afbeelding van het cirkelveld op de puntenruimte ons in staat, uit elke involutie in de laatste een involutie in het cirkelveld af te leiden en omgekeerd.

Een bijzonder eenvoudige involutie wordt als volgt verkregen. Op elken straal h, die OZ loodrecht snijdt, bepaalt de paraboloïde **G** een involutie van paren toegevoegde punten (P, P'). In het cirkelveld komt hiermee overeen de verwantschap, waarin aan elkaar zijn toegevoegd twee cirkels, die elkaar loodrecht snijden en in een vast punt O dezelfde macht hebben.

Het aan P gekoppelde punt P' is het snijpunt van den straal h met het poolvlak π van P. Ligt P op OZ, dan kan men voor h elke rechte nemen die OZ in P loodrecht snijdt. Daar π nu loodrecht op OZ is, zal aan P toegevoegd zijn elk punt van de oneindig verre rechte van $z = 0$.

Een punt van **G** ligt in zijn poolvlak, is dus *coïncidentie* der verwantschap. Komt P in den top O of in het oneindig verre punt van OZ, dan wordt P' een willekeurig punt van $z = 0$ of van $z = \infty$.

Als P een rechte l doorloopt, beschrijft h een regelschaar ϱ^2, π een daarmee projectieven vlakkenbundel; de meetkundige plaats van P' is dus een kubische kromme λ^3. De poollijn l' van l ontmoet ϱ^2 in twee punten P'; elk vlak door l' bevat, behalve die twee punten, nog een buiten l' gelegen punt P'. Dus is l' koorde van λ^3. Ook l is koorde, want haar snijpunten met **G** zijn coïncidenties.

7. Met de punten P van een vlak Ψ komen de punten P' van een kubisch oppervlak Ψ^3 overeen. Twee dergelijke oppervlakken hebben vooreerst de kromme λ^3 gemeen, welke het beeld is van de snijlijn der overeenkomstige vlakken. Om een goed inzicht te verkrijgen in de beteekenis van de figuur welke zij bovendien gemeen hebben, merken wij op, dat de involutie (P, P') een bijzonder geval is van de volgende verwantschap.

Zij gegeven het quadratisch oppervlak Φ^2 en het paar poollijnen d,d'. Door een punt P wordt de transversaal t over d,d' getrokken; het poolvlak π van P bepaalt op t het punt P', dat aan P wordt toegevoegd.

De snijpunten van d met Φ^2 noemen wij E_1, E_2, de snijpunten van d' met Φ^2 worden door E'_1, E'_2 aangewezen. De rechte $E_1 E'_1$ ligt op Φ^2; aan elk van haar punten P is blijkbaar elk van haar punten toegevoegd. Met elk punt van d komt elk punt van d' overeen. Alle ribben van het viervlak $E_1 E_2 E'_1 E'_2$ zijn dus singulier, zoodat aan hun doorgangen met een vlak Ψ deze zes rechten zijn toegevoegd. Twee oppervlakken Ψ^3 hebben dan behalve de kromme λ^3 deze zes singuliere rechten gemeen.

Vervangen wij nu Φ^2 weer door **G**, dan wordt d de as OZ, d' de oneindig verre rechte van $z = 0$ en de overige vier singuliere rechten worden gevonden in de imaginaire rechten volgens welke **G** door $z = 0$ en $z = \infty$ worden gesneden.

8. Wanneer P een rechte l doorloopt, welke OZ ontmoet, dan beschrijft h een bundel van evenwijdige stralen, die projectief is met den waaier gevormd door de poollijn van P t. o. v. de parabool in het vlak door l en OZ. De punten P' liggen nu op een orthogonale hyperbool, welke door de oneindig verre rechte van $z = 0$ tot een λ^3 wordt aangevuld.

Door de verwantschap der orthogonale cirkels, welke in § 6 werd bedoeld, wordt een *cirkelbundel* weer omgezet in een *stelsel met index* drie. De puntcirkels zijn coïncidenties. De beide cirkels van een paar zijn slechts dan reëel, als zij in O negatieve macht hebben. Ligt O buiten een cirkel, dan heeft de toegevoegde cirkel een imaginairen straal.

Scheikunde. — De Heer JAEGER biedt eene mededeeling aan van de Heeren H. J. BACKER en J. V. DUBSKY over: *„De bereiding van α-sulfopropionzuur"*.

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH).

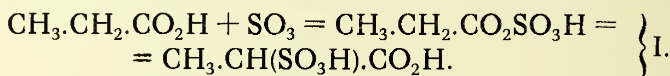
Voor het α-sulfopropionzuur is tot dusverre de eenige practische bereidingsmethode de door FRANCHIMONT [1]) gevondene, n.l. de werking van zwavelzuur met propionzuuranhydride.

Behalve deze algemeene methode van FRANCHIMONT ter bereiding van α-sulfocarbonzuren, is bij de eerste term der reeks, het sulfonazijnzuur, door MELSENS [2]) een analoge methode toegepast, n.l. de werking van zwavelzuuranhydride met azijnzuur

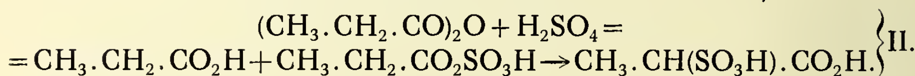
De twee methoden vertoonen veel overeenkomst. In beide gevallen vormt zich als tusschenproduct het gemengde anhydride, het acetylzwavelzuur, zooals FRANCHIMONT [3]) reeds had aangenomen, en later door STILLICH [4]) werd bevestigd, en voor de reactie van MELSENS is bewezen door VAN PESKI [5]).

Ter vergelijking met de methode van FRANCHIMONT hebben wij de methode van MELSENS ook toegepast bij het propionzuur, door dit zuur met zwaveltrioxyde te behandelen.

Hierbij bleek in beide gevallen de reactie, evenals bij het azijnzuur, indirect te zijn, waarbij als tusschenproduct het gemengde anhydride, het propionylzwavelzuur moet worden aangenomen.



$$\left.\begin{aligned} CH_3.CH_2.CO_2H + SO_3 = CH_3.CH_2.CO_2SO_3H = \\ = CH_3.CH(SO_3H).CO_2H. \end{aligned}\right\} I.$$



$$\left.\begin{aligned} (CH_3.CH_2.CO)_2O + H_2SO_4 = \\ = CH_3.CH_2.CO_2H + CH_3.CH_2.CO_2SO_3H \rightarrow CH_3.CH(SO_3H).CO_2H. \end{aligned}\right\} II.$$

Voegt men de stoffen onder afkoeling bijeen, dan vormt zich een kleurlooze, zeer dikke vloeistof, die eerst bij hoogere temperatuur onder warmteontwikkeling en bruinkleuring het sulfopropionzuur levert.

---

1) Recueil trav. chim. **7**, 27 (1888).

2) Ann. der Chemie **52**, 276 (1844).

3) Versl. dezer Akad. **16**, 373 (1881).

4) Ber. d. dtsch. chem. Ges. **38**, 1241 (1905).

5) Versl. dezer Akad. **22**, 996 (1914).

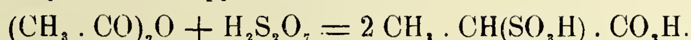
Den voortgang dezer omzetting konden wij titrimetrisch nagaan, daar het propionylzwavelzuur, na hydrolyse, drie aequivalenten base neutraliseert en het sulfonzuur slechts twee aequivalenten.

Het sulfopropionzuur werd als baryumzout afgescheiden en gewogen. Uit 1 molecuul propionzuur met zwaveltrioxyde kregen wij gemiddeld een opbrengst van 0.35 molecuul sulfopropionzuur, en uit 1 mol. propionzuur-anhydride met zwavelzuur (monohydraat) 0.55 mol.

Vergeleken met de methode van FRANCHIMONT is de reactie met zwaveltrioxyde experimenteel minder eenvoudig. De werking is heftig; het reactieproduct is donkerder gekleurd, het hieruit verkregen baryumzout eveneens, en de opbrengst is wisselend. Alleen ter bereiding van grootere hoeveelheden kan de methode worden aanbevolen.

De reactie van FRANCHIMONT daarentegen is zeer gemakkelijk uit te voeren en geeft een mooi wit baryumzout. Een nadeel is echter, dat van het propionzuuranhydride slechts de helft in het sulfonzuur kan worden omgezet, terwijl uit de andere helft propionzuur wordt teruggevormd.

Wij hebben nu getracht de voordeelen der twee methoden — de betere opbrengst der eerste en de grootere zuiverheid van het product der tweede methode — te combineeren, door de beide reacties te vereenigen. Hiertoe kan men het reactieproduct van propionzuuranhydride met zwavelzuur, hetgeen een molecuul vrij propionzuur bevat, met de aequimoleculaire hoeveelheid zwaveltrioxyde behandelen. Eenvoudiger is het echter het propionzuuranhydride direct te laten reageeren met pyrozwavelzuur.



$$(CH_3 . CO)_2O + H_2S_2O_7 = 2\ CH_3 . CH(SO_3H) . CO_2H.$$

Als gemiddelde opbrengst werd op deze wijze verkregen uit 1 mol. propionzuuranhydride 0,75 mol. sulfonzuur.

Daar men het pyrozwavelzuur in gekristalliseerden toestand bij het propionzuur kan voegen, is de methode gemakkelijker dan het werken met zwaveltrioxyde. De reactie gaat kalmer en het product is zuiverder.

Ook bij het azijnzuuranhydride hebben wij de methode toegepast. Voor een dergelijk gemakkelijk toegankelijk uitgangsmateriaal is de oorspronkelijke methode van FRANCHIMONT eenvoudiger.

Voor het sulfureeren van kostbare carbonzuuranhydriden kan de hier beschreven methode echter wegens de hoogere opbrengst aanbevolen worden.

Groningen, 8 Sept. 1919. *Org. Chem. Lab. der Rijks-Univ.*

Wiskunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeling aan van de Heer H. B. A. BOCKWINKEL: „*Over een merkwaardige funksionele relatie in de teorie van de koeffisientfunksies*".

(Mede aangeboden door de Heer KLUYVER).

1. Zij $\varphi(t)$ een funksie, die in het komplekse t-vlak geen singuliere punten heeft buiten de sirkel (1,1), d. i. de sirkel met middelpunt $t=1$ en straal 1. Zij verder $\varphi(\infty)=0$ en de orde g van $\varphi(t)$ op de omtrek van genoemde sirkel eindig of negatief oneindig. In de reeksontwikkeling

$$\varphi(t)=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{g_n}{t^{n+1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

is dan de *karakteristiek* $x=\overline{\lim_{n=\infty}}\,[log\,|g_n|:log\,n]$ van de koeffisienten g_n eveneens verschillend van $+\infty$, want men heeft, zoals bekend is, $k=g-1$. Is $g<0$, dan *bestaat* de integraal rondom de sirkel (1,1)

$$\omega(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1,1)}\varphi(t)\,t^{x-1}\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

voor $R(x)>0$, omdat de reeks (1) dan op de omtrek van die sirkel konvergeert; de waarde van t^{x-1} wordt zó gedefinieerd gedacht, dat men het argument van t laat lopen van $-\pi/2+\delta$ tot $+\pi/2-\delta$. De funksie $\omega(x)$ wordt door PINCHERLE[1]) *koeffisientfunksie* van $\varphi(t)$ genoemd, op grond van de relatie $g_n=\omega(n+1)$. Omgekeerd heet $\varphi(t)$ de *voortbrengende* funksie van $\omega(x)$. PINCHERLE beschouwt de betrekking tusschen beide funksies vooral uit een oogpunt van *funksionaalrekening*. Schrijft men

$$\omega(x)=I\,[\varphi(t)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dan is I een *additieve funksionele operatie*, die een reeks van eenvoudige relaties bevredigt, welke o. a. kunnen dienen, om de koeffisientfunksie te definieren ook in gevallen dat de integraal (2) niet bestaat. Zo vindt men bv. gemakkelik

$$I\,[t\,\varphi(t)]=\omega(x+1), \quad \text{en} \quad I\,\varphi'(t)=-(x-1)\,\omega(x-1). \; . \; . \; (4)$$

en door kombinatie van deze twee $I\,[\varphi'(t)]=-(x-1)\,I\,[t^{-1}\varphi(t)]$, welke laatste relatie door herhaling overgaat in

[1]) *Sur les Fonctions Déterminantes*, Ann. de l'Ec. Norm. (22) 1905, (Ch. IV).

$$I\,[\varphi^{(r)}(t)] = (-1)^r \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-r)} I\,[t^{\ r}\varphi(t)]$$

Het is gemakkelik in tè zien dat de laatste gelijkheid ook voor negatieve gehele waarden van r geldt. Het merkwaardige is echter dat dit ook nog het geval is voor negatieve *gebroken* en *onmeetbare* waarden. Hiervan heb ik gebruik gemaakt bij het onderzoek van een funksie die door een binomiaalreeks $\Sigma c_n \binom{x-1}{n}$ wordt voorgesteld[1]), welke reeks de meest tipiese is, waarin een koeffisientfunksie ontwikkeld kan worden. Het doel van deze noot is, om van de hier uitgesproken bewering het bewijs te leveren.

2. We stellen $r = -\alpha$ en vervangen, om voortdurend met funksies te doen te hebben die regulier zijn voor $t = \infty$, $\varphi(t)$ door $\varphi(t) : (t-1)^\alpha$. Als definitie van de afgeleide van negatieve orde $-\alpha$ nemen we, in aansluiting met die van RIEMANN[2]), de volgende aan:

$$(-1)^\alpha D^{-\alpha} \frac{\varphi(t)}{(t-1)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \frac{(u-t)^{\alpha-1}\varphi(u)}{(u-1)^\alpha}\,du \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Daarbij denken we als integratieweg de halfrechte die in het verlengde ligt van de lijn gaande van $u = 1$ naar $u = t$; en aan $u - t$ en $u - 1$ kennen we hetzelfde argument toe, gelegen tussen $-\pi + \delta$ en $+\pi - \delta$. Dan is deze funksie, evenals $\varphi(t)$ zelf, regulier buiten de sirkel $(1, 1)$ en nul voor $t = \infty$; en door de substitutie $u - 1 = (t - 1) : s$ vindt men na een kleine herleiding de reeksontwikkeling

$$(-1)^\alpha D^{-\alpha} \frac{\varphi(t)}{(t-1)^\alpha} = \sum_0^\infty {}_n \frac{\Gamma(n+1) g_n}{\Gamma(n+1+\alpha)(t-1)^{n+1}}, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

die dus in een zeer eenvoudig verband staat met de ontwikkeling voor $\varphi(t)$ zelf.

De orde van deze afgeleide is, zoals uit deze reeks onmiddellik blijkt, α minder dan die van $\varphi(t)$ en dus negatief, als deze laatste het is. In deze onderstelling kan men er de operatie I in de vorm (2) op toepassen, zodat alvast van het eerste lid van de te bewijzen gelijkheid

$$I\left[(-1)^\alpha D^{-\alpha} \frac{\varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\right] = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)} I\left[\frac{t^\alpha \varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

---

[1]) Deze Verslagen, Dl. XXVII, 1919. Nieuw Archief v. Wisk. XIII, 2e stuk (1920).

[2]) Zie BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 74. De konstante a is hier gelijk aan ∞ genomen, in verband met de regulariteit van $\varphi(t)$ voor $t = \infty$.

het bestaan is aangetoond. Overgaande tot het tweede lid, schrijven we

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 s^{x-1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds,$$

waarin het argument van s en van $1-s$ nul te denken is, en

$$I\left[\frac{t^\alpha\varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(1,1)}\frac{t^{\alpha+x-1}\varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\,dt,$$

zodat het genoemde lid gelijk is aan

$$\frac{1}{2\pi i\Gamma(\alpha)}\int\limits_{(1,1)}\frac{t^{\alpha+x-1}\varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\left[\int\limits_0^1 s^{x-1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\right]dt$$

Stelt men in de tweede integraal $s=u:t$, dan gaat deze uitdrukking over in

$$\frac{1}{2\pi i\Gamma(\alpha)}\int\limits_{(1,1)}\frac{\varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\left[\int\limits_0^t u^{x-1}(t-u)^{\alpha-1}\,du\right]dt.$$

Daar het argument van s nul was, is dat van u gelijk aan dat van t; de integratieveranderlike u gaat dus in het u-vlak langs de *rechte* van $u=0$ naar $u=t$. Men kan hem echter ook in pozitieve zin van het *begin*punt $u=-i\delta$ van de sirkel $(1,1)$ *langs de omtrek* van die sirkel naar het punt $u=t$ laten gaan. In deze onderstelling vatten we het tweetal van achtereenvolgende integraties als dubbele integraal op. Een bepaalde waarde u_1 van u komt dan in het ensemble (u,t) te pas bij al die waarden van t die men in het t-vlak vindt op de sirkel $(1,1)$, tussen $t=u_1$ en het *eind*punt $t=+i\delta$ van die sirkel. De dubbele integraal kan dus ook vervangen worden door het tweetal van achtereenvolgende integraties

$$\frac{1}{2\pi i\Gamma(\alpha)}\int\limits_{(1,1)}u^{x-1}\left[\int\limits_u^0\frac{(t-u)^{\alpha-1}\varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\,dt\right]du,$$

waarin de integratie naar t in *pozitieve* zin gaat langs de sirkel (1,1) van $t=u$ naar $t=+i\delta$ [1]). Wegens de eigenschappen van $\varphi(t)$ kan men deze integratie vervangen door een van u naar ∞ en van ∞ naar 0. De laatste geeft een bedrag dat *onafhankelik is van u*

[1]) De hier gevolgde redenering is absoluut streng, d. w. z. berust op *bekende* waarheden, als de te pas komende funksies in het hele integratiegebied eindig zijn. Voor $R(x)>1$ en $R(\alpha)>1$ is dat het geval; maar daar beide *eind*vormen analitiese funksies zowel van x als van α zijn voor $R(x)>0$ en $R(\alpha)>0$, geldt hun gelijkheid ook in deze laatste onderstellingen.

en dit levert dus voor de *eind*integratie naar u niets op. Verwisselt men nog de letters t en u, dan kan dus voor de voorgaande uitdrukking geschreven worden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1,1)} t^{x-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{(u-t)^{\alpha-1}\varphi(u)}{(u-1)^\alpha}du\right]dt,$$

en dit is, als men let op (2) en (5), juist gelijk aan het eerste lid van (7). Het doel, deze gelijkheid aan te tonen, is hiermee bereikt, tenminste voor het geval dat $g < 0$.

Is $g > 0$ en vooreerst $0 \leqq g < 1$, dan definieert PINCHERLE de koeffisientfunksie van $\varphi(t)$ door een hulpfunksie in te voeren:

$$\varphi_1(t) = -D^{-1}\frac{\varphi(t)}{t-1} = \sum_0^\infty{}_n \frac{g_n}{(n+1)(t-1)^{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Voor deze is nl. de orde één eenheid lager dan g, en dus negatief, zodat $\omega_1(x) = I\varphi_1(t)$ door (2) gedefinieerd wordt. Men heeft nu volgens (4)

$$I\varphi(t) = -I(t-1)\varphi'_1(t) = xI\varphi_1(t) - \theta^{-1}xI\varphi_1(t), \quad . \quad . \quad (9)$$

als de operatie θ gedefinieerd wordt door $\theta f(x) = f(x+1)$. Stellen we het rezultaat van de operatie $(\alpha) = (-1)^\alpha D^{-\alpha}\frac{1}{(t-1)^\alpha}$ op $\varphi(t)$, zoals die wordt toegepast in het linkerlid van (5), voor door $\varphi_\alpha(t)$ en het rezultaat van de operatie $(1) = -D^{-1}\frac{1}{t-1}$ op $\varphi_\alpha(t)$ door $\varphi_{1\alpha}(t)$, dan is dus volgens de voorgaande vergelijking

$$I\varphi_\alpha = xI\varphi_{1\alpha} - \theta^{-1}[xI\varphi_{1\alpha}] \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Nu is de operatie (α) kommutatief, zoals het gemakkelikst blijkt uit de reeksontwikkeling (6). Men heeft dus $\varphi_{1\alpha} = \varphi_{\alpha 1}$, indien deze laatste uitdrukking het rezultaat beduidt, dat men krijgt, als eerst de operatie (1) en dan (α) wordt toegepast. Maar $\varphi_1(t)$ is een funksie waarvoor we de gelijkheid (7) al bewezen hebben; neemt men dit in aanmerking, dan volgt uit (10), met gebruikmaking van de formule $\Gamma(y+1) = y\,\Gamma(y)$,

$$I\varphi_\alpha = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)}\left[xI\frac{t^\alpha\varphi_1(t)}{(t-1)^\alpha} - (x+\alpha-1)\,I\frac{t^{\alpha-1}\varphi_1(t)}{(t-1)^\alpha}\right]. \quad . \quad (11)$$

Opnieuw gebruik makende van (9) kunnen we herleiden

$$x\,I\frac{t^\alpha\varphi_1}{(t-1)^\alpha} - (x-1)\,I\frac{t^{\alpha-1}\varphi_1}{(t-1)^\alpha} = -I\left[(t-1)\,D\frac{t^\alpha\varphi_1}{(t-1)^\alpha}\right] \quad . \quad (12)$$

Verder, lettende op (8)

$$-(t-1)\,D\frac{t^{\alpha}\varphi_1}{(t-1)^{\alpha}}=\frac{t^{\alpha}\varphi}{(t-1)^{\alpha}}+\frac{at^{\alpha-1}\varphi_1}{(t-1)^{\alpha}}\quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Met behulp van (12) en (13) gaat (11) tenslotte over in de te bewijzen gelijkheid (7).

De hier gevolgde redenering kan tevens dienen, om de formule aan te tonen voor $k \overline{<} g < k+1$, als hij voor $g < k$ al bewezen is; daarmee is de *algemene* geldigheid verklaard.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van de Heeren L. S. ORNSTEIN en F. ZERNIKE, over: *„Energie-wisselingen der zwarte straling en licht-atomen"*.

(Mede aangeboden door den Heer EHRENFEST).

In 1905 en in 1909 heeft EINSTEIN[1]) verschillende argumenten aangevoerd voor de opvatting, dat in een stralingsruimte de energie niet continu over de ruimte verdeeld is, maar in afgepaste hoeveelheden in punten geconcentreerd, „lichtatomen". Herhaaldelijk is op gewichtige bezwaren tegen deze theorie der lichtatomen gewezen en zij heeft blijkbaar tegenwoordig weinig aanhangers meer. Daar tegenover staat, dat de beschouwingen van EINSTEIN slechts gedeeltelijk weerlegd zijn. Geheel onweersproken is — zoover ons bekend is — zijn voornaamste argument ontleend aan de energie-wisselingen gebleven. In hetgeen volgt geven we stap voor stap een weerlegging van dit argument. Om onze conclusies in het kort te kunnen aangeven, is het noodig de veronderstelling waarvan EINSTEIN uitgaat, nauwkeurig te formuleeren en zijn resultaat te vermelden.

1. EINSTEIN beschouwt twee samenhangende ruimten van volumina v en V begrensd door volkomen spiegelende wanden[2]), waarin straling met trillingsgetallen tusschen ν en $\nu + d\nu$ besloten is, en maakt gebruik van de volgende uitspraken, waarvan hij sommige niet uitdrukkelijk neerschrijft:

I. Energie en entropie zijn beide voor elk volume afzonderlijk aan te geven, ε en η voor v, E en H voor V.

II. De gemiddelde energie en entropie zijn gelijkmatig over de ruimten verdeeld, dat is: $\bar{\varepsilon} : \bar{E} = \bar{\eta} : \bar{H} = v : V$.

III. De entropie van het geheel is gelijk aan de som van die der deelen $S = \eta + H$.

IV. Het principe van BOLTZMANN $S = k \lg W$ kan op de straling toegepast worden om de waarschijnlijkheid W te vinden voor van het gemiddelde afwijkende toestanden, wanneer men voor S de thermodynamisch bepaalde entropie neemt.

[1]) Ann. d. Physik (4) **17**, 132 (1905), Physik. Z. **10**, 185, 817 (1909).

[2]) EINSTEIN spreekt van diffuus volkomen reflecteerende wanden. Om de berekening mogelijk te maken, zullen we volkomen, vlakke spiegelende wanden nemen, wat principieel echter geen verschil maakt.

Met behulp van deze veronderstellingen en van de stralingswet van Planck vindt Einstein voor de middelbare afwijking van de energie, in het geval dat $V >> v$ is.

$$\text{V.}\quad \overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2} = h\nu\bar{\varepsilon} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\cdot\frac{\bar{\varepsilon}^2}{v}$$

en interpreteert deze formule als volgt:

VI. De tweede term geeft de energie-wisselingen door interferentie aan, zooals men die uit de theorie van Maxwell *uitsluitend* zou verwachten.

VII. De overblijvende eerste term $h\,\nu\,\bar{\varepsilon}$, die men uit klassieke beschouwingen *niet* zou vinden, is toe te schrijven aan het bestaan van lichtatomen van de grootte $h\nu$, die zich volgens het toeval over beide ruimten verdeelen.

Wij zullen in het eerste deel tot de volgende conclusies komen:

a. Ook volgens de methoden der quantentheorie vindt men voor Einstein's geval — ruimten zonder materie — alleen de tweede term van V.

b. III is in 't algemeen onjuist.

c. Het geval kan wel zóó gesteld worden, dat III met groote benadering geldt, maar dan vervalt II.

d. IV kan niet toegepast worden, daar S voortdurend constant blijft, ondanks interferentie-wisselingen.

Daarmee vervallen dan tevens Einstein's uitspraken V en VII.

In verband met deze resultaten komt men tot de vraag, of IV algemeen onjuist is. In het tweede deel behandelen we daarom het geval dat een ruimte met straling in wisselwerking met materie staat, dan zijn II en III juist. Dat ook IV geldt, toonen wij aan door onafhankelijk van de entropie, zuiver statistisch, de energie-wisselingen af te leiden, waarbij we op het voorbeeld van Einstein's afleiding der stralingswet [1]) van de frequentie-bepaling volgens Bohr gebuik maken. Zoo vinden we:

e. V geldt voor straling in evenwicht met materie, en dus ook IV.

f. VI vervalt dan, en eveneens VII.

A. Straling zonder materie.

2. Uit Einstein's onderstellingen I—IV volgt door een eenvoudige berekening, geheel zooals bij Einstein l.c., voor een willekeurige verhouding $v : V$

[1]) Verh. d. D. Physik. Ges. XVIII p. 318 (1916).

$$\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}=\frac{-k}{\frac{\partial\eta_1}{\partial\varepsilon_1}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{V}\right)}=\frac{vV}{v+V}kT^2\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial T}$$

waarin ε_1 en η_1 de energie en entropie per vol. eenheid voorstellen.

Deze formule kan men op allerlei stelsels toepassen, bijv. op een gas in twee communiceerende ruimten v en V. In 't bijzonder voor *straling* van trillingsgetal tusschen ν en $\nu+d\nu$ stelt men $\varepsilon_1=u_\nu d\nu$ waarmee

$$\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}=kT^2\frac{\partial u_\nu}{\partial T}\frac{vd\nu}{1+\frac{v}{V}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wordt. Maakt men verder gebruik van de stralingswet van PLANCK

$$u_\nu=\frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dan komt er

$$\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}=\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\frac{h\nu u_\nu vd\nu}{1+\frac{v}{V}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Voor $V=\infty$ vindt men hieruit formule V, wanneer men de eerste breuk in twee termen splitst en weer $u_\nu vd\nu=\bar{\varepsilon}$ schrijft. Voor de volgende berekening nemen we eenvoudiger $V=v$. Dan wordt het kwadraat van de wisselingen dus half zoo groot.

De methode die men tegenwoordig in de quantentheorie steeds toepast, indien mogelijk, bestaat hierin dat de hoofdtrillingswijzen van het beschouwde stelsel bepaald worden. Aan elk daarvan wordt dan verder een met de frequentie op bekende wijze samenhangende energie toegeschreven. Wij zullen ons in het volgende eveneens van hoofdtrillingen bedienen, die wij evenals in de quantentheorie uit de klassieke theorie zullen afleiden.

Voor een parallelepipedum in een rechthoekig assenstelsel besloten binnen de volkomen geleidende vlakken $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=b$, $z=c$ zullen we deze methode toepassen. De bekende uitkomst van de hoofdtrillingen luidt:

voor elk stel geheele positieve getallen k, l, m zijn er twee trillingen. De componenten van de electrische kracht d en van de magnetische kracht h worden bijv. voor de eerste trilling voorgesteld door

$$d_x = A\alpha \cos k\pi \frac{x}{a} \sin l\pi \frac{y}{b} \sin m\pi \frac{z}{c} \cos (2\pi\nu t - \varphi)$$

$$d_y = A\beta \sin k\pi \frac{x}{a} \cos l\pi \frac{y}{b} \sin m\pi \frac{z}{c} \cos (2\pi\nu t - \varphi) \quad \text{enz.}$$

$$h_x = A\alpha^* \sin k\pi \frac{x}{a} \cos l\pi \frac{y}{b} \cos m\pi \frac{z}{c} \sin (2\pi\nu t - \varphi) \quad \text{enz.}$$

waarin de richtingscosinussen $(\alpha\, \beta\, \gamma)$ en $(\alpha^*\, \beta^*\, \gamma^*)$ behooren bij twee richtingen die onderling en op de richting $(k\, l\, m)$ loodrecht zijn, A de amplitude en φ de phase aangeeft, terwijl het trillingsgetal is

$$\nu = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2}} \quad ,$$

De tweede trilling vindt men hieruit door als richtingscosinussen $(\alpha^*\, \beta^*\, \gamma^*)$ en $(-\alpha\, -\beta\, -\gamma)$ te nemen, en in 't algemeen een andere amplitude en phase. Het aantal hoofdtrillingen tusschen ν en $\nu + d\nu$ is

$$n = \frac{8\pi\nu^2\, d\nu}{c^3}\, a\, b\, c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Deze bekende uitkomsten gebruiken we om de energie in de eene helft van onze ruimte, waarvoor x tusschen 0 en $\frac{1}{2}\, a$ ligt, te berekenen. Het spreekt vanzelf, dat daarbij geenerlei scheidingswand aangebracht mag worden, aangezien de gegeven formules slechts voor de onverdeelde ruimte gelden. Men vindt de bedoelde energie uit de algemeene formule

$$\varepsilon = \int \tfrac{1}{2}\, (d^2 + h^2)\, dS = \int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^b\int_0^c \tfrac{1}{2}\, [(\Sigma\, d_x)^2 + (\Sigma\, d_y)^2 + (\Sigma\, d_z)^2 +$$
$$+ (\Sigma\, h_x)^2 + (\Sigma h_y)^2 + (\Sigma\, h_z)^2]\, dx\, dy\, dz$$

waarbij de sommaties over alle trillingen genomen moeten worden. Hierbij treedt verder *niet* de vereenvoudiging op die men bij 't uitstrekken van de integraal over de geheele ruimte $a\, b\, c$ vindt, dat de producten van ongelijke factoren, die bij het ontwikkelen der kwadraten ontstaan, bij het integreeren wegvallen. Daaruit volgt dat hier voor trillingen in de speelruimte $d\, \nu$ eigenlijk niet de onderstelling I geldt, d.w.z. dat men die trillingen voor het berekenen van de energie van één helft niet afgezonderd kan beschouwen. Uit onze verdere berekening blijkt evenwel dat dit toch bij benadering mogelijk is indien slechts een groot aantal trillingen in de beschouwde speelruimte valt.

Bij gebrek aan kennis van de wijze waarop de trillingen tot stand gekomen zijn, zullen we verder de amplituden voor alle beschouwde

trillingen — we spreken slechts van die in de speelruimte dv — gelijk nemen en hun phasen volgens het toeval verdeeld.

Denken we nu $\frac{1}{2}(\Sigma d_x)^2$ ontwikkeld, en in de eerste plaats de optredende kwadraten geïntegreerd. Deze leveren eenvoudig de helft van de totale energie, m. a. w. de gemiddelde energie in het halve volume $\bar{\varepsilon}$. De afwijking daarvan vinden we dan juist uit de dubbele producten. Elk paar drietallen klm, $k'l'm'$ levert vier dubbele producten. Deze zullen bij het integreeren over z wegvallen, tenzij $m = m'$ is. Evenzoo moet $l = l'$ zijn. De integratie levert dan

$$\frac{a\,b\,c}{8\pi} A^2 \alpha\,\alpha' \left[\frac{\sin (k-k')\frac{\pi}{2}}{k-k'} + \frac{\sin (k+k')\frac{\pi}{2}}{k+k'}\right] \cos (2\pi\nu t-\varphi) \cos (2\pi\nu' t-\varphi')$$

hetgeen alleen van nul verschilt als $k-k'$ oneven is. De belangrijkste bijdrage tot de gezochte energiewisseling wordt blijkbaar geleverd door de paren waarvoor $k-k'$ klein is, gelijk aan 1, 3, 5 enz. De tweede term tusschen [ ] komt dan tegenover den eersten niet in aanmerking. Met dezelfde benadering zullen we, voor een van de vier dubbele producten, $\alpha = \alpha'$ kunnen nemen. In de drie andere komen dan $\alpha\alpha^*$, $\alpha^*\alpha$ en α^{*2} voor. Voegt men verder voor de vier beschouwde paren trillingen de termen uit de andere componenten en die uit $\frac{1}{2}h^2$ bij dezen eersten term, dan komt er

$$\frac{a\,b\,c}{8\pi} A^2 \frac{\sin (k-k')\frac{\pi}{2}}{k-k'} \cos\{2\pi(\nu-\nu')\,t-(\varphi-\varphi')\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

voor het eerste paar en dezelfde vorm maar met andere waarde van de phase $\varphi-\varphi'$ voor het vierde paar, terwijl de twee andere paren nul geven.

Men vindt dus de afwijking $\varepsilon-\bar{\varepsilon}$ door uitdrukking (5) te sommeeren over alle paren trillingen. Wat echter berekend moet worden is de gemiddelde waarde van het kwadraat van die som. De dubbele producten die in dat kwadraat optreden zullen gemiddeld nul zijn door de ongelijke frequentie of phase van beide factoren, zoodat alleen de som der kwadraten overblijft, waarin het kwadraat van den cosinus $\frac{1}{2}$ oplevert. Dus

$$\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\,b\,c}{8\pi}A^2\right)^2 n \sum_1^\infty \frac{\sin^2 \varkappa\frac{\pi}{2}}{\varkappa^2}$$

daar er n trillingen zijn die we elk als eerste van een aantal paren kunnen nemen. De laatste factor is

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

en de amplitude A hangt met de totale energie $2\bar{\varepsilon}$ samen:

$$\frac{a\,b\,c}{16} A^2\, n = 2\bar{\varepsilon}$$

waarmee men vindt

$$\frac{\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2}}{\bar{\varepsilon}^2} = \frac{1}{n} = \frac{c^3}{16\pi\, \nu^2\, d\nu\, v} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

waarin $v = \frac{1}{2}\, abc$ het beschouwde volume is [1]).

Inderdaad vinden we dus den tweeden term van EINSTEIN's formule, indien die nog gedeeld wordt door $1 + \frac{v}{V}$, in dit geval door 2 (zie V en (3). Dit is wat wij boven conclusie a genoemd hebben [2]).

3. EINSTEIN heeft geen rekening gehouden met de mogelijkheid dat de tegenspraak tusschen zijn formule V en de theoretisch-optische berekening van de interferentie-wisselingen aan een onjuistheid in zijn, in den grond zoo eenvoudige, afleiding zou zijn toe te schrijven. Hij stelt dan ook „die tatsächlische statistischen Eigenschaften der strahlung" tegenover het resultaat van „klassieke" berekeningen [3]).

We meenen de fout in 't volgende te moeten zoeken.

LAUE [4]) heeft uitvoerig het gedrag van de entropie bestudeerd voor onderling interfereerende stralenbundels. Wil men de tweede hoofdwet voor die gevallen handhaven, dan is het noodig, zoo toont hij aan, de stelling te laten vallen dat de totale entropie gelijk is aan de som van de entropieën der deelen. Nu is het duidelijk dat in het boven beschouwde paralellepipedum de toestanden in beide helften nauw met elkander samenhangen. Men kan, in plaats van met trillingswijzen, hier ook wel met lichtbundels werken. Dezelfde bundels doorloopen dan steeds beide helften, m. a. w. er is volkomen cohaerentie tusschen beide. In dat geval moet men volgens LAUE de totale entropie zóó berekenen, dat men de beide energieën optelt en de entropie bepaalt die aan de waarde van de totale energie

---

[1]) Men kan zonder meer een willekeurig deel van het parallelepipedum beschouwen, krijgt dan een trigonometrische reeks te sommeeren en vindt daarmee dezelfde afhankelijkheid van de verhouding van beide deelen als in (3).

[2]) De analoge berekening met behulp van stralenbundels is reeds door LORENTZ gegeven (Théories statistiques Note IX). Ook in verband met hetgeen volgt leek het ons noodig te doen zien dat de beschouwing der trillingswijzen tot hetzelfde resultaat voert.

[3]) Physik. Z. **10**, 189.

[4]) Ann. d. Physik. (4) **20**, 365, (1906) en **23**, 1, 795 (1907).

beantwoordt. Daar in onze besloten ruimte de totale energie constant blijft, vindt men daaruit ook een *onveranderlijke* totale entropie.

Met behulp van de hoofdtrillingen komen we tot hetzelfde resultaat zonder gebruik te maken van de beschouwingen van LAUE. Voor elke trillingswijze afzonderlijk kan men, uit de energie als functie van de temperatuur, de entropie berekenen. Aangezien de verschillende trillingen geheel onafhankelijk van elkaar zijn, vindt men de totale entropie door sommeeren. In ons geval blijft elke trilling ongestoord voortbestaan, zijn entropie is dus constant en evenzeer de totale entropie.

Hiermee zijn de uitspraken *b* en *d* gevonden.

Men kan de vraag stellen of de cohaerentie en daarmee de niet-addiviteit der entropie vermeden kan worden door het te beschouwen deel der ruimte slechts door een nauwe opening met de rest in verbinding te stellen. We zullen bijv. van de ruimte *a b c* niet langer *in gedachte* de twee helften beschouwen, maar een volkomen spiegelend tusschenschot, waarvoor $x = \frac{1}{2}$ is, aanbrengen, waarin een zeer kleine opening gemaakt is. Aan beide zijden van het schot zijn dan ruimten met *volkomen* gelijke trillingsgetallen gelegen, die slechts door de opening met elkaar samenhangen. Het is bekend dat in dit geval de koppeling, hoe zwak ook, toch een groot effect heeft; de energie van elke trillingswijze daalt telkens tot nul aan één zijde en heeft dan de grootste waarde aan de andere zijde.

Door verzwakken van de koppeling verlengt men alleen de periode waarin deze wisseling plaats vindt. Laat één trilling in de eene helft gemiddeld een energie ζ hebben, dan wisselt de energie dus tusschen 0 en 2 ζ en het gemiddelde kwadraat van de afwijking is $\frac{1}{2}\,\zeta^2$.

Voor alle trillingswijzen, $\frac{n}{2}$ in aantal, vinden we dus

$$\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2} = \frac{n}{4}\,\zeta^2 = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{n}$$

dus een even groote waarde als volgens (6) zonder het tusschenschot. Blijkbaar hebben we hier met een singulier geval te doen, want de geringste verplaatsing van het doorboorde tusschenschot zal de volkomen gelijkheid van de frequenties in beide helften verstoren, en daarmee het geheele verschijnsel totaal veranderen. Een bekende uitkomst — voor twee gekoppelde stelsels met elk één vrijheidsgraad — leert immers dat het overgaan van de energie van het eene op het andere stelsel in mindere mate optreedt wanneer geen volkomen resonantie bestaat, en wel des te minder naar mate de koppeling zwakker is. Ook in ons geval waar elk stelsel oneindig

veel trillingswijzen heeft, moet iets dergelijks optreden. Dat wil dus zeggen, dat men dan, door de opening klein genoeg te kiezen, de energiewisselingen zoo klein kan maken als men verkiest. Daarmee nadert blijkbaar tevens de cohaerentie van beide helften tot nul, en herkrijgen dus hun entropieën de additieve eigenschap.

Er moet dus een andere reden zijn waarom in het nu geconstrueerde geval — onnauwkeurige verdeeling in helften door een wand met zeer kleine opening — de afleiding van EINSTEIN niet opgaat, en er in 't geheel geen wisselingen optreden. Men denke zich hier een begintoestand waarbij de eene helft met straling gevuld is, de andere geheel zonder straling. Volgens onze beschouwingen zal de energie der tweede helft dan van nul gaan verschillen, maar slechts *in zeer geringe mate.*[1]) Dat beteekent dus dat EINSTEIN's onderstelling II, gemiddeld gelijkmatige verdeeling van de energie over beide deelen, niet meer doorgaat (conclusie *c*). Er treden weinig of geen energie-wisselingen op, eenvoudig omdat *de mogelijkheid van energie-overgang* tusschen de deelen onvoldoende aanwezig is. Die mogelijkheid is blijkbaar onverbrekelijk verbonden aan de cohaerentie.

B. Straling met materie.

4. In het volgende beschouwen we een afgesloten stralingsruimte die aan materie grenst en vragen naar de energie-wisselingen van de straling in de speelruimte dv, daarbij de doorstraalde ruimte steeds in haar geheel nemende.

Blijkbaar vervallen daarvoor de boven ontwikkelde bezwaren tegen afleiding van EINSTEIN's formule, zoodat men op goede gronden wisselingen verwachten kan van de grootte gegeven door V of (3). In de laatste formule kan daarbij $V = \infty$ genomen worden indien slechts de warmte-capaciteit van het lichaam groot genoeg is.

Twee jaar geleden heeft EINSTEIN een nieuwe methode aangegeven om de stralingswet af te leiden. We zullen van de volgende daar gebruikte onderstellingen uitgaan:

1°. De inwendige energie der atomen neemt slechts een aantal discrete waarden aan. ε_1 en ε_2 zijn b. v. twee daarvan, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

2°. De verhouding van het aantal atomen in den toestand 1 tot dat in den toestand 2 is, tengevolge van de warmtebeweging der

---

[1]) Deze uitkomst schijnt op het eerste gezicht verwonderlijk. Men bedenke echter, dat de koppeling des te zwakker moet zijn naarmate de frequenties minder verschillen. Als men de ruimten grooter neemt zal daarom de opening kleiner moeten zijn. Ons resultaat geldt dus niet wanneer één van de ruimten onbegrensd is.

materie van de temperatuur T waarmee de resonatoren in evenwicht zijn, evenredig met $e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} : e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}$, onafhankelijk van de straling.

3°. De overgang $2 \rightarrow 1$ kan spontaan plaats hebben onder emissie van straling waarvan frequentie bepaald wordt door de betrekking van BOHR $h\nu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$.

4°. Straling van die frequentie kan onder absorptie den overgang $1 \rightarrow 2$ bewerken, maar ook, onder emissie, de tegenovergestelde.

EINSTEIN voert verder de kansen in dat in een kleinen tijd τ elk van de genoemde overgangen plaats heeft. Bij de onder 4° genoemde processen neemt hij die kansen evenredig met de gemiddelde stralingsdichtheid. Wij zullen ze evenredig met de werkelijk heerschende dichtheid aannemen. De formules worden doorzichtiger, wanneer in plaats van die dichtheid het aantal porties $h\nu$ ingevoerd wordt, dat blijkbaar een geheel getal moet zijn.

Voor een lichaam en holte van bepaalden aard, vorm, enz. voeren we nu de volgende grootheden in:

n aantal elementaire hoeveelheden in de stralingsruimte
$a\tau$ kans op spontane emissie in den tijd τ
$pn\tau$ kans op emissie door stralingswerking in den tijd τ
$qn\tau$ kans op absorptie in den tijd τ

waarbij τ zoo klein gekozen wordt dat elk dezer processen in dien tijd nooit meer dan éénmaal voorkomt. Uit de onderstellingen 1°—4° volgt voor die grootheden: a en p zijn evenredig met het aantal atomen in toestand 2, q met dat in toestand 1 en dus

$$\frac{a}{p} = C_1 \qquad \frac{q}{p} = C_2\, e^{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT}} = C_2\, e^{\frac{h\nu}{kT}}$$

waarin C_1 en C_2 nog van ν kunnen afhangen. Beschouw nu onder alle toestanden die ons stelsel achtereenvolgens doorloopt een groot aantal N met bepaalde n, en volg die gedurende een tijdje τ. Bij eenige zal n met 1 toenemen, bij eenige met 1 afnemen, bij alle overige onveranderd blijven. Het eerste aantal bedraagt $(a + pn)\, \tau N$, het tweede $qn\tau N$. Gemiddeld over N toestanden is de toename van n dus

$$(a + pn - qn)\, \tau$$

Het gemiddelde van deze toename over alle doorloopen toestanden zal voor grooten tijd nul moeten zijn. Dit algemeene tijdgemiddelde door een streep aangevende heeft men dus

$$\overline{(a + pn - qn)\, \tau} = 0 \qquad a + p\overline{n} - q\overline{n} = 0$$

of

$$\overline{n} = \frac{a}{q-p} = \frac{C_1}{C_2 e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Uit de verschuivingswet en het gedrag bij groote T volgt dan verder C_1 evenredig $\nu^2 d\nu$ en $C_2 = 1$ en daarmee de stralingswet van PLANCK.

Voor verdere bespreking verwijzen wij naar het geciteerde artikel van EINSTEIN.

Bij emissie neemt n^2 toe met $2n + 1$, bij absorptie af met $2n-1$. Voor toestanden van bepaalde n is de gemiddelde toename van n^2 dus

$$(2n + 1)(a + pn)\tau - (2n-1)qn\tau$$

en het algemeene tijdgemiddelde van deze uitdrukking moet weer nul zijn, uitgewerkt:

$$2\overline{n}a + a + 2p\overline{n^2} + p\overline{n} - 2q\overline{n^2} + q\overline{n} = 0.$$

Substitueer hierin $a = (q-p)\,\overline{n}$ dan komt er

$$2(q-p)(\overline{n^2} - \overline{n}^2) + 2q\overline{n} = 0$$

of

$$\overline{n^2} - \overline{n}^2 = \overline{(n-\overline{n})^2} = \frac{q}{q-p}\overline{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Bedenkt men dat de gemiddelde stralingsenergie $\overline{\varepsilon} = u_\nu V d\nu = h\nu\overline{n}$ is, dan vindt men door (8) met $h^2\nu^2$ te vermenigvuldigen en $q/p = e^{\frac{h\nu}{k\tau}}$ in te voeren

$$\overline{(\varepsilon - \overline{\varepsilon})^2} = \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} h\nu\, u_\nu\, v\, d\nu$$

wat inderdaad overeenstemt met (3) voor $V = \infty$ [1]).

5. Wanneer $h\nu/_{Tk}$ groot is, kan men in (8) p verwaarloozen en vindt dus de bekende eenvoudige toevalsformule terug. [2]) De

---

[1]) Wij hebben hier alleen het gemiddelde kwadraat afgeleid omdat dat voor onze beschouwingen voldoende is. Het gelukt echter evenzeer uit de ingevoerde kansen de waarschijnlijkheid voor verschillende waarden van $n-\overline{n}$ af te leiden. Wij zullen de uitvoerige berekening uit een integraalvergelijking die benaderd door een differentiaalvergelijking kan worden opgelost, hier niet weergeven, maar volstaan met de opmerking dat voor groote n het resultaat een Gaussische wet is, die met (8) overeenstemt en die tevens de geldigheid van het principe van BOLTZMANN (IV) nader bevestigt.

[2]) Formule (8) kan ook op het volgende bekende geval worden toegepast. Beschouw een ideaal gas in een ruimte v, die met een andere ruimte V in verbinding staat. Laat n het aantal moleculen in v, N het totale aantal moleculen voorstellen. De kans dat in een tijd τ een molecuul uit v naar V gaat, is even-

stralingswet heeft dan den vorm van WIEN en dit verklaart dan de eerste uitkomsten van EINSTEIN in 1905, toen hij van de wet van WIEN uitging.

Kan men in (8) p niet verwaarloozen, dan worden de wisselingen dientengevolge grooter, zonder dat er sprake is van een onafhankelijke tweede oorzaak, die er een term bij oplevert. Inderdaad mist EINSTEIN's interpretatie in *dit* geval, waar we zijn formule bevestigd vinden, allen grond, omdat de energie van de *geheele* stralingsruimte niet door interferentie kan veranderen.

Uit onze afleiding van de formule van EINSTEIN ziet men *dat het verschijnsel der energie-wisselingen niet zijn oorzaak vindt in de discrete structuur der energie of in een discontinue uitbreiding, maar in het feit dat de energie slechts in afgepaste hoeveelheden aan de straling toe- en afgevoerd kan worden.*

Men kan ten slotte de energie-wisselingen in een *gedeelte* van de hier beschouwde stralingsruimte in het oog vatten. Laat dat deel een volume v, het overige deel V hebben. De wisselingen tengevolge van de onregelmatige emissie en absorptie verdeelen zich gelijkmatig over de geheele ruimte, zoodat men $\frac{\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}}{\bar{\varepsilon}}$ voor het deel zal vinden door de overeenkomstige waarde voor het geheele volume $v+V$ te vermenigvuldigen met $\frac{v}{v+V}$ dus

$$\frac{\overline{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}}{\bar{\varepsilon}} = h\nu \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \frac{v}{v+V} = h\nu \frac{v}{v+V} + \frac{c^3 u_\nu}{8\pi\nu^2} \frac{v}{v+V}$$

waar de door EINSTEIN toegepaste splitsing gebruikt is. Hierbij zullen we de bijdragen van de interferentie-wisselingen optellen. Voor deze geldt volgens (6)

---

redig met de dichtheid n v, de kans op de omgekeerde verandering evenredig met de dichtheid $\frac{N-n}{V}$ in het andere deel. Mathematisch heeft men hier dus het boven behandelde geval als men stelt $q = \frac{C}{v}$ $p = -\frac{C}{V}$ $a = \frac{CN}{V}$ waarmee (7) en (8) geven.

$$\bar{n} = \frac{N}{v} \frac{1}{\frac{1}{v}+\frac{1}{V}} = N \frac{v}{V+v}; \quad \overline{(n-\bar{n})^2} = \frac{\bar{n}}{1+\frac{v}{V}}$$

dus de bekende uitkomst, die men gewoonlijk vindt door de N molekulen volgens het toeval in de ruimte $V+v$ te plaatsen. Tegenover die *statische* methode kan men onze afleiding *dynamisch* noemen.

$$\frac{\overline{(\varepsilon-\overline{\varepsilon})^2}}{\overline{\varepsilon}}=\frac{c^3 u_\nu}{8\pi\nu^2}\frac{V}{v+V}$$

dus totaal

$$\frac{\overline{(\varepsilon-\overline{\varepsilon})^2}}{\overline{\varepsilon}}=h\nu\frac{v}{v+V}+\frac{c^3\nu_\nu}{8\pi\nu^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Laat v constant blijven, maar geef V allerlei waarden. De energie wisselingen in v worden dan volgens (9) kleiner, wanneer V grooter is en zijn 't grootst voor $V=0$. Merkwaardig is, dat de tweede term onafhankelijk van V is. Wanneer men van te voren den eisch stelde, dat de wisselingen in v onafhankelijk van V moeten zijn — wat voor de hand schijnt te liggen — dan zou dit het verdwijnen van den eersten term eischen. EINSTEIN heeft er reeds op gewezen, dat daaraan slechts voldaan wordt door de stralingswet van RAYLEIGH-JEANS.

Samenvattend meenen we aangetoond te hebben dat de formule van EINSTEIN voor de energie-wisselingen der straling alleen juist is in een ander geval dan het door hem beschouwde, dat zijn interpretatie van die formule daardoor vervalt en de energie-wisselingen daarom geen argument voor het bestaan van lichtatomen opleveren.

Wiskunde. — De Heer W. Kapteyn biedt een mededeeling aan van den Heer N. G. W. H. Beeger over: *„Bepaling van het aantal klassen der idealen van alle deellichamen van het cirkellichaam der m-de-machts-wortels uit de eenheid, waarbij het getal m door meer dan één priemgetal deelbaar is".*

(Mede aangeboden door den Heer Jan de Vries).

In twee vorige stukken[1]) heb ik de uitdrukking afgeleid voor 't aantal klassen der idealen van alle deellichamen van 't cirkellichaam der l^h-de-machts-wortels uit de eenheid. l was daarbij een priemgetal. Thans heb ik 't zelfde gedaan voor de deellichamen van alle andere cirkellichamen. Hiermede is dan van alle lichamen van Abel het aantal klassen bepaald. Het is merkwaardig dat de door mij afgeleide uitdrukkingen geheel dezelfde gedaante hebben als die van 't cirkellichaam zelf.

Slechts voor de deellichamen die bij cyclische ondergroepen behooren, was het aantal klassen reeds vroeger afgeleid, nl. door Fuchs[2]). Zijne beschouwingen zijn ingewikkeld en steunen natuurlijk nog niet op de tegenwoordige opvatting der theorie van de getallenlichamen. Zijne eindformules hebben niet de eenvoudige gedaante die ik thans voor *alle* deellichamen heb gevonden.

Bij het volgende gebruik ik steeds de theorie der getallenlichamen, zooals die is uiteengezet door Hilbert in zijn „Bericht über die Theorie der algebraïschen Zahlkörper"[3]). Het zal voortaan worden aangeduid door „H". Verder maak ik gebruik van de theorie der groepen van Abel en die der cirkellichamen, zooals die te vinden is in „Lehrbuch der Algebra" van Weber IIde deel bl. 38—86. Dit werk duid ik aan door „W".

I. *Beschouwingen over het cirkellichaam der m-de-machts-wortels uit de eenheid.*

§ 1. *De substituties van 't lichaam.*

De groep der substituties van 't bovengenoemde lichaam is een

[1]) Verslagen XXVII bl. 324 en 561.
[2]) Cr. Journ. B. 65. bl. 74.
[3]) Jahresb. d. D. M. V. B. 4

groep van ABEL, die isomorph is met de groep der getalklassen $(mod\, m)$ [1]), d. w. z. als

$$A_1, A_2, \ldots A_\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

de getallen zijn, die $< m$ en relatief priem met m zijn, en men stelt de substitutie

$$(Z, Z^{A_i}) \;,\; Z = e^{\frac{2\pi i}{m}}$$

voor door S_i, dan zijn de substituties van 't lichaam:

$$S_1, S_2, \ldots . S_\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

waarbij φ ter bekorting is geschreven voor $\varphi(m)$.

We zullen daarom de groep der getalklassen maar kortweg de groep van 't lichaam noemen. En wanneer we ondergroepen van de groep (2) noodig hebben, dan kunnen we evengoed de isomorphe ondergroep van (1) daarvoor in de plaats nemen. De groep (1) duiden we voortaan aan door de letter G.

Het getal m zij voortaan van de gedaante

$$m = 2_{h_*}\, l_1^{h_1}\, l_2^{h_2} \ldots .$$

ondersteld, waarbij l_1, l_2, ... verschillende oneven priemgetallen voorstellen.

Om de groep G door een basis voor te stellen [2]), onderstellen we dat $r_1, r_2, \ldots .$, resp. primitieve wortels zijn van $l_1^{h_1}$, $l_2^{h_2}$, ... Stellen we verder dat de getallen A_0, A_*, A_1 .... oplossingen zijn van de congruenties:

$$\begin{array}{llllll} A_0 \equiv -1 & (mod\; 2^{h_*}) \equiv 1 & (mod\; l_1^{h_1}) \equiv 1 & (mod\; l_2^{h_2}) & \ldots . \\ A_* \equiv \;\;\, 5 & \;\;\;\;,, \quad\;\; \equiv 1 & \;\;\;\;,, \quad\;\; \equiv 1 & \;\;\;\;,, & \ldots . \\ A_1 \equiv \;\;\, 1 & \;\;\;\;,, \quad\;\; \equiv r_1 & \;\;\;\;,, \quad\;\; \equiv 1 & \;\;\;\;,, & \ldots . \\ A_2 \equiv \;\;\, 1 & \;\;\;\;,, \quad\;\; \equiv 1 & \;\;\;\;,, \quad\;\; \equiv r_2 & \;\;\;\;,, & \ldots . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Ze vormen een basis van G. Ieder getal van G kan dus eenmaal, en niet meermalen, geschreven worden in den vorm

$$A_0^{u_0}\, A_*^{u_*}\, A_1^{u_1} \ldots . (mod\; m)$$

waarbij de exponenten voldoen aan de volgende voorwaarden, en heele getallen zijn;

$$0 \leqq u_0 < 2 \;;\; 0 \leqq u_* < \tfrac{1}{2}\varphi_* \;;\; 0 \leqq u_1 < \varphi_1 ; \ldots .$$

Ter bekorting is hier in plaats van $\varphi(2^{h_*})$, $\varphi(l_1^{h_1})$ enz. geschreven φ_*, φ_1 enz.

[1]) „W." bl. 74 en § 18.
[2]) „W" § 18.

Op te merken valt nog:
1°. Als $h_* = 0$ vervallen A_0 en A_*.
2°. Als $h_* = 2$ dan vervalt A_*.
3°. $h_* = 1$ kan voor het volgende buiten beschouwing blijven [1]).

§ 2. *De ontbindings- en traagheidsgroep der priemidealen.*

Theorema 1. De traagheidsgroep van een priemideaal $\mathfrak{P}$ dat niet op m deelbaar is, bestaat slechts uit de identieke substitutie.

Bewijs: We weten dat

$$x^m - 1 = (x-1)(x-Z)\ldots(x-Z^{m-1}).$$

Na deeling door $x-1$, volgt hieruit, voor $x=1$:

$$m = (1-Z)(1-Z^2)\ldots(1-Z^{m-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Iedere factor van 't rechterlid is dus niet deelbaar door $\mathfrak{P}$. Zij nu $S = (Z : Z^a)$ een substitutie van de traagheidsgroep, dan moet [2]):

$$S\,Z \equiv Z \; (mod\;\mathfrak{P})$$

dus

$$Z\,(Z^{a-1} - 1) \equiv (mod\;\mathfrak{P})$$

Volgens het voorgaande kan dit alleen als $a = 1$.

Theorema 2. De ontbindingsgroep van een niet in m opgaand priemideaal, dat op het priemgetal p deelbaar is, is

$$p, p^2, \ldots p^f \; (mod\; m)$$

als p^f de kleinste macht is van p die $(mod\, m)$ met de eenheid congruent is.

Bewijs: Zelfde als dat van Weber blz. 742 voor 't geval $m = l^h$.

Voor dat we nu de traagheidsgroep kunnen bepalen van de in m opgaande priemidealen, moeten we „Satz 146" van Hilbert aanvullen.

Theorema 3. In 't cirkellichaam gelden de volgende ontbindingen:

$$1 - Z^{n\frac{m}{2^{h_*-h_*'}}} = (\mathfrak{L}_{01} \ldots \mathfrak{L}_{0e_0})^{2^{h_*'}}$$

voor $h_*' = 0, 1, \ldots, h_*-1$, terwijl n alle getallen doorloopen kan die $< 2^{h_*-h_*'}$ zijn en niet deelbaar door 2.

$$1 - Z^{n\frac{m}{l_i^{h_i-h_i'}}} = (\mathfrak{L}_{i1} \ldots \mathfrak{L}_{ie_i})^{l_i^{h_i'}}$$

voor $h_i' = 0, 1, \ldots, h_i-1$, terwijl n alle getallen doorloopen kan, die $< l_i^{h_i-h_i'}$, zijn en die niet deelbaar zijn door l_i.

$$2 = (\mathfrak{L}_{01} \ldots \mathfrak{L}_{0e_0})^{\varphi_*}$$

[1]) „W." § 20.
[2]) „H." bl. 251.

$\mathfrak{l}_{0j}$ zijn priemidealen en f_0 is de kleinste exponent waarvoor $2^{f_*} \equiv 1 \left(mod \frac{m}{2^{h^*}} \right)$, terwijl $e_* f_* = \varphi \left(\frac{m}{2^{h*}} \right)$. De graad der priemidealen is f_*.

$$l_i = (\mathfrak{l}_{i1} \ldots . \mathfrak{l}_{ie_i})^{\varphi_i}$$

$\mathfrak{l}_{ij}$ zijn verschillende priemidealen van den graad f_i, als f_i de kleinste exponent is, waarvoor

$$l_i^{f_i} \equiv 1 \left(mod \frac{m}{l_i^{h_i}} \right) \text{ en } e_i f_i = \varphi \left(\frac{m}{l_i^{h_i}} \right)$$

Alle getallen van den vorm $1 - Z^g$ die niet onder de bovengenoemde voorkomen, zijn eenheden.

Bewijs: Volgens HILBERT [1]) gelden de in het theorema genoemde ontbindingen der priemgetallen 2 en l_i. Verder volgt uit (1) dat ieder getal van de gedaante $1 - Z^g$ óf een eenheid is, óf slechts deelbaar is door priemidealen die in m opgaan. Volgens HILBERT [2]) geldt in 't lichaam $k\left(e^{\frac{2\pi i}{2^{h_* - h_*'}}}\right)$ de ontbinding:

$$2 = \mathfrak{l}_0^{\,2^{h_* - h_*' - 1}} \text{ als } \mathfrak{l}_0 = \left(1 - Z^{\frac{m}{2^{h_* - h_*'}}}\right)$$

waarbij $\mathfrak{l}_0$ een priem-hoofdideaal is. Hieruit volgt de eerste der in 't theorema opgegeven ontbindingen voor 't geval $n = 1$.

Verder is in 't lichaam $k\left(e^{\frac{2\pi i}{l_i^{h_i - h_i'}}}\right)$

$$l_i = \mathfrak{l}_i^{\,\varphi(l_i^{h_i - h_i'})} \text{ als } \mathfrak{l}_i = \left(1_i - Z^{\frac{m}{2^{h_i - h_i'}}}\right)$$

waarbij $\mathfrak{l}_i$ een hoofd-priemideaal is. Hieruit volgt de tweede ontbinding die in 't theorema genoemd is, voor 't geval $n = 1$.

Om nu het bewijs te leveren voor de andere waarden van n, merken we op, dat in 't lichaam $k\left(e^{\frac{2\pi i}{2^{h_* - h_*'}}}\right)$ de ontbindingsgroep van 't priemideaal $\mathfrak{l}_0$ uit alle substituties van dat lichaam bestaat. Deze substituties zijn die, waardoor het voortbrengend getal $Z^{\frac{m}{2^{h_* - h_*'}}}$

1) „H". Satz 125.
2) „H". Satz 122.

vervangen wordt door de machten daarvan, met exponenten die $< 2^{h^*-h^{*'}}$ zijn en die niet deelbaar zijn door 2. Hieruit volgt de in 't theorema genoemde ontbinding voor de verschillende waarden van n. Op dezelfde wijze vindt men de andere ontbindingen.

Om nu 't laatste gedeelte van 't theorema te bewijzen, merken we op dat 't product van alle getallen van den vorm $1-Z^g$ waarvan de ontbinding reeds is gevonden, deelbaar is door een macht van 't product

$$\mathfrak{L}_{01} \ldots \mathfrak{L}_{0e_0}$$

waarvan de exponent gelijk is aan

$$\varphi(2^{h_*}) + 2\varphi(2^{h_*-1}) + \ldots + 2^{h_*-1}\varphi(2) = h_* \varphi_*$$

en ook deelbaar door een macht van 't product

$$\mathfrak{L}_{i1} \ldots \mathfrak{L}_{ie_i}$$

die tot exponent heeft

$$\varphi(l_i^{h_i}) + l_i\varphi(l_i^{h_i-1}) + \ldots + l_i^{h_i-1}\varphi(l_i) = h_i\varphi(l_i^{h_i})$$

Men vindt gemakkelijk dat m ook juist door dezelfde machten der genoemde producten deelbaar is. Uit (1) volgt daarom dat alle getallen $1-Z^g$ waarvan de ontbinding nog niet gevonden is, eenheden zijn.

Theorema 4. De traagheidsgroep van een in l_i opgaand priemideaal $\mathfrak{L}$ bestaat uit de φ_i substituties die Z vervangen door de machten van Z waarvan de exponenten zijn

$$1 + n\frac{m}{l_i^{h_i-h_i'}} \quad , \quad h_i' = 0, 1, \ldots h_i-1 \quad , \quad n < l^{h_i-h_i'}$$

en niet deelbaar door l_i, voor zoover deze getallen relatief priem zijn met m. Hierbij kan l_i ook het in m opgaand priemgetal 2 voorstellen, wanneer men verder den index i vervangt door $*$.

Bewijs: Een substitutie S is dan en slechts dan een substitutie van de traagheidsgroep als voor alle geheele getallen Ω van 't lichaam

$$S\,\Omega \equiv \Omega \ (mod\ \mathfrak{L}) \text{ [1]}$$

Door dit toe te passen op 't geheele getal

$$\Omega = Z$$

vindt men gemakkelijk het bewijs als men van 't vorige theorema gebruik maakt.

Theorema 5. De ontbindingsgroep van een in l_i opgaand priemideaal $\mathfrak{L}$ wordt verkregen door de substituties van de traagheidsgroep van $\mathfrak{L}$ te vermenigvuldigen met de f_i eerste machten van de substitutie

[1] „H." 251.

$$l_i + n\frac{m}{l_i^{h_i}}$$

als dit getal datgene van G is dat $\left(mod\ \frac{m}{l_i^{h_i}}\right)$ met l_i congruent is.

f_i is de graad van $\mathfrak{L}$.

Hetzelfde geldt ook voor $l_i = 2$ als men i door $*$ vervangt.

Bewijs: Het lichaam $k = k\left(Z^{l_1^{h_1}}\right)$ behoort in $K = k(Z)$ tot de ondergroep

$$A_1,\ A_1^2, \ldots A_1^{\varphi_1}$$

De $\varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)$ substituties

$$A_0^{u_0}\ A_*^{u^*}\ A_2^{u_2} \ldots (mod\ m)$$

$$u_0 = 0,1\ ;\quad u_* = 0,1, \ldots \tfrac{1}{2}\,\varphi_* - 1\ ;\quad u_2 = 0,1, \ldots \varphi_2 - 1\ ; \ldots$$

leveren $\left(mod\ \frac{m}{l_1^{h_1}}\right)$ evenveel substituties van de groep van 't lichaam k op. Er is dus onder de getallen van G slechts één getal dat $\left(mod\ \frac{m}{l_1^{h_1}}\right)$ met l_1 congruent is. Dit zij het in 't theorema genoemde. We toonen verder aan dat de f_1 eerste machten van dit getal juist de groep opleveren waarmede de traagheidsgroep moet vermenigvuldigd worden om de ontbindingsgroep te krijgen. In k geldt de ontbinding:

$$l_1 = \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{e_1}\ ^{1})$$

waarbij $\mathfrak{P}_j$ verschillende priemidealen zijn.

Volgens theorema 2 is de ontbindingsgroep van $\mathfrak{P}_j$

$$l_i,\ l_i^2, \ldots l_i^{f_i}\ .$$

In K komen deze getallen overeen met de in 't theorema genoemde. Uit de ontbinding van l_i in K, volgens theorema 3, volgt nu, dat in K:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{L}_{i1}^{\varphi_i}$$

De substituties die $\mathfrak{P}_1$ onveranderd laten, laten dus ook $\mathfrak{L}_{i1}$ onveranderd. De in 't theorema genoemde getallen behooren dus tot de ontbindingsgroep. In verband met Satz 69 van Hilbert, volgt hieruit het te bewijzen theorema.

II. *De deellichamen van het cirkellichaam.*

§ 3. *Bepaling en eigenschappen van alle ondergroepen van G.*

Het cirkellichaam zelf stellen we verder voor door K. Bij iedere

[1] „H." Satz 125.

ondergroep van G behoort een deellichaam [1]). We beschouwen alleen primaire deellichamen [2]) hetgeen geen beperking is. Iedere ondergroep van G wordt op de volgende wijze bepaald [3]). Gegeven zijn de getalstelsels

$$\left.\begin{array}{c} b_{0n}\ ,\ b_{*n}\ ,\ b_{1n}, \ldots . \\ n = 1, 2, \ldots . \frac{\varphi}{r} \\ 0 \leqq b_{0n} < 2\,;\quad 0 \leqq b_{*n} < \tfrac{1}{2}\varphi_*\,;\quad 0 \leqq b_{1n} < \varphi_1\,; \ldots . \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

Om zulke stelsels te krijgen, kan men er eerst eenige verschillende opschrijven. Zonder dat dit invloed heeft op de te bepalen ondergroep [4]), kan men er dan andere stelsels bijvoegen totdat ze een groep vormen, d.w.z. zoodat de sommen der overeenkomstige getallen van twee stelsels, weer de getallen van een stelsel vormen; men rekent daarbij de getallen resp. volgens de moduli

$$2,\ \tfrac{1}{2}\varphi_*,\ \varphi_1, \ldots .$$

We zullen nu aannemen dat het systeem (1) een groep is. De orde is dan $\frac{\varphi}{r}$.

Zij nu

$$\varepsilon_0 = e^{\frac{2\pi i}{2}}\,;\quad \varepsilon_* = e^{\frac{2\pi i}{\frac{1}{2}\varphi_*}}\,;\quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\varphi_1}}\,; \ldots .$$

We beschouwen alle stellen van geheele getallen

$$a_0,\ a_*,\ a_1, \ldots .$$

$$0 \leqq a_0 < 2\,;\quad 0 \leqq a_* < \tfrac{1}{2}\varphi_*\,;\quad 0 \leqq a_1 < \varphi_1\,; \ldots .$$

waarvoor

$$\varepsilon_0^{a_0 b_{0n}}\ \varepsilon_*^{a_* b_{*n}}\ \varepsilon_1^{a_1 b_{1n}} \ldots . = 1.$$

$$n = 1, 2. \ldots . \frac{\varphi}{r}$$

De getallen

$$A \equiv A_0^{a_0} A_*^{a_*} A_1^{a_1} \ldots . (mod\ m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

vormen dan en slechts dan een primaire ondergroep als niet ieder getal b_{0n} door 2 deelbaar is; niet ieder getal b_{*n} door 2 deelbaar is; niet ieder getal b_{1n} door l_1 deelbaar is als $h_1 > 1$ en niet ieder getal b_{1n} door $l_1 - 1$ deelbaar is als $h_1 = 1$; enz. De orde van de ondergroep die door de getallen A gevormd wordt, is r. De voor-

[1]) „H." § 38.
[2]) „W." bl. 77.
[3]) „W." § 14.
[4]) „W." bl 56.

waarden, waaraan de getalstelsels $a_0, a_*, a_1, \ldots$ moeten voldoen, kunnen blijkbaar geschreven worden in den vorm

$$\tfrac{1}{2}\varphi(m)\,a_0\,b_{0n} + 2\varphi\left(\frac{m}{2^{h*}}\right)a_*\,b_{*n} + \varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)a_1\,b_{1n} + \ldots \equiv 0\ (mod\ \varphi) \quad (3)$$

$$n = 1, 2, \ldots \frac{\varphi}{r}$$

Ieder stelsel $a_0, a_*, \ldots$ voldoet dus aan alle congruenties (3).

De hier gedefinieerde ondergroep (der getallen A) van de groep G, zal verder worden aangeduid door g. Het daarbij behoorende deellichaam door k.

Omdat de ondergroep g primair wordt ondersteld, komen er niet in voor de getallen, die

$$\equiv 1\left(mod\,\frac{m}{2}\right) \text{ of } \left(mod\,\frac{m}{l_1}\right)\ldots$$

zijn en ook niet de getallen die een macht hebben die $(mod\ m)$ congruent is met een getal dat aan een of meer der congruenties

$$x \equiv 1\left(mod\,\frac{m}{2}\right),\ y \equiv 1\left(mod\,\frac{m}{l_1}\right),\ldots$$

voldoet [1])

Wanneer 't getal m slechts eenmaal den factor 2 bevat, heeft 't cirkellichaam geen primaire deellichamen. We behoeven dus slechts te beschouwen de gevallen $h_* = 0$, 2 of ≥ 3. Bij de verschillende bewijzen zullen we telkens 't laatste geval nemen, omdat het 't meest ingewikkelde is; 't is dan gemakkelijk na te gaan hoe 't bewijs moet veranderd worden voor de beide andere gevallen.

We maken nu nog de volgende belangrijke opmerking. De karakters van een ondergroep S van G, vormen zelf een groep, die isomorph is met S [2]). Het karakter van een element A is echter bepaald door het stel waarden

$$a_0, a_*, a_1, \ldots$$

Deze stellen getallen vormen dus eveneens een groep die isomorph is met S. Beschouwen we nu de getallen

$$B_n \equiv A_0^{\,b_{0n}}\,A_*^{\,b_{*n}}\,A_1^{\,b_{1n}}\ldots (mod\ m)$$

zoodat de stelsels

$$a_0,\ a_*,\ a_1 \ldots \text{ en}$$

$$b_{0n},\ b_{*n},\ b_{1n}, \ldots$$

[1]) „W." § 20 en 21.

[2]) „W." § 13.

voldoen aan de congruenties (3). Die getallen B_n vormen de reciproke groep van S.[1]) De stelsels

$$b_{0n}, b_{*n}, b_{1n}, \ldots .$$

vormen dus zelf ook weer een groep die isomorph is met de reciproke groep van S. We kunnen daarom zeggen: de stelsels

$$a_0, a_*, a_1, \ldots .$$

vormen een groep, waarvan de stelsels

$$b_{0n}, b_{*n}, b_{1n}, \ldots .$$

de reciproke vormen, als ze verbonden zijn door de congruenties (3). *Het product van de graden van beide groepen is dan gelijk aan* φ[2]).

§ 4. Hulptheorema's.

1. In een primaire ondergroep g komen, behalve de eenheid, geen getallen voor van een der volgende vormen:

$1 + n \dfrac{m}{2^{h_* - h_*'}}$ waarbij $h_* > h'_* > 1$ of waarbij $h'_* = 0$ is en n oneven of als $h_* = 2$, die waarbij $h'_* = 1$

$1 + n \dfrac{m}{l_i^{h_i - h_i'}}$ waarbij $h_i > h'_i \geq 1$, n niet deelbaar door l_i.

Bewijs:

Ten eerste merken we op dat, in 't geval $h_*' = 0$ de getallen van den eersten vorm niet in g voorkomen omdat ze even zijn en dus onderling deelbaar met m (als $h_* > 0$). Is $h_* = 2$ en $h_*' = 1$ dan komen die getallen niet voor volgens § 1.

Als verder een der overige getallen van den eersten vorm in g voorkwam, zou er een stel exponenten

$$a_0, \quad a_*, \quad a_1 \ldots .$$

bestaan, die voldoen aan (3) en zoodat

$$A_0^{a_0} A_*^{a_*} A_1^{a_1} \ldots . \equiv 1 + n \frac{m}{2^{h_* - h_*'}} (mod\ m)$$

Hieruit zou een congruentie $(mod\ 2^{h_*'} l_1^{h_1} \ldots)$ volgen, en dus volgens de definitie der basisgetallen:

$$A_1^{a_1} \equiv 1 \ (mod\ l_1^{h_1})$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

zoodat $a_1 = a_2 = \ldots . = 0$. Er zou dan overblijven

$$A_0^{a_0} A_*^{a_*} \equiv 1 \ (mod\ 2^{h_*'})$$

of

$$(-1)^{a_0} 5^{a_*} \equiv 1 \ (mod\ 2^{h_*'})$$

en hieruit volgt $a_* = 2^{h_*' - 2} a_*'$ en $a_0 = 0$ omdat $h_*' > 1$ is.

[1]) „W." bl. 56, 8.

[2]) „W." bl. 55, 7.

Door dit in de congruenties (3) te substitueeren, vindt men

$$2^{h_*'-1} a_*' b_{*n} \equiv 0 \ (mod\ 2^{h_*-1})$$

Omdat g primair is, zijn niet alle getallen b_{*n} door 2 deelbaar. Uit de congruentie volgt daarom dat a_*' deelbaar moet zijn door $2^{h^*-h^{*\prime}}$. Dat kan niet want dan zou a_* deelbaar zijn door 2^{h^*-2}, terwijl a_* juist kleiner is dan dat getal.

Op gelijke wijze wordt de rest van 't theorema aangetoond.

2. Zij l_1 een der oneven priemgetallen die in m opgaan. $\mathfrak{l}$ een priemideaal dat in l_1 opgaat. De graad van de grootste gemeenschappelijke ondergroep van g en de traagheidsgroep van $\mathfrak{l}$ is gelijk aan d_1, zijnde de grootste gemeene deeler van de getallen b_{1n}.

Is $h_* > 3$ en $\mathfrak{l}$ een in 2 opgaand priemideaal, dan is de gemeenschappelijke ondergroep van g en de traagheidsgroep van $\mathfrak{l}$ van den graad 1 of 2 al naardat $b_{0n} + b_{*n}$ niet voor alle waarden van n even is of wel.

Is $h_* = 2$ dan is de graad van de zooeven genoemde gemeenschappelijke ondergroep gelijk aan 1.

Bewijs: Volgens theorema 4 en 't vorige hulptheorema kunnen de substituties van de gemeenschappelijke ondergroep slechts zijn de getallen van den vorm $1 + n \dfrac{m}{l_1^{h_1}}$ waarbij n niet door l_1 deelbaar is. Als zoo'n getal tot g behoort, bestaat er een stel exponenten $a_0, a_*, a_1, \ldots$ zoodat

$$A_0^{a_0} A_*^{a_*} \ldots \equiv 1 + n \frac{m}{l_1^{h_1}} \ (mod\ m)$$

en die voldoen aan de congruenties (3). Evenals bij 't vorige bewijs leidt men hieruit af dat alle exponenten $= 0$ zijn, behalve a_1. Uit de congruenties (3) volgt dan dat

$$\varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right) a_1 \, b_{1n} \equiv 0 \ (mod\ \varphi)$$

of

$$a_1 \, b_{1n} \equiv 0 \ (mod\ \varphi_1) \quad n = 1, 2, \ldots \frac{\varphi}{r}.$$

Omdat niet alle getallen b_{1n} door l_1 deelbaar zijn volgt hieruit dat a_1 deelbaar moet zijn door $\dfrac{\varphi_1}{d_1}$.

Men toont gemakkelijk aan dat deze voorwaarde ook voldoende is, want zij

$$A_0^0 A_*^0 A_1^{\frac{\varphi_1}{d_1} a_1'} A_2^0 \ldots \equiv x \ (mod\ m) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dan volgt hieruit

$$1 \equiv x \left(mod \frac{m}{l_1^{h_1}} \right)$$

en dus $x = 1 + n \frac{m}{l_1^{h_1}}$. Hierbij is n niet door l_1 deelbaar want als dit wel zoo was, zou

$$x \equiv 1 \ (mod\ l_1)$$

zijn. Dus $A_1^{\frac{\varphi_1}{d_1} a_1'} \equiv 1 \ (mod\ l_1)$ volgens (4). Dit kan niet omdat $A_1 \equiv r_1$ $(mod\ l_1)$ en r_1 een primitieve wortel van l_1 is. Er zou nl. uit volgen dat $\frac{\varphi_1}{d_1} a'_1$ deelbaar is door l_1—1, dus a_1 zou deelbaar zijn door φ_1 terwijl $a_1 < \varphi_1$.

Beschouwen we nu 't tweede geval.

Volgens theorema 4 en 't vorige hulptheorema kunnen de bedoelde getallen slechts zijn van den vorm $1 + n \frac{m}{2^{h_*-1}}$ waarbij n oneven is. Als zoo 'n getal tot g behoort, bestaat er een stel exponenten a_0. a_*, . . . zoodat

$$A_0^{a_0} A_*^{a_*} A_1^{a_1} \ldots \equiv 1 + n \frac{m}{2^{h_*-1}} (mod\ m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hieruit volgt weer dat alle exponenten, behalve de eerste twee, gelijk aan nul zijn, Na substitutie in (3) vindt men

$$2^{h_*-3} a_0 b_{0n} + a_* b_{*n} \equiv 0 \ (mod\ 2^{h_*-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

We onderscheiden twee gevallen: $h_* > 3$ en $h_* = 3$.

In 't eerste geval is $a_* b_{*n} \equiv 0 \ (mod\ 2^{h_*-3})$. Omdat niet alle getallen b_{*n} even zijn, moet

$$a_* = 2^{h_*-3} a_*'$$

(6) gaat dan over in

$$a_0 b_{0n} + a_*' b_{*n} \equiv 0 \ (mod\ 2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nu is $a_* < \frac{1}{2}\varphi_*$ dus $a'_* < 2$. We behoeven dus slechts na te gaan welke der volgende combinaties aan deze congruenties voldoen:

$a_0 = 0,$	$a_*^1 = 0$
0	1
1	0
1	1

De tweede voldoet niet, omdat niet alle b_{*n} door 2 deelbaar zijn. Ook de 3[de] niet. De laatste alleen als $b_{on} + b_{*n}$ even is voor al de waarden van n. De eerste voldoet steeds.

Men toont nu, evenals vroeger, aan, dat deze twee voorwaarden voldoende zijn.

Nu het geval $h_* = 3$. Uit (6) volgt:

$$a_0 \ b_{0n} + a_* \ b_{*n} \equiv 0 \ (mod \ 2)$$

Verder geheel als 't vorige geval.

3. Zij p een priemgetal dat niet in m opgaat en waarvan de exponent $(mod \, m)$ gelijk is aan f. Zij d de graad van de grootste gemeenschappelijke ondergroep van g en de ontbindingsgroep van een priemideaal dat in p opgaat. Verder zij

$$p \equiv A_0^{a_{0p}} A_*^{a_{*p}} A_1^{a_{1p}} \ldots (mod \ m)$$

en t_p de grootste gemeene deeler van de getallen

$$\tfrac{1}{2} \varphi (m) \, a_{0p} \, b_{0n} + 2 \varphi \left(\frac{m}{2^{h_*}} \right) a_{*p} \, b_{*n} + \varphi \left(\frac{m}{l_1^{h_1}} \right) a_{1p} \, b_{*n} + \ldots .$$

$$n = 1, 2, \ldots . \frac{\varphi}{r}$$

dan is $\dfrac{f}{d} = \dfrac{\varphi}{t_p}$.

Bewijs: Volgens theorema 2 bestaat de in 't theorema genoemde ondergroep uit de d machten van p, waarvan de exponenten zijn

$$\frac{f}{d}, 2\frac{f}{d}, \ldots . d\frac{f}{d}$$

$p^{\frac{f}{d}}$ is dus de kleinste macht van p die tot de ondergroep g behoort; uit de congruenties volgt dus dat $\dfrac{f}{d}$ het kleinste getal is dat voldoet aan de congruenties

$$\tfrac{1}{2} \varphi (m) \, a_{0p} \frac{f}{d} b_{0n} + 2 \varphi \left(\frac{m}{2^{h_*}} \right) a_{*p} \frac{f}{d} b_{*n} + \ldots \equiv 0 \ (mod \ \varphi)$$

Hieruit volgt het theorema.

4. Zij l_1 een der in m opgaande priemgetallen (ook 2) en d_1' de graad van de grootste gemeenschappelijke ondergroep van g en de cyclische groep van den graad f_1, die in theorema 5 bepaald is. Stel dat voor 't in theorema 5 bepaalde getal de volgende congruentie geldt:

$$l_1 + \frac{m}{l_1^{h_1}} \equiv A_0^{a_0} A_*^{a_*} A_1^{a_1} \ldots (mod \ m)$$

Zij t_{l_1} de grootste gemeene deeler der getallen

$$\tfrac{1}{2} \varphi (m) \, a_0 \, b_{0n} + 2 \varphi \left(\frac{m}{2^{h_*}} \right) a_* \, b_{*n} + \ldots .$$

$$n = 1, 2, \ldots . \frac{\varphi}{r}$$

dan is $\dfrac{f_1'}{d_1'} = \dfrac{\varphi}{t_{l_1}}$. (Zie voor f_1 theorema 3).

Bewijs: Geheel als 't vorige.

§ 5. *Ontbinding der priemgetallen in priemidealen van 't deellichaam k.*

Door BACHMANN [1]) is de ontbinding behandeld der priemgetallen in een deellichaam van een lichaam van GALOIS. Deze beschouwingen zijn hier dus direct van toepassing. Ze worden iets vereenvoudigd omdat we hier te doen hebben met een lichaam van ABEL, zoodat de substituties de commutatieve eigenschap hebben.

Theorema 6. Is p een niet in m opgaand priemgetal en f de kleinste exponent, waarvoor $p^f \equiv 1$ $(mod\ m)$. Dan is p in k gelijk aan 't product van $\frac{ed}{r}$ verschillende priemidealen van den graad $\frac{f}{d}$. Daarbij is $ef = \varphi$.

Bewijs: De door BACHMANN op bl. 489 bepaalde groep, die g en sg_0s^{-1} gemeen hebben, wordt hier de groep die g en g_0 gemeen hebben. Deze is bepaald in § 2, 3. In 't complex (42) van B. komen dus, voor iedere substitutie s, d gelijke voor. Dus $\frac{rf}{d}$ verschillende. Daar G uit ef substituties bestaat, moet men $\frac{ed}{r}$ complexen (42) nemen. Het getal e van B. is dus hier $\frac{ed}{r}$ en de getallen h_i zijn hier alle gelijk aan d. Verder is op bladz. 494 $s_i g_t s_i^{-1}$ hier gelijk aan g_t, zoodat we nog de gemeenschappelijke ondergroep moeten bepalen van de traagheidsgroepen g. Volgens theorema 1 zijn dus alle getallen t_1 van B. hier $= 1$. Ook $r_t = 1$, zoodat de getallen d_i van B. hier ook $= 1$ zijn. Uit 't theorema dat B. op bl. 495 geeft, volgt nu hetgeen te bewijzen was.

Theorema 7.

Zij l_1 een oneven priemgetal dat in m opgaat en f_1 de kleinste exponent, waarvoor $l_1^{f_1} \equiv 1 \left(mod\ \frac{m}{l_1^{h_1}}\right)$ en $\varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right) = f_1 e_1$. Dan is l_1 in k gelijk aan de $\frac{\varphi_1}{d_1}$-de macht van het product van $\frac{e_1 d_1 d'_1}{r}$ verschillende priemidealen van den graad $\frac{f_1}{d'_1}$. Ieder zoo'n priemideaal is gelijk aan de d_1-de macht van 't product van $\frac{r}{d_1 d'_1}$ verschillende priemidealen van K.

Is $h_* \geqslant 3$ dan is het priemgetal 2 in k gelijk aan de φ_*-de macht,

---

[1]) Allgemeine Arithmetik der Zahlkörper, bl. 495.

of, als $b_{on} + b_{*n}$ voor al de waarden van n even is, gelijk aan de $\frac{1}{2}\varphi_*$-de macht van 't product van $\frac{e_* d'_*}{r}$, resp. $\frac{2 e_* d'_*}{r}$ verschillende priemidealen van den graad $\frac{f_*}{d'_*}$.

Ieder zoo'n priemideaal is gelijk aan de 1ste, resp. 2de macht van een product van $\frac{r}{d_*^1}$, resp. $\frac{r}{2 d_*^1}$ verschillende priemidealen van K.

Hierbij is f_* de kleinste exponent waarvoor $2^{f_*} \equiv 1 \left(mod\ \frac{m}{2^{h_*}} \right)$ en $\varphi\left(\frac{m}{2^{h_*}}\right) = f_* e_*$.

Is $h_* = 2$ dan geldt hetzelfde als boven gezegd is voor 't geval dat $b_{on} + b_{*n}$ niet voor alle waarden van n even is.

Het bewijs ligt weer opgesloten in de door Bachmann gegeven beschouwingen.

§ 6. *Bepaling van het grondgetal van 't deellichaam k.*

Theorema 8. Voor het grondgetal van 't deellichaam k geldt de volgende uitdrukking

$$d = \pm 2^{\varphi\left(\frac{m}{2^{h_*}}\right) \frac{(h_* - 1)\, 2^{h_* - 1} - 2t}{r}} \prod_i l_i^{\varphi\left(\frac{m}{l_i^{h_i}}\right) \frac{l_i^{h_i - 1}(l_i h_i - h_i - 1) - d_i + 1}{r}}$$

als $t = 0$ wanneer $b_{on} + b_{*n}$ niet voor alle getallen n even is of ook als $h_* = 2$ is; en $t = 1$ als $b_{on} + b_{*n}$ voor alle waarden van n even is.

Bewijs: Zij D het grondgetal van K, $\mathfrak{d}_k$ de relatieve discriminant, $\mathfrak{D}_k$ het relatieve grondideaal, dan gelden de volgende betrekkingen [1]):

$$D = d^r\, n(\mathfrak{d}_k); \quad \mathfrak{d}_k = N_k(\mathfrak{D}_k); \quad \mathfrak{D}_k = \mathfrak{E}^{(1)} \ldots \mathfrak{E}^{(r-1)}$$

$$\mathfrak{E}^{(1)} = \{(Z - Z^{A_j}), \quad (Z^2 - Z^{2A_j}), \ldots, (Z^{\varphi-1} - Z^{(\varphi-1)A_j})\}$$

$$j = 2, 3, \ldots, r$$

als A_j de getallen zijn die de groep g vormen. (Het zijn dus niet de basisgetallen van g) en $A_1 = 1$.

Daar D slechts door priemfactoren deelbaar is, die in m opgaan, zal volgens bovenstaande betrekkingen het element $\mathfrak{E}^{(j)}$ ook slechts deelbaar zijn door een of meer der priemidealen die in 2 of l_i opgaan. Verder blijkt uit de gedaante van het ideaal $\mathfrak{E}$ dat alle getallen ervan, slechts deelbaar zijn door het hoofdideaal $(Z - Z^{A_j}) =$

[1]) „H". Satz 38, 39, bl. 205. De relatieve discriminant wordt door Hilbert voorgesteld door D_k. $\mathfrak{D}_k$ noemt Hilbert Relativdifferente.

het hoofdideaal $(1 - Z^{A_j - 1})$. Als dit laatste getal een eenheid is, zal het element $\mathfrak{E}^{(j)}$ dus identiek zijn met het ideaal $\mathfrak{G}$ van alle geheele getallen van K. Dus alleen als A_j een getal is van de traagheidsgroep van een der priemidealen die in 2 of l_i opgaan, zal $\mathfrak{E}^{(j)}$ niet met $\mathfrak{G}$ identiek zijn, volgens theorema 3. Door toepassing van § 2. 2 en 't geen in 't bewijs daarvan, gevonden is over den vorm der substituties, en door theorema 3 vindt men:

$$\mathfrak{D}_k = (\mathfrak{L}_{01} \dots \mathfrak{L}_{0e_0})^{2t} \prod_i (\mathfrak{L}_{i1} \dots \mathfrak{L}_{ie_i})^{d_i - 1}.$$

Het product loopt over alle oneven priemgetallen l_i die in m opgaan. Verder is volgens theorema 7

$$N_k(\mathfrak{L}_{0j}) = \mathfrak{l}_{0j}^{d_*'} \quad \text{en} \quad N_k(\mathfrak{L}_{ij}) = \mathfrak{l}_{ij}^{d_i'}$$

als $\mathfrak{l}_{0j}$ een der in 2 opgaande priemidealen van k voorstelt en $\mathfrak{l}_{ij}$ een der in l_i opgaande priemidealen van k.

Maakt men nu gebruik van de in 't begin van 't bewijs opgegeven betrekkingen dan vindt men de verlangde uitkomst, als men D bepaalt volgens Satz 88 en Satz 121 van „H". Daarbij bedenkt men dat D en d reëele getallen zijn.

III. *Voornaamste hulptheorema's voor de berekening van het aantal klassen der idealen k.*

§ 7. *Theorema* 9.

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s}\right) = \prod_{n=1}^{\frac{f}{r}} \left\{1 - \left[\frac{p}{b_{0n}, b_{*n}. b_{1n}, \dots}\right] \frac{1}{p^s}\right\}$$

als in 't eerste product $\mathfrak{p}$ alle priemidealen van k doorloopt, die in p opgaan; in 't tweede product heeft het symbool $\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ de beteekenis die in § 116 van „H", wordt uiteengezet. Als $h_* = 2$ is, moet in 't symbool b_{*n} weggelaten worden en als $h_* = 0$ dan moet ook b_{0n} weggelaten worden.

Bewijs: We zullen van het rechterlid der vergelijking aantoonen: 1°. dat het daarin voorkomend symbool een $\frac{f}{d}$-de-machts-wortel uit de eenheid is en 2°. dat iedere $\frac{f}{d}$-de-machts-wortel uit de eenheid $\frac{ed}{r}$ malen in het product voorkomt. Hiermede zal dan 't bewijs van de gelijkheid gegeven zijn, want er volgt uit dat 't rechterlid gelijk is aan

$$\left(1 - \frac{1}{p^{\frac{f}{d}s}}\right)^{\frac{ed}{r}}$$

en volgens theorema 6 is deze uitdrukking gelijk aan 't eerste lid van de te bewijzen gelijkheid.

1°. Zij $p \equiv \pm 5^{p_*} (mod\ 2^{h_*})$

$p \equiv r_1^{p_1} (mod\ l_1^{h_1})$

. . . .

waarbij r_1, r_2, . . . , de reeds in 't begin gebruikte primitieve wortels voorstellen. Verder zij

e_0 de grootste gemeene deeler van $\frac{p-1}{2}$ en 2; $e_0 . f_0 = 2$ [1])

e_* ,, ,, ,, ,, ,, p_* en $\frac{1}{2}\varphi_*$; $e_* f_* = \frac{1}{2}\varphi_*$

e_1 ,, ,, ,, ,, ,, p_1 en φ_1 ; $e_1 f_1 = \varphi_1$

. . . .

Zooals direct uit de definitie der symbolen volgt, is dan

$\left[\frac{p}{2^2}\right]$ = een f_0-de-machts-wortel uit de eenheid en geen lagere,

$\left[\frac{p}{2^{h_*}}\right]$ = ,, f_*- ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,

$\left[\frac{p}{l_1^{h_1}}\right]$ = ,, f_1- ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,

. . . .

Zij nu g_0 = grootste gemeene deeler van f_0 en d_0,

g_* = ,, ,, ,, ,, f_* en d_*,

g_1 = ,, ,, ,, ,, f_1 en d_1,

. . . .

Dan is 't duidelijk dat

$\left[\frac{p}{2^2}\right]^{b_0 n}$ = een $\frac{f_0}{g_0}$-de-machts-wortel uit de eenheid is

$\left[\frac{p}{2^{h_*}}\right]^{b_* n}$ = ,, $\frac{f_*}{g_*}$,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,

$\left[\frac{p}{l_1^{h_1}}\right]^{b_1 n}$ = ,, $\frac{f_1}{g_1}$,, ,, ,, ,, ,, ,, ..

. . . .

Als nu v = kleinste gemeene veelvoud van $\frac{f_0}{g_0}, \frac{f_*}{g_*}, \frac{f_1}{g^1}, \ldots$ dan is

---

[1]) De letters e_0, f_0, e_*, f_*, e_1, f_1 enz. hebben bij dit bewijs dus een andere beteekenis dan in theorema 7.

$\left[\overbrace{b_{0n},\ b_{*n},\ b_{1n},\ldots\ldots}^{p}\right]$ = een ν-de-machts-wortel uit de eenheid.

We hebben nu nog aan te toonen dat $\frac{f}{d}$ deelbaar is door ν. Uit de definitie der getallen p_*, $p_1,\ldots.$ volgt dat

$\frac{p-1}{2} = a_{0p}$; $p_* = a_{*p}$, $p_1 = a_{1p}, \ldots.$, zie hulptheorema 3.

Uit de daar gegeven bepaling van t_p volgt dat dit getal de grootste gemeene deeler is van de getallen

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi_*\,\varphi_1\varphi_2\ldots.a_{0p}\,b_{0p} + 2\,\varphi_1\,\varphi_2\ldots.a_{*p}\,b_{*n} + \varphi_*\,\varphi_2\ldots.a_{1p}\,b_{1n} + \ldots.$$

$$n = 1, 2, \ldots.\frac{\varphi}{r}.$$

Omdat de G.G.D. van φ_1 en $a_{1p} = e_1$ en alle termen van bovengenoemde getallen door e_1 deelbaar zijn, is t_p door e_1 deelbaar en dus $t_p = e_1 \times$ G.G.D. van alle getallen

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi_* f_1\,\varphi_2\ldots.a_{0p}\,b_{0n} + f_1\,\varphi_2\ldots.a_{*p}\,b_{*n} + \varphi_*\,\varphi_{*2}\ldots.\frac{a_{1p}}{e_1}\,b_{1n}\ldots.$$

En omdat alle getallen b_{1n} deelbaar zijn door d_1, is $t_p = e_1 g_1 \times$ G.G.D. van alle getallen

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi_*\frac{f_1}{g_1}\varphi_2\ldots.a_{0p}\,b_{0n} + \frac{f_1}{g_1}\varphi_2\ldots.a_{*p}\,b_{*n} + \varphi_*\,\varphi_2\ldots\frac{a_{1p}}{e_1}\frac{b_{1n}}{g_1} + \ldots$$

Bovendien is $\frac{f}{d} = \frac{\varphi}{t_p} = \frac{\varphi_*\,\varphi_2\ldots.e_1\,g_1}{t_p}\cdot\frac{f_1}{g_1}$

De factor $e_1 g_1$ kan dus uit teller en noemer van de eerste breuk achter het = teeken worden weggedeeld. In den noemer blijft dan alleen de laatstgenoemde G.G.D. over. Als deze noemer nu nog een factor met $\frac{f_1}{g_1}$ gemeen heeft dan moet die factor deelbaar zijn op $\varphi_*\varphi_2\ldots.$, volgens de bepaling der G.G.D. Want $\frac{a_{1p}}{e_1}$ is relatief priem met φ_1 dus ook met $\frac{f_1}{g_1}$ en niet alle getallen $\frac{b_{1n}}{g_1}$ hebben nog een factor met φ_1 gemeen. Maar daaruit volgt dat iedere factor, die bedoelde noemer nog met $\frac{f_1}{g_1}$ gemeen heeft, ook in den teller van de eerste breuk achter het = teeken voorkomt. Men kan die factor er dus uit deelen, waarna de noemer relatief priem is met $\frac{f_1}{g_1}$.

Nu is $\frac{f}{d}$ geheel en ook $\frac{f_1}{g_1}$, waaruit volgt dat ook de eerste breuk

achter het $=$ teeken geheel is, m. a. w. $\frac{f}{d}$ is deelbaar door $\frac{f_1}{g_1}$. Analoog bewijs voor $\frac{f_*}{g_*}$ enz.

2°. Onderstellen we dat voor twee verschillende stellen waarden

$$b_{01},\quad b_{*1},\quad b_{11},\ \ldots .$$

en

$$b_{02}.\quad b_{*2},\quad b_{12},\ \ldots .$$

$$\left[\overbrace{b_{01},\ b_{*1},\ b_{11},\ldots\ldots}^{p}\right]=\left[\overbrace{b_{02},\ b_{*1},\ b_{12},\ldots\ldots}^{p}\right].$$

Na invoering van de waarden der symbolen, blijkt dat voldaan is aan de congruentie

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi\,(m)\,(b_{01}-b_{02})\,a_{0p}+2\varphi\left(\frac{m}{2^{h_*}}\right)(b_{*1}-b_{*2})\,a_{*p}+\ \ldots\equiv 0\ (mod\ \varphi).$$

Daar echter de stelsels der getallen b_{ji} een groep vormen, zullen de in deze congruentie optredende verschillen ook weer een stelsel vormen dat tot de groep der gegeven stelsels b_{ji} behoort. We moeten dus aantoonen dat aan de congruentie

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi\,(m)\,b_{0j}\,a_{0p}+2\varphi\left(\frac{m}{2^{h_*}}\right)b_{*j}\,a_{*p}+\varphi\left(\frac{m}{l_1^{\,h_1}}\right)b_{1j}\,a_{*p}+\ \ldots\equiv 0\ (mod\ \varphi)\quad (7)$$

voldaan wordt door $\frac{ed}{r}$ der gegeven stelsels van getallen b_{ji}. Want als dit bewezen is, is ook aangetoond dat telkens $\frac{ed}{r}$ stelsels van getallen b_{ji} aan het symbool $\left[\overbrace{b_{0n},\ b_{*n}\ldots .}^{p}\right]$ dezelfde waarde geven, m.a.w. een $\frac{f}{d}$-de-machts-wortel uit de eenheid komt onder de symbolen van het rechterlid der te bewijzen gelijkheid $\frac{ed}{r}$ malen voor en niet meermalen.

Alle stelsels der b's die aan de congruentie (7) voldoen, voldoen ook aan alle congruenties, die men uit (7) afleidt door voor a_{0p}, a_{*p}, ... in de plaats te stellen, de stelsels a_0, a_*, ... die de ondergroep g opleveren; juist volgens de bepaling dier laatste stelsels in § 3.

Dat zijn r stelsels. De getallen

$$p,\ p^2,\ \ldots .\ p^{\frac{f}{d}}$$

behooren, volgens het bewijs van hulptheorema 3, niet tot de ondergroep g. Bovendien is 't duidelijk dat alle stelsels der b's die aan (7) voldoen, ook voldoen aan de congruenties die men uit (7) kan afleiden door voor a_{0_p} . . . . achtereenvolgens in de plaats te stellen de stelsels

$$\begin{array}{llll} 2a_{0_p}, & 2a_{*p}, & 2a_{1p}, \dots . \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{f}{d}a_{0_p}, & \frac{f}{d}a_{*p}, & \frac{f}{d}a_{1p}, \dots . \end{array}$$

Dat zijn $\frac{f}{d}$ stelsels. Door de groep der eerstgenoemde r stelsels te vermenigvuldigen met de groep der laatste $\frac{f}{d}$ stelsels, krijgt men nu $\frac{rf}{d}$ stelsels der getallen a, die evenveel congruenties (7) geven, waaraan de gezochte stellen b's moeten voldoen. Volgens de opmerking aan 't eind van § 3 is nu het aantal der gezochte stelsels der b's gelijk aan $\varphi : \frac{rf}{d} = \frac{ed}{r}$, hetgeen te bewijzen was.

In 't product van 't rechterlid der te bewijzen gelijkheid, komen $\frac{\varphi}{r}$ factoren voor. Een $\frac{f}{d}$-de-machts-wortel komt $\frac{ed}{r}$ malen voor, zooals juist is aangetoond. Daar nu $\frac{ed}{r} \cdot \frac{f}{d} = \frac{\varphi}{r}$ is, zal ook *iedere* $\frac{f}{d}$-de-machts-wortel in 't product voorkomen.

Theorema 10.

$$\underset{\mathfrak{l}}{\Pi}\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l})^s}\right) = \underset{n}{\Pi}\left\{1 - \left[\overbrace{b_{0n}, \, b_{*n}, \, b_{2n}, \dots .}^{l_1}\right]\frac{1}{l_1{}^s}\right\}$$

Hierbij is l_1 een oneven priemgetal dat in m opgaat. In 't eerste product doorloopt $\mathfrak{l}$ alle priemidealen van k, die in l_1 opgaan. 't Tweede product loopt over alle stelsels der getallen b waarin $b_{1n} = 0$. Als $h_* = 2$ dan moet in 't symbool b_{*n} worden weggelaten; en als $h_* = 0$ moet ook b_{0n} worden weggelaten.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer H. GROOT: „*Over de Effectieve Zonnetemperatuur.*" (2de Mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer HAGA).

In een vorig artikel, van Maart 1919, werd aangetoond dat de bepaling van de effectieve zonnetemperatuur door toepassing van de stralingsformule van PLANCK op gegevens van ABBOT niet leidt tot eenzelfde temperatuur, onafhankelijk van de beschouwde lichtsoort, zooals A. DEFANT meende, maar dat daarentegen de aldus bepaalde T op stelselmatige wijze met λ verandert.

In dit artikel zal worden nagegaan wat de beteekenis der toen gevonden uitkomsten zou kunnen zijn.

Het is noodig vooraf zoo scherp mogelijk te omschrijven wat wij met den term „effectieve temperatuur" bedoelen, aangezien men aan deze uitdrukking niet algemeen dezelfde beteekenis toekent.

Dat wij niet van zonnetemperatuur zonder meer kunnen spreken, vindt zijn oorzaak eenendeels hierin, dat de zon niet op alle diepten dezelfde temperatuur heeft, (immers de thermodynamica leert, dat bij een uitgebreide gasmassa — als hoedanig wij de zon moeten beschouwen — de temperatuur van laag tot laag een andere is) en anderendeels daarin, dat wij ook niet de temperatuur van een bepaalde laag kunnen aangeven, noch bekend zijn met de manier waarop de temperatuur afhangt van den afstand tot het middelpunt van de zon.

Wèl kunnen wij echter aangeven welke temperatuur wij aan de zon zouden moeten toeschrijven, opdat zij zich, indien zij een absoluut zwart lichaam ware, *in een bepaald opzicht* juist zoo zou gedragen als wij in werkelijkheid waarnemen.

Men kan bijv. vragen welke temperatuur een „absoluut zwarte zon" zou moeten hebben, opdat de plaats van maximum intensiteit in haar spectrum dezelfde zou zijn als in het ware spectrum; of opdat de zonneconstante dezelfde waarde zou hebben als de experimenteel bepaalde. Op de 1ste vraag kunnen wij een antwoord vinden met behulp van de verschuivingswet van WIEN; op de 2de door toepassing van de formule van STEFAN-BOLZMANN.

De aldus gevonden temperatuur noemt men „effectieve" temperatuur.

Aangezien de zon nu eenmaal geen absoluut zwart lichaam is, behoeft het niet te verwonderen dat de effectieve zonnetemperaturen, die men op deze verschillende wijzen vindt, niet onderling gelijk zijn. Daarom is het noodzakelijk bij het aangeven van de effectieve temperatuur van de zon duidelijk voorop te stellen uit welke voorwaarde, opgelegd aan de temperatuur van het absoluut zwarte lichaam, dat wij voor de zon in de plaats gesteld denken, zij bepaald is.

In het volgende is nu gekozen de voorwaarde dat de energieverdeeling in het spectrum van het zwart lichaam, berekend volgens de wet van Planck, zoo goed mogelijk zal overeenkomen met die in het zonnespectrum, zooals dit door Abbot uit bologrammen is opgemaakt.

De temperatuur dus, die wij aan zulk een „zwarte zon" moeten toeschrijven, opdat deze voorwaarde vervuld zij, is de effectieve temperatuur waarover in dit artikel sprake zal zijn en waarvan wij gevonden hebben dat zij afhankelijk van de gekozen λ blijkt te zijn. Het verband tusschen T en λ is hieronder in tabel I nogmaals afgedrukt:

TABEL I.

λ_1	λ_2	T
0.4 m	0.5	(6400)
0.5	0.6	9000
0.6	0.7	10.000
0.7	0.8	9600
0.8	1.0	8000
1.0	1.2	5500
1.2	1.5	3800
1.5	1.8	(5400)
1.8	2.0	—

De manier waarop de waarden van T berekend zijn is in 't kort deze:

Uit de formule van Planck:

$$f \cdot I_\lambda = \frac{7{,}211 \, . \, 10^8}{\lambda^5 \left(10^{\frac{2{,}1562 \times 2890}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

volgt voor elke waarde van T en keuze van de eenheden (factor f)

een bepaalde kromme $I_\lambda = \varphi(\lambda)$, die de intensiteitsverdeeling in het spectrum van het absoluut zwarte lichaam voorstelt.

Omgekeerd zullen f en T te vinden zijn als I_λ voor twee waarden van λ bekend is.

Het waargenomen energiespectrum van de zon komt echter niet met het energiespectrum van het zwarte lichaam overeen, zoodat indien wij nu toch de formule van PLANCK gaan toepassen ter berekening van f en T uit de experimenteel bepaalde I_λ, de waarde van T zal afhangen van de plaats waar wij I_λ kiezen.

In de tabel I geven 1ste en 2de kolom de waarden van λ uit wier bijbehoorende I_λ de T der 3de kolom is berekend. De toepassing van de formule van PLANCK op het experimenteel bepaalde energiespectrum der zonnestraling heeft m.i. weinig zin, tenzij men dit werkelijk als nagenoeg overeenkomend met het spectrum van een absoluut zwart lichaam zou kunnen beschouwen — het kriterium waarvan zou bestaan in het vinden van dezelfde T uit willekeurig gekozen combinaties van I_λ.

Reeds in mijn vorig artikel schreef ik:

„De onderstelling, dat alle lichtsoorten tot ons komen van uit één fotosfeeroppervlak m. a. w. dat licht van alle golflengten uit éénzelfde diepte van de zon afkomstig zou zijn, blijkt ... hoe langer hoe meer onhoudbaar.

Indien echter in werkelijkheid licht van verschillende golflengte afkomstig is uit verschillende diepten van de zon, dan wordt het zéér de vraag of wij nog wel de formule van PLANCK mogen toepassen zooals wij dit DEFANT zagen doen".

Inplaats van te denken aan één fotosfeeroppervlak, zooals DEFANT, zouden wij nog kunnen probeeren waartoe de onderstelling leidt, dat de zon opgebouwd is uit een aantal concentrische „partiaalfotosfeeren", die ieder stralen als een absoluut zwart lichaam, zoodat de totale waargenomen straling opgebouwd wordt gedacht uit een aantal partiaalstralingen afkomstig uit verschillende lagen. In mijn vorig artikel sprak ik de verwachting uit, dat bij deze onderstelling, gezien het feit dat uit het werk van SPIJKERBOER en van CITTERT schijnt te volgen dat men over 't algemeen voor rood licht dieper in de zon kan zien dan voor violet, de effectieve temperatuur met de golflengte zou aangroeien.

Deze verwachting is onjuist gebleken. En bij nader inzien was zij ook ongegrond. Immers de effectieve temperatuur eener laag kan slechts afgeleid worden uit de energieverdeeling in haar spectrum — en daaromtrent leert ons het genoemde resultaat van SPIJKERBOER en van CITTERT niets. Intusschen is het de moeite waard de gevolgen

der hypothese van de „partiaalfotosfeeren" na te gaan, omdat het hierdoor wellicht duidelijk zal worden, hoe de volgens PLANCK bepaalde effectieve temperaturen niets anders dan rekengrootheden zijn, waaraan men nauwelijks fysischen zin kan hechten en die *zeker* geen inzicht geven in de werkelijke temperaturen op de zon.

Volgens onze veronderstelling dan, zou iedere fotosfeer, indien wij slechts een middel bezaten om uitsluitend licht te beschouwen, dat ons van uit deze fotosfeerschaal bereikt, haar eigen energiespectrum bezitten, dat van fotosfeer op fotosfeer verschillend zou zijn en wel om twee redenen:

ten 1ste omdat de werkelijke temperatuur in dieper gelegen lagen anders is dan in de buitenste;

ten 2de omdat de straling, die uit de diepere lagen tot ons komt, een grooter verlies door absorptie en verstrooiïng heeft ondergaan (en wel, wat de laatste oorzaak betreft, in veel sterker mate voor de kleinere golflengten, dan voor de grootere) tengevolge waarvan, zelfs als de werkelijke temperatuur der verschillende lagen overal dezelfde was, het waargenomen energiespectrum van laag tot laag toch anders zou zijn.

Wat wij evenwel waarnemen, is niet het door verstrooiing enz. gewijzigde spectrum van iedere laag afzonderlijk, maar de combinatie van al die spectra te samen.

Uit dit, allesbehalve „zwarte" spectrum op de besproken manier een effectieve temperatuur te willen afleiden, schijnt mij absoluut ongeoorloofd toe, daar juist niet voldaan is aan den fundamenteelen eisch, dat het gebruikte energiespectrum in hoofdtrekken gelijken zou op dat van een absoluut zwart lichaam.

Indien wij het procedee echter toch toepassen, behoeft het geen verwondering te baren dat de gevonden T's in hooge mate afhankelijk blijken van λ.

Dit laatste moge nog aan een sterk geschematiseerde voorstelling verduidelijkt worden.

Denken wij ons een energiespectrum, ontstaan door de superpositie van slechts twee spectra, afkomstig van twee werkelijk „zwarte" lichamen, die ongeveer evenveel tot de totale straling bijdragen doch wier temperaturen sterk uiteenloopen. Zulk een geval is voorgesteld in figuur 1.

Laat de kromme I beantwoorden aan de absolute temperatuur 3000°, de kromme II aan 1500°. De maxima liggen dan respectievelijk by $\lambda = 1\mu$ en $\lambda = 2\mu$. Sommatie van deze geeft de kromme III, doch daaruit is door halveering der ordinaten afgeleid IV wier inhoud wederom gelijk is aan den inhoud van elk der componee-

rende krommen, d. w. z. wij reduceeren alle gevallen op *gelijke totaalstraling*.

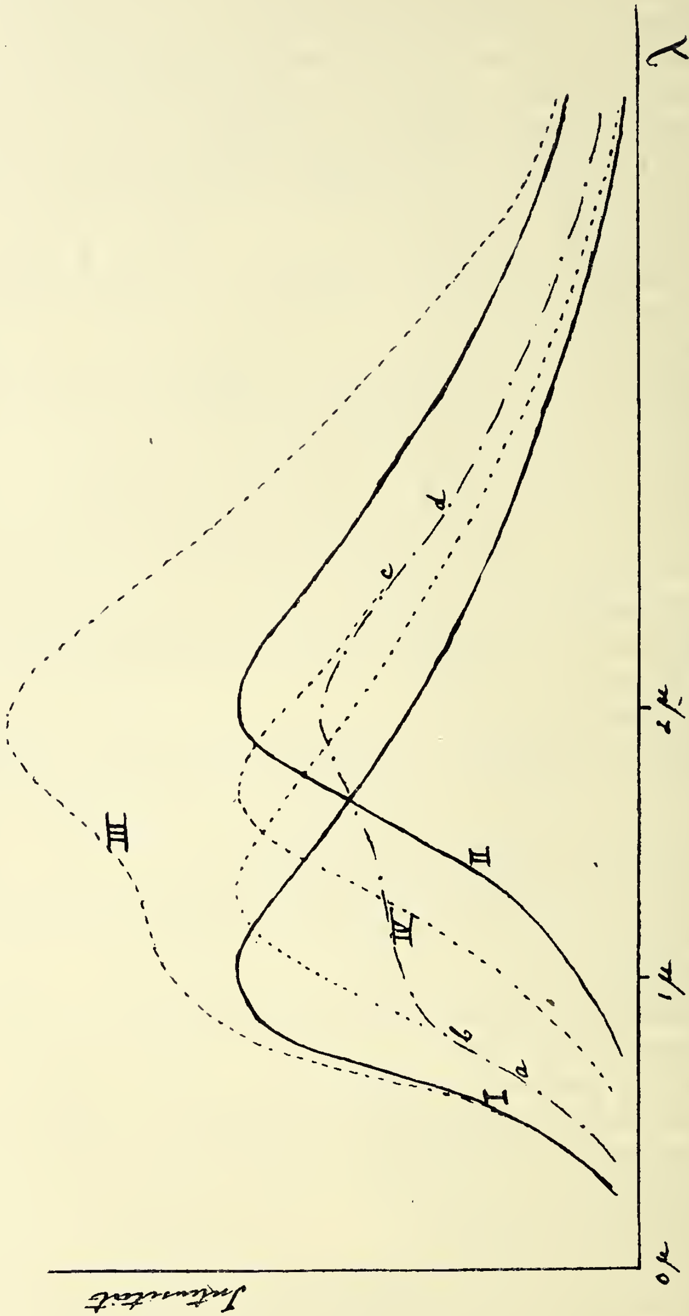


Fig. 1.

Men ziet nu gemakkelijk in, dat, wanneer men de temperatuur gaat afleiden uit den vorm van een klein deel (*ab* of *cd*) der sum-

matiekromme, dit deel daarbij telkens beschouwende als te behooren tot een energiekromme van een zwart lichaam, men voor *kleine* waarden van λ een temperatuur zou vinden, gelegen tusschen 3000° en 1500°, maar dichter bij 3000°, terwijl daarentegen voor groote waarden van λ een tusschenliggende temperatuur meer naar den kant van 1500° zou zijn gevonden.

(De twee gefingeerde tusschenliggende stralingskrommen van zwarte lichamen zijn gestippeld geteekend, zóó, dat elk wederom ongeveer denzelfden inhoud omsluit).

Nog sterker uiteenloopend zouden de temperaturen zijn, berekend voor verschillende waarden van λ, indien I niet de oorspronlijke energiekromme van een zwart lichaam ware geweest, doch wegens moleculaire verstrooing een veel sterker verloop aan den violetten kant had vertoond.

Terwijl voor de zon alles natuurlijk veel gecompliceerder is dan in deze voorbeelden, blijft de gevolgtrekking geldig, dat T afhankelijk van λ moet worden gevonden, indien onze onderstelling gewettigd mocht zijn, dat elke laag straalt als een zwart lichaam. Maar hoewel deze hypothese dus tot op zekere hoogte rekenschap geeft van de veranderlijkheid der gevonden waarden van T met λ, en in zooverre te verkiezen is boven de stellig onhoudbare onderstelling van Defant en anderen, dat de zonnestraling zou uitgaan van één enkele absoluut zwarte fotosfeeroppervlakte — bevredigend kan de hypothese der „partiaalfotosfeeren" toch ook niet worden genoemd.

Zoolang men niet langs andere wegen eenig inzicht verkregen heeft in het emissievermogen van de opeenvolgende lagen der zonnemassa en van de mate, waarin deze de verschillende lichtsoorten verstrooien en absorbeeren, is uit de energieverdeeling in het zonnespectrum zoo goed als niets af te leiden aangaande temperaturen op de zon.

Het begrip „effectieve zonnetemperatuur" heeft weinig waarde. Die temperatuur toch valt zeer verschillend uit, al naar gelang van de wijze, waarop men haar definieert, en geene der definities levert eenigen waarborg, dat men daarbij een benadering vindt van temperaturen, die werkelijk op de zon heerschen.

Physiologie. — De Heer HAMBURGER biedt een mededeeling aan, getiteld: *„Voortgezette onderzoekingen over de Permeabiliteit der Glomerulusmembraan voor Stereoisomere Suikers."*

Vroeger[1]) werd aangetoond, dat wanneer de vloeistof, die door het vaatstelsel der nieren gevoerd wordt, een doelmatige samenstelling bezit, de in die vloeistof opgeloste druivensuiker door de glomerulusmembraan wordt tegengehouden. Daarbij speelt het gehalte der vloeistof aan Ca-ionen en H-ionen de hoofdrol. Deze retentie van glucose is zeer merkwaardig, daar andere krystalloiden zooals keukenzout, sulfaten en phosphaten, door de glomerulusmembraan niet worden tegengehouden. De vraag werd nu geopperd, wat de oorzaak wel zijn kon van dit doelmatige gedrag van glucose: lag het aan de grootte van het molecuul? Deze onderstelling moest vervallen, toen het bleek, dat lactose ($C_{12}H_{22}O_{11}$), dat een bijna dubbel zoo groot moleculair gewicht bezit, er volkomen doorheen ging, wat eveneens het geval was zelfs met raffinose ($C_{18}H_{32}O_{16}$). Er bleef toen niets anders over dan aan te nemen, dat het verschijnsel aan een bijzondere configuratie van het glucosemolecuul toe te schrijven was[2]).

Om deze gevolgtrekking aan het experiment te toetsen, werden nog andere met glucose isomere hexosen ($C_6H_{12}O_6$) onderzocht. Het bleek daarbij, dat in tegenstelling met glucose, de fructose en mannose volkomen werden doorgelaten. De kikvorschnieren zijn dus in staat, glucose te onderscheiden van fructose en mannose.

De oorzaak was dus inderdaad gelegen in verschillen in de chemische structuur. Het lag voor de hand om te denken aan het bekende beeld van sleutel en slot: de sleutel glucose zou dan niet passen op de glomerulusmembraan, terwijl de sleutels fructose en mannose dit wel zouden doen.

Wij stelden ons thans de vraag, *zou een atoomgroep in het glucosemolecuul zijn aan te wijzen, die voor de retentie verantwoordelijk kan gesteld worden.* De poging om deze vraag te beantwoorden vormt den inhoud van het onderhavige artikel.

---

[1]) HAMBURGER en BRINKMAN, Versl. Koninkl. Akad. v. Wetensch., Zittingsverslag van 27 Januari en 29 September 1917.

[2]) HAMBURGER en BRINKMAN, Versl. Koninkl. Akad. v. Wetensch., Zittingsverslag van 28 September 1918.

Het spreekt vanzelf, dat het daarvoor noodig was, een aantal isomere en stereoisomere suikersoorten op hun gedrag tegenover de nieren te onderzoeken en wel niet alleen hexosen, maar ook pentosen. De heeren Jhr. ALBERDA VAN EKENSTEIN, Prof. BACKER, Prof. BÖESEKEN en Prof. NEUBERG waren zoo vriendelijk mij hierbij zooveel mogelijk tegemoet te komen. Ik breng hun hierbij nogmaals mijn oprechten dank. Nochtans was de verscheidenheid van materiaal zeer beperkt.

De gevolgde methodiek week van de vroegere niet af.[1]) Zij berustte op de vergelijking van het reduceerend vermogen der afgescheiden kunstmatige urine met dat van de doorstroomingsvloeistof. Deze doorstroomingsvloeistof, waarin de suikers opgelost werden, had weder de volgende samenstelling: NaCl 0,5 %, KCl 0,02 %, $CaCl_2$.6 aq 0,04 %, $NaHCO_3$ 0,285 %. De suikerbepaling geschiedde, zooals vroeger, volgens BANG (1916); in den laatsten tijd werd echter de nieuwste methode van dezen schrijver gebruikt.[2]) Zij berust wederom op de bepaling van de reductie. Hierbij wordt de fout, die teweeggebracht kan worden door verschillen in de intensiteit van het koken, geëlimineerd en wel doordien in de kokende vloeistof heete waterdamp geleid wordt, waardoor het koperoxydule door middel van joodzuur oogenblikkelijk in koperoxyde wordt omgezet. Verder wordt ook de oxydatie door de lucht vermeden; de eindtitratie geschiedt door 0,01 n thiosulfaat en amylumoplossing.

Gebruikt men a cc thiosulfaat, dan laat zich de reductie, in glucose uitgedrukt, berekenen volgens de formule $(1,97 - a) : 2,8$. Is geen suiker of reduceerende substantie voorhanden, dan moet dus $a = 1,97$ gevonden worden, wat inderdaad het geval is, indien de gebruikte stoffen zuiver zijn.[3]) Deze nieuwe methode bleek, evenals de oude, zeer goede resultaten op te leveren. De uitkomsten zijn zelfs scherp. In het algemeen zijn de cijfers, die men voor de reductie verkrijgt, bij de nieuwe methode wat hooger dan bij de oude, doch aangezien het hier geldt vergelijkende onderzoekingen, is dit meestal niet van essentieele beteekenis.

Ten einde een leiddraad voor onze onderzoekingen te hebben,

---

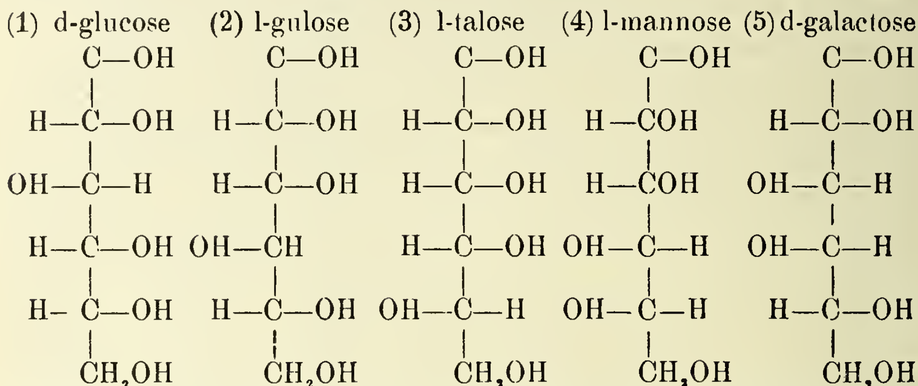
[1]) Vergelijk ook HAMBURGER en BRINKMAN, Biochemische Zeitschrift 88, 97, (1918).

[2]) BANG, Biochemische Zeitschrift, 92, 344, (1918).

[3]) Wij wenschen daarop in het bijzonder de aandacht te vestigen, omdat na lang zoeken gebleken is, dat het KCl „pro Analyse" van KAHLBAUM reduceerende stoffen bevatte. Hetzelfde was het geval met het door de British Drug Houses in Londen als chemisch zuiver geleverde KCl. Na herhaald omkrystalliseeren was het KCl van reduceerende stoffen bevrijd en kregen wij, evenals BANG, voor a een waarde van 1,97.

werd de willekeurige hypothese opgesteld, *dat de groep* *C-OH* | *H-C-OH* *in het glucosemolecuul de retentie veroorzaakt.*

Was deze hypothese juist, dan moesten naast de d-glucose eveneens de l-gulose, l-talose, l-mannose en d-galactose tegengehouden worden.

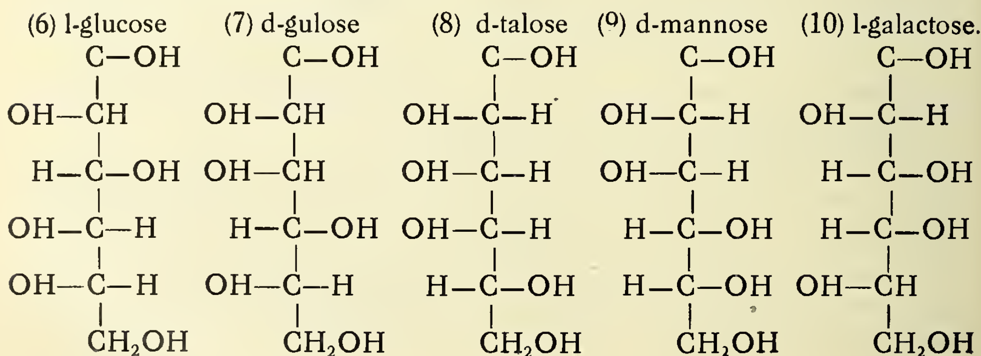


Hiervan stonden echter slechts de d-glucose, de l-mannose en de d-galactose te onzer beschikking.

Het experiment leerde echter, dat de l-mannose volkomen doorging: in 4 proeven bleek, dat bij doorstrooming met een 0,09 °/₀ oplossing, die een reductie gaf, overeenkomende met een glucose-oplossing van 0,06 °/₀, de kunstmatige urine eveneens een reductie van 0,06 bezat, dus *geen retentie.* Terloops zij echter erop gewezen, dat na vervaardiging van de l-mannoseoplossing de draaiing + 10,5° bedroeg, 16 uren daarna — 13,5°. In het volgende opstel komen wij hierop terug.

Wat de d-galactose aangaat, deze werd niet geheel, doch voor een gedeelte tegengehouden. Ook daarop zullen wij in het volgende artikel terugkomen.

Verder vorderde onze hypothese, dat de volgende reeks de glomerulusmembraan zou passeeren.

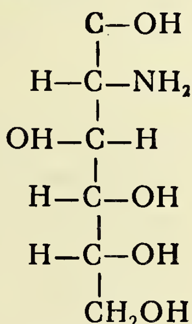


Wij beschikten slechts over l-glucose en d-manneso.

Inderdaad bleek, dat de *l-glucose, in tegenstelling met de d-glucose*, geheel doorgelaten wordt. Opgelost in de gebruikelijke Ringervloeistof vertoonde de 0,1 °/₀ l-glucoseoplossing een reductie van 0,075 °/₀; in de 4 proeven bezat de urine dezelfde reductie.

Ook van de d-mannose werd, overeenkomstig de hypothese, geen spoor tegengehouden [1]).

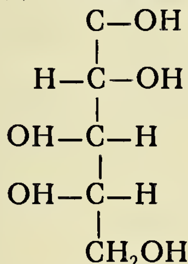
De andere hiergenoemde suikers stonden ons niet ter beschikking, wel echter nog de d-glukosamine:



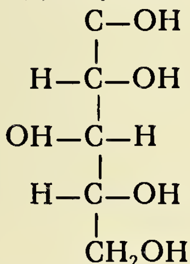
Zoowel de oplossing van 0,1 °/₀ als van 0,08 °/₀ d-glukosamine in Ringer passeerde de glomerulusmembraan volkomen.

Voorts werden eenige *pentosen* onderzocht. De hypothese verlangde, dat de volgende reeks zou tegengehouden worden:

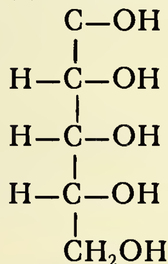
(1) l-arabinose



(2) l-xylose



(3) d-ribose



Wat de l-arabinose betreft, werd een oplossing van 0,07 °/₀ doorgevoerd; zij bezat een reductie van 0,0714 °/₀ glucose, wat ook het geval was met de kunstmatige urine; er was dus, in tegenspraak met de hypothese, niets tegengehouden.

De l-xylose daarentegen vertoonde wel retentie, maar deze bedroeg slechts ongeveer $^1/_3$ gedeelte, terwijl van de d-ribose niet meer dan $^1/_4$ deel werd tegengehouden.

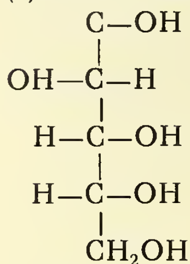
---

[1]) Vergelijk Hamburger en Brinkman, Versl. Koninkl. Akad. v. Wetensch., Zittingsverslag van 28 September 1918.

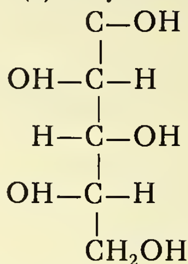
Op die partieele retentie van l-xylose en d-ribose komen wij in het volgende opstel terug.

Ten slotte volge hier een reeks van pentosen, waarvan de hypothese een volkomen doorgaan deed verwachten.

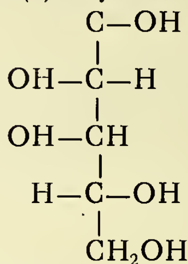
(4) d-arabinose



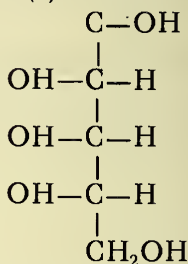
(5) d-xylose



(6) d-lykose



(7) l-ribose

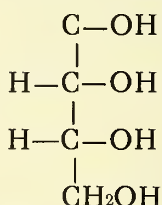


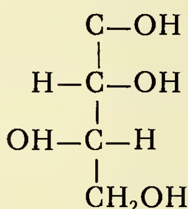
Van deze 4 pentosen hebben wij slechts de eerste twee kunnen onderzoeken. Geheel in overeenstemming met hetgeen verwacht moest worden, was bij de d-arabinose van retentie geen sprake. Anders was het bij d-xylose, waarvan wederom een gedeelte werd tegengehouden.

Voegen we hieraan nog toe, dat van de d-l-arabinose evenmin iets tegengehouden werd als van de d- en van de l-arabinose.

De *tetrosen* konden niet onderzocht worden; men had anders moeten verwachten, dat

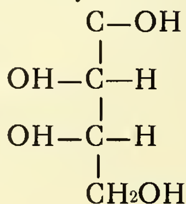
d-erythrose en d-threose

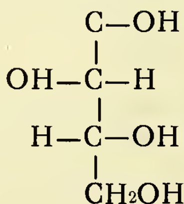




geretineerd werden, en

l-erythrose en l-threose





doorgelaten.

Om het overzicht te vergemakkelijken, laten wij thans een tabel volgen, waarin de resultaten der onderzoekingen zijn samengevat. Hierbij zij echter opgemerkt, dat over d-galactose en l-xylose een veel grooter aantal proeven verricht zijn. Deze zullen in het volgende artikel een plaats vinden.

Permeabiliteit der nieren voor stereoisomere suikers.

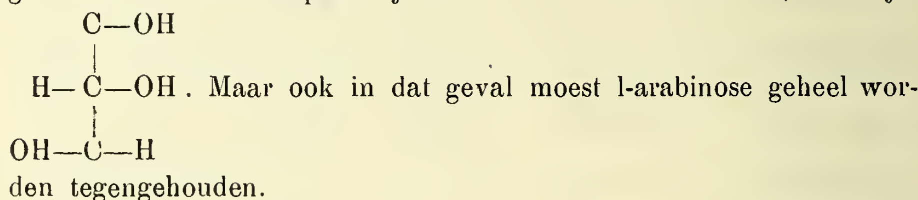
Datum der proeven.	De doorstroomingsvloeistof bevat:	Reductie der doorstroomingsvloeistof, uitgedrukt in procent glucose.	De urine heeft een reductie van:	Retentie (II—III).	Procent der retentie (berekend uit I en IV).
15 Nov. 1918	0.09 % *l-mannose*	0.06 %	0.06 %	0	0
12 Juni 1919	0.05 „ *d-galactose*	0.0964 „	0.0535 „	0.0429	44 %
1 Juli 1919	0.25 „ „	0.193 „	0.125 „	0.0680	35 „
19 Nov. 1918	0.1 „ *d-glucosamine*	0.1125 „	0.1125 „	0	0
11 Aug. 1919	0.08 „ *HCl-glucosamine*	0.0964 „	0.0964 „	0	0
12 Aug. 1919	0.07 „ „ „	0.075 „	0.075 „	0	0
14 Nov. 1918	0.1 „ *l-glucose*	0.075 „	0.075 „	0	0
20 Aug. 1918	0.1 „ *d-mannose*	0.0825 „	0.0825 „	0	0
21 Aug. 1918	0.1 „ „	—	—	—	—
13 Aug. 1919	0.07 „ *l-arabinose*	0.0714 „	0.0714 „	0	0
13 Nov. 1918	0.1 „ *l-xylose*	0.0725 „	0.05 „	0.0225	31 %
5 Nov. 1918	0.05 „ *d-ribose*	0.06 „	0.0468 „	0.0132	22 „
26 Oct. 1918	0.09 „ *d-arabinose*	0.075 „	0.075 „	0	0
26 Oct. 1918	0.09 „ „	0.08 „	0.0745 „	0	0
14 Aug. 1919	0.07 „ „	0.0535 „	0.0535 „	0	0
23 Oct. 1918	0.1 „ *d-xylose*	0.125 „	0.1 „	0.025	20 %
30 Oct. 1918	0.04 „ „	0.0525 „	0.026 „	0.026	50 „
10 Juli 1919	0.2 „ „	0.2 „	0.1783 „	0.0217	10.5 „

Vatten wij de uitkomsten van de hierboven beschreven proeven samen, dan moeten wij concludeeren, dat de hypothese als zou de groep

$$\begin{array}{c} C—OH \\ | \\ H—C—OH \end{array}$$

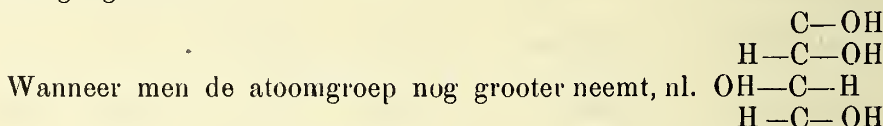
in het d-glucosemolecuul de oorzaak zijn van de retentie, een hypothese die, gelijk wij reeds opmerkten, van geheel willekeurigen aard was, niet juist kan zijn. Immers, dan zouden

l-mannose en l-arabinose geheel moeten tegengehouden worden, terwijl zij in werkelijkheid doorgaan. Aan den anderen kant echter worden, in overeenstemming met de hypothese, d-galactose, l-xylose en d-ribose tegengehouden, maar dit geschiedt slechts *met een deel* van ieder der doorgevoerde suikers. En wat nu de suikers aangaat, waarvan de hypothese een volkomen doorgaan verlangde, zij allen passeerden inderdaad de glomerulusmembraan, behalve de d-xylose, die voor een gedeelte werd tegengehouden. Op dit gedeeltelijk tegenhouden zullen wij, gelijk gezegd, nog in het volgende artikel terugkomen. Nemen wij voorloopig aan, dat waar een geheele retentie moest plaats hebben, ook de partieele de hypothese bevestigt; dan blijven in ieder geval nog over de l-mannose en de l-arabinose, waarvan, in strijd met de hypothese, niets wordt tegengehouden. Men zal dus geneigd zijn om een grootere atoomgroep van het glucose-molecuul aansprakelijk te stellen voor de retentie, zoo bijv.



Maar ook in dat geval moest l-arabinose geheel worden tegengehouden.

Wanneer men de atoomgroep nog grooter neemt, nl.



dan zou deze voor de retentie van glucose aansprakelijk kunnen gesteld worden, maar dan blijft men toch nog moeilijkheden met de partieele retentie houden. Voorloopig is het dus gewaagd de retentie te verklaren met het beeld van sleutel en slot, tenzij men niet een deel van het molecuul neemt, maar de groepeering van het geheel. Tot een nagenoeg soortgelijk besluit kwam DE GRAAFF [1]) bij zijn uitvoerige onderzoekingen over het gedrag van typhus en para-typhusbacillen tegenover stereoisomere suikers.

Bij dezen stand van zaken zal men geneigd zijn een aanknoopingspunt te zoeken met specifieke physische eigenschappen van de glucose, en dan denkt men aan *oppervlaktespanning*, *viscositeit* en *adsorptie*. Wat nu de oppervlaktespanning betreft, werden vergelijkende proeven verricht met d-glucose en d-fructose [2]), van welke laatste suiker, zooals men zich herinneren zal, geen spoor door de nier geretineerd

---

[1]) W. C. DE GRAAFF: De biochemische eigenschappen der paratyphusbacillen. Leiden, S. C. VAN DOESBURGH, 1918.

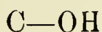
[2]) Wij nemen juist deze, omdat wij over een voldoende hoeveelheid van deze doorgaande suiker beschikken.

wordt. Maar het bleek door stalagmometrische experimenten (J. TRAUBE) en door proeven met behulp van de kapillaire stijghoogte, dat geen verschil in oppervlaktespanning tusschen de beide suikers bestond. Evenmin bleek de viscositeit van de beide suikers een verschil te vertoonen.

Toen wendden wij ons tot de adsorptie. Zou het glomerulusepithelium wellicht glucose adsorbeeren, fructose daarentegen niet? Eigenlijk zouden wij ons met proeven in deze richting niet hebben beziggehouden, indien O. COHNHEIM [1]) niet soortgelijke proeven had verricht. Immers stel eens, dat het glomerulus-epithelium d-glucose adsorbeerde, doch laevulose niet, dan zou het toch uiterst moeilijk zijn om daarmede het verschillende gedrag der levende nieren tegenover de beide suikers te verklaren. Maar in ieder geval zou dit dan toch een aanwijzing zijn voor de richting, waarin men een verklaring der feiten zou moeten zoeken. Daarbij komt, dat COHNHEIM inderdaad verschillen kon waarnemen in het adsorptievermogen van fijngemaakte niersubstantie van warmbloedige dieren tegenover glucose en laevulose. Echter zijn er verschillende gronden om de juistheid van deze conclusie van COHNHEIM te betwijfelen. Ik zal daarover op een andere plaats mededeelingen doen en aan de hand van proeven met kikvorschnieren aantoonen, dat de door dezen onderzoeker gevolgde methode om met fijn-gehakte niersubstantie proeven te verrichten over het adsorptievermogen van de nier voor suikers, tot geheel onbetrouwbare uitkomsten moet leiden.

Samenvatting en Besluit.

Om na te gaan of voor de retentie van glucose door de nier een bepaalde atoomgroep kan aansprakelijk gesteld worden, werden een aantal stereoisomere hexosen en pentosen op hun gedrag tegenover de nieren onderzocht.



De hypothese, dat de groep H—C—OH de retentie zou bewerken, kan niet juist zijn, aangezien de l-mannose en de l-arabinose, die deze groep bezitten, de nier volkomen passeeren; terwijl de d-galactose, de l-xylose en de d-ribose, waarin deze groep eveneens voorhanden is, weliswaar voor een deel worden tegengehouden, maar toch ook voor een ander deel worden doorgelaten (partieele retentie dus).

In overeenstemming met de hypothese werden de suikers, wier

C—OH | C—OH

eerste atoomgroep niet H—C—OH, doch OH—C—H was, (l-glu-

[1]) COHNHEIM: Zeitschr. f. Physiol. Chemie, 84, p. 451.

cose, d-mannose, d-arabinose) doorgelaten; alleen de d-xylose, die dit ook moest vertoonen, werd voor een deel tegengehouden.

De proeven hebben dus twee resultaten opgeleverd:

1°. *Van alle onderzochte suikers* (*hexosen en pentosen*) *wordt alleen de glucose volkomen tegengehouden.*

2°. *Deze exceptioneele eigenschap kan niet aan de atoomgroep*



H—C—OH toegeschreven worden, evenmin aan een grootere atoomgroep in het molecuul; zij schijnt aan de geheele atoomgroepeering van het glucosemolecuul gebonden.

Toch zal in het volgende opstel, *in het licht van de partieele retentie* blijken, welk een belangrijke beteekenis de groep H—C—OH hier bezit.

De boven beschreven onderzoekingen werden voor een deel verricht door den Heer C. L. ALONS, Med. Cand, assistent aan het laboratorium.

Groningen, September 1919. *Physiologisch Laboratorium.*

Physiologie. — De Heer HAMBURGER biedt eene mededeeling aan, getiteld: „*De partieele Permeabiliteit der Glomerulusmembraan voor d-galactose en eenige andere multiroteerende Suikers*".

Reeds door vroegere onderzoekingen was gebleken, dat *d*-galactose slechts gedeeltelijk door de glomerulus-membraan wordt tegengehouden [1]). Bij nader inzien schijnt dit echter met het begrip permeabiliteit weinig in overeenstemming te zijn, want een filter houdt òf een stof terug, òf laat deze zonder meer passeeren; een middenweg laat zich nauwelijks denken, wanneer men namelijk met een enkelvoudige stof en niet met een mengsel te doen heeft. Wij zijn dan ook geneigd geweest om het begrip permeabiliteit te laten vallen, maar, zooals uit het vorige opstel blijkt, hebben wij tevergeefs getracht, aansluiting te zoeken met oppervlaktespanning, viscositeit en adsorptie. Daarom keerden wij weder naar het permeabiliteitsbegrip terug.

Bij nadere beschouwing schenen ons twee verklaringen mogelijk.

1°. De concentraties, waarin de galactoseoplossing tot dusverre was aangewend (0,1 °/₀ en 0,15 °/₀), waren te hoog, m.a.w. ze lagen boven de tolerantie der nier voor d-galactose. Wij dachten hierbij aan onze ervaringen omtrent de glucose; wij vonden toch indertijd [2]), dat wanneer het glucosegehalte van de doorstroomingsvloeistof de physiologische waarde slechts met 0,02 °/₀ overschreden heeft, reeds een weinig van de glucose wordt doorgelaten en dat deze hoeveelheid toeneemt, naarmate het suikergehalte der doorstroomingsvloeistof hooger wordt, zoodat, wanneer het glucosegehalte der doorstroomingsvloeistof 0,2 °/₀ is geworden, nagenoeg niets meer wordt tegengehouden. Het was dus niet uitgesloten, dat ook de galactose-concentratie te hoog was geweest en dat het daaraan moest worden toegeschreven, dat een deel geretineerd werd, een ander deel niet. Daarom was het gewenscht, tolerantiebepalingen der nieren voor d-galactose te verrichten. Zou het dan blijken, dat de galactose ook in zwakke concentraties niet evenals glucose, geheel kon tegengehouden worden, dan kon het verschijnsel der partieele retentie niet door het tolerantie-

---

[1]) HAMBURGER en BRINKMAN, Versl. Koninkl. Akad. v. Wetensch., Zittingsverslag van 28 Sept. 1918.

[2]) HAMBURGER en BRINKMAN, Biochem. Zeitschr., 88, 97, (1918).

begrip verklaard worden en dan zou per exclusionem een tweede verklaring de juiste moeten zijn.

2°, Deze tweede verklaring kon gezocht worden in het feit, dat de d-galactose in twee modificaties voorkomt, een α- en β-vorm. In waterige oplossing verkeeren deze beide vormen met elkander in evenwicht. Aangenomen moest dan worden, dat een der beide modificaties door de glomerulusmembraan geretineerd wordt, de andere daarentegen niet.

1. *Tolerantie der nieren voor d-galactose.*

Om de tolerantie te bepalen, werd de doorstroomings-vloeistof bedeeld met verschillende hoeveelheden d-galactose, liggende tusschen 0,05 °/₀ en 0,25 °/₀. De volgende tabel geeft een overzicht van de verkregen resultaten. Zij zal zonder nadere toelichting duidelijk zijn. Slechts zij opgemerkt, dat voor de bepaling der reductie de nieuwste methode van Bang (1918) werd gebruikt [1]). Telkens werden de beide nieren van 2 kikvorschen tegelijk doorstroomd. (Zie tabel I).

Wat leeren deze proeven?

1°. Dat geen van de gebruikte galactoseoplossingen, wier concentraties zich, gelijk gezegd, bewegen tusschen 0,05 °/₀ en 0,25 °/₀, geheel door de nieren worden teruggehouden.

2°. Dat in alle gevallen de retentie gemiddeld de helft bedraagt, onverschillig of doorstroomd is met een zwakkere dan wel met een sterkere galactoseoplossing.

Op beide punten wijkt de galactose van de glucose af; immers werd bij de glucose een *volkomen* retentie gevonden, wanneer de oplossing beneden 0,05 °/₀—0,08°/₀ (individueele verschillen) lag, bij de galactose daarentegen is van een volkomen retentie geen sprake. En wat het tweede punt betreft, blijft bij de galactose, niettegenstaande de stijging van de suikerconcentratie, de tolerantie onveranderd. Eerst wanneer de concentratie 0,25 °/₀ bedraagt, begint de tolerantie af te nemen. Proeven met hoogere concentraties waren niet uitvoerbaar, daar dan de afscheiding van kunstmatige urine te gering wordt.

Wij beschikken nog over eenige oudere proeven, waarbij de reductie bepaald werd volgens de vroegere methode van Bang (1916), en die reeds gedeeltelijk gepubliceerd werden. Men vindt ze te zamen in tabel II. Gelijk men zal opmerken, vertoonen de uitkomsten niet dezelfde gelijkmatigheid als die van Tab. I, maar zij liggen toch in dezelfde richting.

---

[1]) Men vergelijke hiervoor ons vorige opstel in deze Verslagen, p. 319.

TABEL I.

De tolerantie van de glomerulusmembraan voor *d*-galactose.

Datum der proeven.	Kik-vorsch.	I. De doorstroomingsvloeistof bevat aan galactose.	II. Reductie der doorstroomingsvloeistof, uitgedrukt in % glucose.	III. De urine heeft een reduceerend vermogen van % glucose.		IV. Retentie (II—III).		V. Procentische retentie van galactose. Gemiddelde waarde voor de beide nieren (berekend uit II en IV).
				Uit de rechter nier.	Uit de linker nier.	Rechter nier.	Linker nier.	
12 Juni 1919	A.	0.05 %	0.0964	0.0535	0.0535	0.0429	0.0429	$\frac{0.0429}{0.0964} \times 100 = 51$ %
	B.	0.05 „		0.0571	0.0535	0.0393	0.0429	46 %
14 Juni	A.	0.1 „	0.125	0.0571	0.0531	0.0679	0.0715	56 „
	B.	0.1 „		0.0607	0.0571	0.0643	0.0679	53 „
3 Juli	A.	0.1 „	0.0785	0.0357	0.04	0.0428	0.0385	56 „
	B.	0.1 „		0.04	0.05	0.0385	0.285	43 „
4 Juli	A.	0.1 „	0.0714	0.0357	0.0285	0.0357	0.0429	55 „
	B.	0.1 „		0.0357	0.0321	0.0357	0.0393	53 „
1 Juli	A.	0.15 „	0.112	0.05	0.057	0.062	0.055	52 „
	B.	0.15 „		0.05	0.0607	0.062	0.0513	51 „
30 Juni	A.	0.2 „	0.157	0.107	0.057	0.050	0.082	42 „
	B.	0.2 „		0.0893	0.0893	0.0677	0.0677	43 „
1 Juli	A.	0.25 „	0.193	0.121	0.121	0 072	0.072	37 „
	B.	0.25 „		0.13	0.063	0.13	0.063	33 „

TABEL II.
Het gedrag der nieren tegenover galactose.

Datum der proeven.	Kik-vorsch.	I. De doorstroomingsvloeistof bevat aan galactose.	II. Reductie der doorstroomingsvloeistof, uitgedrukt in $^0/_0$ glucose.	III. De urine heeft een reduceerend vermogen van $^0/_0$ glucose.		IV. Retentie (II—III).		V. Procentische retentie van galactose. Gemiddelde waarde voor de beide nieren (berekend uit II en IV).
				Uit de rechter nier.	Uit de linker nier.	Rechter nier.	Linker nier.	
31 Oct. 1918	A.	0.06 $^0/_0$	0.045 $^0/_0$	0.03	0.02	0.015	0.025	**46** $^0/_0$
	B.			0.025	0.03	0.02	0.015	**44** „
16 Aug.		0.1 „	0.07 „	0.045	0.04	0.025	0.03	**39** „
17 Aug.		0.1 „	0.055 „	0.0325	0.0325	0.0225	0.0225	**41** „
18 Aug.		0.1 „	0.055 „	0.0325	0.0325	0.0225	0.0225	**41** „
Sept.	A.	0.1 „	0.0825 „	0.049	0.050	0.033	0.0325	**40** „
	B.			0.078	0.0825	0.038	0 ?	**46** „
	C.			0.0663	0.0675	0.0162	0.015	**19** „
	A.	0.1 „	0.0725 „	0.05	0.0525	0.0225	0.02	**30** „
	B.			0.045	0.048	0.0275	0.0245	**36** „
	C.			0.047	0.045	0.0250	0.0275	**40** „
23 Aug.	A.	0.15 „	0.0975 „	0.07	0.07	0.0275	0.0275	**29** „
	B.			0.0525	0.05	0.045	0.0475	**41** „

Ook uit deze tabel blijkt, dat, in tegenstelling met hetgeen steeds voor glucose werd gevonden, *in geen der proeven de galactose geheel wordt tegengehouden en verder, dat het geretineerde deel ongeveer de helft, hier de kleinste helft, bedraagt.*

Daarmede is dus de op pag. 328 genoemde eerste verklaring vervallen en zijn we wel genoodzaakt per exclusionem de tweede verklaring aan te nemen, n.l. die, welke berust op de overweging, dat in waterige oplossing de galactose in twee modificaties voorkomt.

2. *De galactoseoplossing bevat twee vormen van galactose, die zich tegenover de nieren verschillend gedragen.*

Zooals bekend is, vertoonen een groot aantal suikers multirotatie (Dubrunfaut), d.w.z. eenigen tijd na de bereiding der waterige oplossing bezitten zij een andere, meestal een geringere specifieke draaiing dan onmiddellijk nadat de oplossing is vervaardigd. Men heeft daarvoor verschillende verklaringen gegeven, waarop wij hier niet behoeven in te gaan. Men is het er echter over eens geworden, dat onder den invloed van het oplosmiddel een deel van de suiker in een anderen vorm overgaat van een geringer draaiingsvermogen. De twee vormen zijn met elkander in evenwicht.

Deze gedachte is in de eerste plaats gegrondvest op de onderzoekingen van Tanret [1]), die uit een oplossing eerst van glucose, weldra ook van d-galactose en andere suikers, drie vormen kon afscheiden met verschillend draaiingsvermogen en verschillende andere physische eigenschappen en die hij met α, β en γ betitelde: de α-modificatie van d-galactose met een specifiek draaiingsvermogen van $+135°$, een β-modificatie met $[\alpha]_D = +81°$, en een γ-modicatie van $[\alpha]_D = +53°$.

Nadere onderzoekingen, vooral van E. Roux [2]) en verder van Bourquelot [3]), hebben echter geleerd, dat de β-vorm van Tanret geen zelfstandige suiker is, maar bestaat uit een mengsel van α en γ, die met elkander evenwicht maken.

Het schijnt mij nuttig hier te wijzen op een verwarring in de literatuur, die mijzelf veel last heeft veroorzaakt en, naar ik vernam, ook anderen. In verschillende wetenschappelijke verhandelingen en leerboeken wordt erkend, al of niet stilzwijgend, dat er slechts 2

[1]) Tanret, Bulletin de la Société Chimique, [3], 13, (1895), p. 728 [3], 15, (1896), 195.

[2]) E. Roux, Ann. Chim. et de Phys., VII Série, 30, p. 422.

[3]) Bourquelot, Journal de Pharm. et de Chem. [7], 14, (1916) 225.

modificaties bestaan, en men noemt deze dan de α- en de β-modificatie. Men zal begrijpen, dat de hierbedoelde β-modificatie eigenlijk is de γ-modificatie van TANRET. Maar voor zoover ik gezien heb, voegt niemand dit er aan toe. Tot welke foutieve opgaven deze verwisseling kan leiden, blijkt o.a. uit de bekende tabellen van LANDOLT-BORNSTEIN, 4e Aufl., 1912. Daar leest men bij d-galactose: „Anfangsdrehung nach 7 Minuten als α-Modifikation $+117.5$; Enddrehung nach 7 Stunden als β-Modifikation $+80°.27$. Nu is inderdaad de einddraaiing, die een gewone d-galactoseoplossing vertoont, 80°.27, of eenvoudig 81°, maar dit is niet de draaiing van de tweede modificatie; die draaiing is $+53°$. Een draaiing van 81° ontstaat, wanneer de twee modificaties van 117°.5 en $+53°$ met elkander evenwicht maken. En dit evenwicht ontstaat zoowel wanneer men van α als van γ uitgaat. In beide gevallen ontstaat een mengsel met een rotatievermogen van 81°.

Het is wellicht nuttig om hetgeen hier voor d-galactose in het midden gebracht werd, ook voor de zooveel meer gebruikte d-glucose onder het oog te zien.

TANRET onderscheidt 3 vormen van d-glucose, een α-vorm met $[\alpha]_D = 106°$, een β-vorm met $[\alpha]_D = 53°$, en een γ-vorm met $[\alpha]_D = 19°$. Zoowel de α- als de γ-vorm vertoonen na oplossing in water ten slotte een rotatie van 53°. TANRET's β-vorm moet, zooals de onderzoekingen van ROUX e. a. geleerd hebben en thans wel algemeen aangenomen wordt, als een evenwicht van α en γ worden aangezien; β is dus geen zelfstandige modificatie, doch slechts een mengsel Maar nu leest men het volgende: er bestaan 2 modificaties van glucose, de α- en de β-vorm, en dan voegt men er niet zelden aan toe: de α vorm gaat in den β-vorm over. Hoe kunnen zij, die zeggen, dat hier een evenwichtsreactie aanwezig is, dan spreken van een *evenwicht* tusschen α en β? Zeide men, de α gaat *gedeeltelijk* in den β-vorm over, dan zou men duidelijk zijn.

Bij HOLLEMAN vindt men in zijn bekend leerboek over Organische Chemie, 5e dr., 1912, p. 300, de zaak al weder anders voorgesteld. Deze spreekt ook van een α-vorm van 106°, een β-vorm van 19° en een γ-vorm van 53°. Deze γ-vorm is volgens hem een mengsel van α en β. Wat bij TANRET γ is, noemt HOLLEMAN dus β.

Men vraagt zich af, wat de oorzaak is, dat men zich aan de nomenclatuur van TANRET niet gehouden heeft. Nadat EMIL FISCHER geleerd had kunstmatige glucosiden te bereiden, [1]) toonde hij aan, dat van ieder glucosied stereoisomere modificaties bestaan: de eene werd aangetast door biergist (invertine) en de andere door emulsine. [2]) Ter onderscheiding noemde hij de eerste het α glucosied en het tweede het β-glucosied, en de daaraan beantwoordende glucose-vormen α- en β-d glucose [3]) Het is aan die nomenclatuur, dat de latere schrijvers schijnen te hebben vastgehouden. Daartoe bestond in zooverre aanleiding, dat wanneer er slechts twee vormen bestaan, het minder rationeel schijnt, de tweede γ te noemen. Toevalligerwijze komt hetgeen E. FISCHER β noemt, overeen met hetgeen TANRET tezelfder tijd met γ betitelde.

---

[1]) EMIL FISCHER, Ber. d. D Chem. Ges. **26**, 2400 (1893).

[2]) Dezelfde, Ber. **27**, 2985, (1894); **28**, 1145, (1895).

[3]) Vergel. ook E. FISCHER, Z. f. physiol. Chemie **26**, 60, (1898).

Om nu de partieele retentie van de door de nieren gevoerde galactoseoplossing te verklaren, nemen wij aan, dat *slechts een van de beide modificaties door de glomerulusmembraan wordt tegengehouden, de andere doorgelaten.*

Zooals uit tabel I en II blijkt, wordt van niet te groote concentraties ongeveer de helft geretineerd.

Nu is het, bij nadere beschouwing van hetgeen boven werd aangevoerd, mogelijk, op eenvondige wijze de relatieve hoeveelheden α- en β-galactose te berekenen.

Noemt men in de d-galactoseoplossing, waarin evenwicht bereikt is, tusschen α en β, x de hoeveelheid van den α-vorm (draaiing + 135°), dan is (1—x) de hoeveelheid van den β-vorm (draaiing + 53°), en dan moet, daar de draaiing van het mengsel + 81° bedraagt, de volgende vergelijking gelden:

$$135x + 53(1-x) = 81.$$
$$x = 0{,}34.$$
$$1-x = 0{,}66.$$

Dus is de verhouding tusschen de hoeveelheden van den α- en den β-vorm 34 : 66.

Deze getallen nu maken geen aanspraak op groote nauwkeurigheid, want in de eerste plaats vindt men bij andere schrijvers voor de specifieke draaiing der α-modificatie niet 135°, maar 117°. Is dit getal het juiste, dan zou men voor de verhouding tusschen de beide modificaties krijgen 44 : 56. Verder heeft men te bedenken, dat de concentratie en de temperatuur der galactoseoplossing niet zonder invloed op het evenwicht zijn. In het algemeen kan men echter wel zeggen, dat de grootere helft de β-vorm is (γ-vorm volgens TANRET).

Een dergelijke verhouding laat zich ook uit de onderzoekingen van E. ROUX over de omzettingssnelheden van den α- en γ-vorm afleiden.

Het is nu zeer merkwaardig, dat ook in onze doorstroomingsproeven ongeveer de helft der galactose wordt teruggehouden. Dit parallelisme is als een steun voor onze hypothese te beschouwen. Of het de α- dan wel de γ-vorm is, die geretineerd wordt, durven wij op het oogenblik niet met zekerheid zeggen. Dat zou het geval kunnen zijn, ten eerste indien de rotatiewaarden, waarvan wij boven gebruik maakten, bij de afleiding van de relatieve hoeveelheden van den α- en γ-vorm bij zoo zwakke concentraties waren gemeten als die physiologische concentraties, welke wij bij de doorstroomingsproeven hebben aangewend (0,05 %—0,15 %). In de tweede plaats laten ook de rotatiewaarden, van chemische zijde verricht bij concentraties van 6 %—18 %, veel te wenschen over. En dan verder mag men niet

vergeten, dat de nauwkeurigheidsgrens van de reductiebepalingen bij onze doorstroomingsproeven uit den aard der zaak beperkt is. Om dit in te zien moet men bedenken, dat de hoeveelheid kunstmatige urine bij de kikvorschproeven slechts 0,1 cc. bedroeg. Nemen wij nu een willekeurig voorbeeld, om te zien, welken invloed een geringe fout bij de titratie heeft.

In tab. I werd bij doorstrooming met 0,15 °/₀ galactose voor het verkrijgen van de eindreactie gebruikt:

voor urine van kikvorsch A	rechter nier	1,83 cc.	thiosulfaat
	linker nier	1,81 ,,	,,
voor urine van kikvorsch B	rechter nier	1,83 ,,	,,
	linker nier	1,80 ,,	,,

Uit deze getallen laat zich een galactose-retentie berekenen voor kikvorsch A van 55 °/₀ en 49 °/₀, voor kikvorsch B van 55 °/₀ en 46 °/₀. Een fout dus van 0,02 cc. thiosulfaat heeft een fout in het retentievermogen gegeven van 55 — 49 = 6 °/₀.

Om de nauwkeurigheid hooger op te voeren, zou men met grootere dieren moeten werken, die dus meer urine leveren, met nieren derhalve van warmbloedige dieren. Daartoe heeft men echter een kamer noodig, die op lichaamstemperatuur moet gebracht worden, wat onder de tegenwoordige tijdsomstandigheden nog niet mogelijk is.

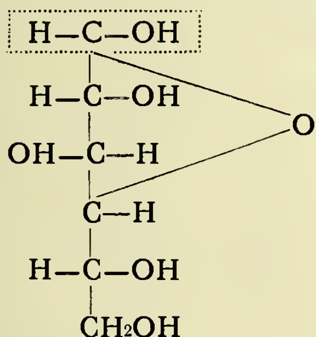
Hoe dit ook zij, indien de verschillen tusschen het geretineerde en het niet-geretineerde veel grooter waren geweest — wij vonden immers ongeveer de helft wel en de helft niet geretineerd — en daarmede in overeenstemming het verschil tusschen de hoeveelheid der α- en γ-modificatie der galactose-oplossing aanzienlijker, dan zoude nu reeds dadelijk in het oog zijn gesprongen, welke vorm geretineerd wordt en welke vorm niet. Wij komen bij de xylose daarop terug.

Alvorens tot het gedrag van xylose over te gaan, willen wij nog een tegenwerping onder het oog zien, die bij oppervlakkige beschouwing tegen onze voorstelling zou kunnen gemaakt worden. Men zou kunnen opmerken, dat wanneer één van beide modificaties door de nier verwijderd is, uit de andere in de circulatie achtergebleven modificatie zich weer de eerste zou kunnen vormen, en dat op die wijze ten slotte alle galactose de nier zou moeten verlaten. Men bedenke echter in de eerste plaats, dat zich in onze doorstroomingsproeven uit de doorstroomingsvloeistof slechts een geringe hoeveelheid urine vormt en dus slechts weinig van de eene soort galactose verwijderd wordt. Verder bedenke men, dat niet, zooals in het nor-

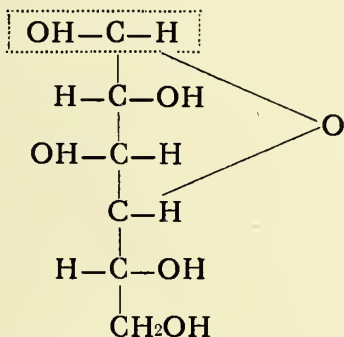
male lichaam, dezelfde doorstroomingsvloeistof blijft circuleeren; in onze proeven keert de uit de vena renalis vloeiende oplossing niet meer in de arteria renalis terug.

Maar wat zou dan wel de oorzaak zijn, dat in het normale organisme de urine niet altijd galactose bevat, d.w.z. die modificatie, waarvoor, naar onze voorstelling, de nier permeabel is? Is het misschien juist deze vorm, die voor den opbouw van de cerebrosiden gebruikt wordt? Dit zal nog door verdere onderzoekingen moeten uitgemaakt worden.

Ten slotte schijnt het, alvorens de galactose te verlaten, interessant, nog met een enkel woord de aandacht er op te vestigen, hoe gering het verschil in structuur van den α- en γ-vorm is, waaraan het al of niet geretineerd worden gebonden is. Dank zij vooral de onderzoekingen van EMIL FISCHER (l.c.), ALBERDA VAN EKENSTEIN, BÖESEKEN [1]), waarmede ook die van BOURQUELOT [2]) overeenstemmen, moet men, eenigszins in afwijking van de gebruikelijke opvatting wel aannemen, dat de structuurformules van de beide galactosevormen zich op de volgende wijze laten uitdrukken.



α-d-galactose.



β-(γ-)d-galactose.

Uit deze formules blijkt, dat hier mutatis mutandis *de retentie uitsluitend afhangt van de onderlinge plaats van de OH en H aan het eerste asymmetrische C-atoom.*

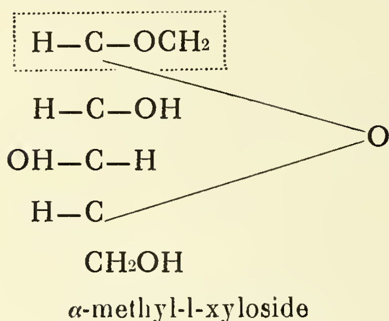
De partieele retentie van l-xylose.

De gedachte aan de in de vorige paragraaf gegeven verklaring van de partieele retentie der galactose-oplossing was bij ons opge-

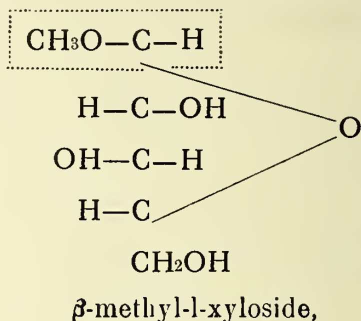
[1]) BÖESEKEN, Versl. Koninkl. Akad. v. Wetensch., Zittingsversl. van 29 Juni 1912; 25 Maart 1916.

[2]) BOURQUELOT, l.c.

komen, toen waargenomen werd, dat ook xylose-oplossingen een partieele retentie ondergingen. Want in overeenstemming hiermede staat het feit, dat evenals uit galactose-oplossingen, ook uit xylose-oplossingen door TANRET twee modificaties konden afgescheiden worden. Ook van xylosen heeft EMIL FISCHER twee glucosiden, of beter gezegd, twee xylosiden kunnen afscheiden, een α- en een β-vorm, bijv.:



α-methyl-l-xyloside



β-methyl-l-xyloside,

waarvan de eerste alleen door invertine wordt omgezet en de tweede alleen door emulsine en die door FISCHER met α en β werden aangeduid. Denkt men zich de CH_3 vervangen door H, dan ontstaat weer α- en β-xylose.

Gelijksoortige proeven als voor galactose werden dan ook voor l-xylose verricht. Wij laten een tabel volgen, die bedoelde experimenten bevat. (Zie tabel III).

Uit deze tabel blijkt, dat de l-xylose evenmin als de d-galactose, volkomen tegengehouden wordt. Steeds gaat het grootste gedeelte door de glomerulusmembraan heen, een *procentisch grootere hoeveelheid echter*, dan bij de galactose het geval was. Gemiddeld wordt van de l-xylose, aangewend in concentraties, waarbij de afscheiding van kunstmatige urine niet lijdt, tusschen $^1/_8$ en $^1/_4$ tegengehouden.

Nu vindt men bij VON LIPPMANN [1]) voor de rotaties der l-xylosen: Begindraaiing $+ 78°$, einddraaiing $+ 19°$. De α-vorm draait dus $+ 78°$, de β-vorm is evenwel nog niet geisoleerd, en dus is niet uit te maken, in hoeverre deze mede de einddraaiing $+ 19°$ beinvloedt. Ook voor xylose is dus hieruit niet af te leiden, welke modificatie door de nieren wordt tegengehouden en welke doorgelaten.

Dat de glomerulusmembraan het vermogen bezit een doorgaande en niet doorgaande suiker als het ware gelijk een zeef quantitatief

[1]) VON LIPMANN, Chemie der Zuckerarten.

TABEL III.
Tolerantie der nieren voor *l*-xylose.

Datum der proeven	Kik-vorsch.	I. De doorstroomingsvloeistof bevat aan *l*-xylose.	II. Reductie der doorstroomingsvloeistof, uitgedrukt in % glucose.	III. De urine geeft een reductie van % glucose.		IV. Retentie (II—III).	V. Procentische retentie van *l*-xylose. Gemiddelde waarde voor de beide nieren (berekend uit II en IV).
				Uit de rechter nier.	Uit de linker nier.		
1 Juli 1919	A.	0.06 %	0.059 %	0.0357	0.0357	0.0233	39 %
	B.			0.0393	0.0393	0.0197	33 „
7 Juli 1919	A.	0.1 „	0.107 „	0.075	0.068	0.035	33 „
	B.			0.0721	0.075	0.033	31 „
8 Juli 1919	A.	0.15 „	0.168 „	0.125	0.125	0.043	25 „
	B.			0.1321	0.1469	0.028	19 „
10 Juli 1919	A.	0.2 „	0.2 „	2 + *l* =	0.171 [1])	0.029	15 „
	B.			2 + *l* =	0.185	0.015	8 „
4 Oct. 1918	A.	0.1 „ * [2])	0.125 „	0.11	0.10	0.020	16 „
	B.			0.095	0.1025	0.0987	21 „
20 Nov. 1918	A.	0.1 „ *	0.105 „	0.075	—	0.03	28 „
	B.			0.075	0.08	0.028	24 „

[1]) In deze reeks bedroeg de hoeveelheid urine, uit elke nier afzonderlijk afgescheiden, minder dan 0.1 cc. Daarom werden de vloeistoffen uit de linker en rechter nier niet bij elkaar gevoegd. In het algemeen kon men bij hoogere xyloseconcentraties steeds een langzamere urineafscheiding waarnemen.

[2]) De beide laatste met * aangeduide reeksen zijn met behulp van de vroegere Bang'sche methode (1916) uitgevoerd.

te scheiden, konden wij vroeger aantoonen aan mengsels van glucose en fructose, en van glucose en lactose [1]).

Merken wij nog op, dat de onderzoekers, die zich bezighouden met de onderscheiding van suikers door middel van microben [2]), er rekening mede hebben te houden, dat de beide modificaties, waarin tal van die suikers voorkomen, zich niet op gelijke wijze tegenover die organismen behoeven te gedragen. Overigens zijn bij zulke proeven de verhoudingen wel eenigszins anders dan bij de onze; immers men heeft bij de vergistingsproeven te doen met evenwichtsverstoringen, veroorzaakt door het eventueel verbruik van een der modificaties, een verstoring, die evenwel hersteld wordt. (Vergl. blz. 334).

Het gedrag der nieren tegenover andere suikers, dan galactose en xylose.

Uit de tot dusverre beschreven onderzoekingen is gebleken, dat men 3 gevallen onderscheiden kan:

1°. De suiker wordt, wanneer de concentratie de physiologische grens niet meer dan een weinig overtreft [3]), *volkomen geretineerd.* Dit geldt uitsluitend voor de glucose.

2°. Er heeft een *partieele retentie* plaats. Dit was het geval bij oplossingen van d-galactose, van d- en l-xylose, van d-ribose en van maltose.

3°. Er wordt *niets tegengehouden.* Wij vonden dit voor l-glucose, l- en d-arabinose, l- en d-mannose en lactose.

Maar alle onder 1°, 2° en 3° genoemde suikers vertoonen multirotatie en komen dus in 2 modificaties voor. De vraag ligt dus voor de hand: waarom gedragen zich niet ook de sub 1° en 3° genoemde suikers als de galactose, m.a.w. waarom vertoonen zij niet alle partieele retentie? Ik meen, dat de verklaring daarin moet gezocht worden, dat van glucose de beide modificaties tegengehouden worden, van galactose en van de andere sub 2° genoemde suikers slechts één modificatie, en van arabinose en de andere onder 3° genoemde geen van de beide vormen.

Het zal onze taak zijn, deze zienswijze aan het experiment te toetsen. Wij houden ons daarmede bezig; wij hebben voorloopig reeds bevredigende resultaten bereikt.

---

1) Hamburger en Brinkman, Koninkl. Akad. v. W., Zittingsverslag v. 28 Sept. 1918.

2) Vergel o.a. A. J. Kluyver, Biochemische Suikerbepalingen. Diss. Delft 1914. W. C. de Graaff, De biochemische eigenschappen van paratyphusbacillen, Leiden, S. C. van Doesburgh, 1919.

3) Hamburger en Brinkman, Die Toleranz der Nieren für Glukose, Bioch. Zeitschr. **94**, 131, 1919.

Samenvatting en Besluit.

De boven beschreven onderzoekingen houden zich bezig met de vraag, wat de oorzaak kan zijn, dat uit een 0.1 °/₀ oplossing van d-galactose slechts een deel van de suiker wordt tegengehouden, het andere deel niet. Twee verklaringen waren mogelijk: De eerste bestond daarin, dat de vroeger door ons gebruikte oplossing van galactose, namelijk 0,1 °/₀, wellicht te hoog genomen was. Er werd namelijk gedacht aan onze vroegere onderzoekingen over glucose, waarbij o. a. bleek, dat wanneer door het bloedvaatstelsel van de nier een glucoseoplossing geleid wordt, die de physiologische waarde (± 0,07 °/₀) slechts ongeveer 0,03 °/₀ overtreft, reeds een weinig suiker wordt doorgelaten en dat deze hoeveelheid stijgt, naarmate het glucosegehalte grooter wordt, en wel in dien zin, dat bij grootere glucose-concentraties steeds minder glucose wordt tegengehouden. De nier kan grootere glucose-concentraties niet verdragen, m.a.w. de glomerulusmembraan wordt ziek. *Tegenover de galactose echter gedroeg zich de nier geheel anders.* Onverschillig of kleinere dan wel grootere concentraties werden doorgevoerd, steeds werd een gedeelte doorgelaten, en, wat merkwaardig is, steeds ongeveer de helft (zie tabel I en II). De eerste verklaring kon dus niet de juiste zijn.

Per exclusionem moest dus de tweede wel aangenomen worden, nl. deze, dat van de beide modificaties, waarin de d-galactose in waterige oplossing aanwezig is, de α- en de β-modificatie, de eene geretineerd wordt, de andere doorgelaten. Deze voorstelling is in overeenstemming met het vroeger door ons waargenomen feit, dat de glomerulusmembraan in staat is, doorgaande en niet doorgaande suikers quantitatief van elkander te scheiden, wat aangetoond werd bij mengsels van glucose en fructose en van glucose en lactose. Verder vindt de voorstelling nu een krachtigen steun in het feit, dat volgens onze berekening in een oplossing van d-galactose nagenoeg evenveel van de α- als van de β-modificatie voorhanden is; dezelfde verhouding dus ongeveer, waarin zij geretineerd en niet-geretineerd wordt. Welke vorm wordt tegengehouden, de α- of de β-vorm is op het oogenblik juist met het oog daarop niet met zekerheid te zeggen. Evenmin kan men dit doen ten aanzien van de l-xylose, die evenals de d-galactose, een partieele retentie vertoont. Het is namelijk uit onze doorstroomingsproeven gebleken, dat gemiddeld $^1/_4$ tot $^1/_8$ deel der l-xylose wordt tegengehouden.

Uit hetzelfde gezichtspunt mag men nu bezien de partieele retentie, welke werd waargenomen bij d-xylose, bij d-ribose en bij maltose. Ook deze reduceerende suikers komen in overeenstemming met hun

multirotatie in twee modificaties voor; ook deze suikers vertoonen partieele retentie.

Intusschen is gebleken, dat *niet alle* suikers, die in oplossing in twee modificaties voorhanden zijn, partieele retentie vertoonen. Vooreerst niet de d-glucose, die in physiologische concentratie aanwezig, geheel door de glomerulusmembraan wordt tegengehouden en als zoodanig een geheel bijzondere plaats inneemt; en toch, ook de glucose komt in 2 modificaties voor. Het laatste geldt ook voor de l-glucose, de d-mannose, de l- en d-arabinose. Van deze suikers wordt niets tegengehouden.

Resumeerende, kan men de multiroteerende suikers in drie groepen verdeelen:

1°. de groep, en daarvan kennen wij slechts één vertegenwoordiger n.l. de d-glucose, waarvan de beide modificaties worden tegengehouden;

2°. de groep (d-galactose, d- en l-xylose, d-ribose), waarvan slechts één modificatie wordt tegengehouden;

3°. de groep (l-glucose, d-mannose, d- en l- arabinose), waarvan geen van de beide modificaties wordt geretineerd.

Bij de meer uitvoerig onderzochte leden van de 2e groep, nl. d-galactose en l-xylose, wordt het al of niet geretineerd worden geheel beheerscht door de plaats, die de aan het asymmetrische C-atoom gebonden H en OH ten opzichte van elkander innemen.

Opmerking verdient nog, in de eerste plaats, dat de hier voorgedragen voorstelling, die door tal van proeven behoort te worden gecontroleerd, een physiologische illustratie geeft van het bestaan van de langs chemischen weg gevonden modificaties. In de tweede plaats stellen zij in het licht, dat wanneer men het gedrag van stereoisomere suikers tegenover lagere organismen wil onderzoeken, zooals dit reeds door verschillende onderzoekers gedaan is, men er voortaan rekening mede heeft te houden, dat de suiker, welke men onderzoekt, niet is een enkelvoudige verbinding, maar een mengsel, waarvan de beide componenten zich tegenover een organisme niet op dezelfde wijze behoeven te gedragen.

Bij dit onderzoek verleende de Heer R. ROELINK zijn bekwame hulp.

Groningen September 1919. *Physiologisch Laboratorium.*

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer J. WOLFF: „*Eenige toepassingen van de quasi-uniforme convergentie op reeksen van reëele en van holomorfe functies*".

(Mede aangeboden door den Heer J. C. KLUYVER).

Wij beschouwen een gebied G van het complexe vlak, en een rij van functies $f_1, f_2, \ldots$, die alle analytisch in G zijn. Convergeert de rij gelijkmatig in ieder afgesloten gebied binnen G, dan is de grensfunctie f analytisch in G. Deze stelling van WEIERSTRASS is echter in den laatsten tijd aanmerkelijk uitgebreid. Weet men dat de rij convergeert in een puntverzameling met een inwendig punt van G tot verdichtingspunt, en tevens dat zij in ieder afgesloten gebied binnen G gelijkmatig begrensd is, reeds dan kan men besluiten tot de gelijkmatige convergentie in ieder afgesloten gebied binnen G, dus tot het analytisch zijn van de grensfunctie f [1]). Zelfs kan men hetzelfde besluiten als G een cirkel is en men slechts onderstelt de gelijkmatige begrensdheid van de functierij in G en haar convergentie in de punten $z_1, z_2, \ldots$, met $\prod_1^\infty (z_k - z_0) = 0$, waarin z_0 het middelpunt van G is en $z_k \neq z_0$ [2]); eveneens als men slechts aanneemt dat er twee vaste getallen a en b bestaan, zoodat nergens binnen G een van die beide waarden door een functie van de rij wordt aangenomen, en dat de rij convergeert in een puntverzameling met een inwendig punt van G tot verdichtingspunt [3]). Al deze stellingen voeren tot geen andere functierijen, dan die welke reeds door WEIERSTRASS' stelling omvat worden. Men zou zich dus de vraag kunnen stellen of een rij van functies, die alle analytisch zijn in een gebied G, convergeeren kan tot een in G analytische functie, zonder dat deze convergentie gelijkmatig is in ieder afgesloten gebied binnen G. Dat er zulke rijen bestaan bewijst een door MONTEL gegeven voorbeeld, dat ten doel had, de meening van POMPEJU te weerleggen, als zou voor het

---

1) G. VITALI. Annali di Matematica, Serie 3ª, tomo 10 (1904), bl. 65.
Voor een eenvoudig bewijs zie b.v. Verh. der Kon. Ak. v. W., deel 27 (1918), bl. 319.

2) W. BLASCHKE. Leipz. Berichte, Band 67 (1915), bl. 194.

3) C. CARATHÉODORY en E. LANDAU. Sitz. Ber. Ak. v. W. Berlin, Band 32 (1911), bl. 587.

analytisch zijn van de grensfunctie f van een convergente reeks van analytische functies in G noodig zijn dat de reeks termsgewijze mag worden geintegreerd langs iederen integratieweg binnen G [1]). Inderdaad convergeert de reeks van MONTEL in het geheele vlak tot nul, terwijl termsgewijze integratie langs de reëele as van 0 tot 1 niet het bedrag nul, maar het bedrag 1 oplevert. Van gelijkmatige convergentie in ieder begrensd gebied kan hier dus geen sprake zijn. Merken we nog op dat MONTEL's reeks voor $z=0$ evenmin termsgewijze gedifferentieerd mag worden, daar men $+\infty$ in plaats van nul tot uitkomst zou krijgen. Het voorbeeld van MONTEL wordt door geen enkele van bovengenoemde stellingen omvat. De vraag doet zich voor naar een noodige en voldoende voorwaarde waaronder een in G convergente rij van analytische functies een analytische grensfunctie f heeft. Noodig is dat de convergentie van de rij quasi-uniform is in ieder afgesloten gebied binnen G, wegens de continuiteit van f_n en f. Geeft men omgekeerd deze quasi-uniforme convergentie, dan volgt hieruit wel de continuiteit van f binnen G, niet echter het analytisch zijn van f, hetgeen een voorbeeld van MONTEL [2]) aantoont. In het volgende zal o.a. een noodige en voldoende voorwaarde worden afgeleid.

1.

Wij beschouwen een rij van functies $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... alle continu in $0 \leq x \leq a$, de rij convergeert in $0 < x \leq a$. Zij $f(x)$ de grensfunctie.

1. De functie $\Phi_n(x,y) = f_n(x) - f_n(y)$ is bepaald op den rechthoek $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ en is daar continu. De functierij $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x,y)$,... convergeert in ieder punt van den rechthoek waar niet tegelijkertijd $x > 0$ en $y = 0$ of $x = 0$ en $y > 0$ plaats heeft. De grensfunctie is $\Phi(x,y) = f(x) - f(y)$, in ieder punt, waar $x > 0$ en $y > 0$, en nul in $x = 0$, $y = 0$, omdat daar iedere $\Phi_n = 0$ is. Zij gegeven dat $f(x)$ tot een eindige grenswaarde convergeert voor $x \to 0$. Wij beschouwen een puntverzameling $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ... met $0 < x_k \leq a$, $0 < y_k \leq a$, $\lim_{k=\infty} x_k = 0$, $\lim_{k=\infty} y_k = 0$, en geven twee willekeurige positieve getallen ε en N. Zij N_0 een willekeurig natuurlijk getal $> N$.

Men heeft $\Phi_{N_0}(0,0) = 0$. Wegens de continuiteit van Φ_{N_0} kan men een getal δ_1 bepalen zoodanig dat in ieder punt P_k waar $x_k < \delta_1$ en $y_k < \delta_1$ de ongelijkheid $|\Phi_{N_0}(x_k, y_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ plaats heeft.

Daar $f(x)$ voor $x \to 0$ tot een eindige limiet nadert, heeft men

[1]) P. MONTEL. Bul. des Sc. math., série 2, tome 30, dl. 1 (vol. 41, 1906, bl. 191).
[2]) P. MONTEL, l. c. bl. 190.
" Thèse bl. 98.

een getal δ_2, zoodat voor $x_k < \delta_2$ en $y_k < \delta_2$ ook de ongelijkheid $|\Phi(x_k, y_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ plaats heeft.

Is $\delta < \delta_1$ en tevens $< \delta_2$, dan heeft men

$$|\Phi(x_k, y_k) - \Phi_{N_0}(x_k, y_k)| < \varepsilon \quad \text{voor} \quad x_k < \delta \quad \text{en} \quad y_k < \delta.$$

Er bestaat nu slechts een eindig aantal indices, waarvoor $x_k \geq \delta$, $y_k \geq \delta$. In ieder van de daarmee overeenkomende punten P_k kan men een index $N_k > N$ vinden, zoodat

$$|\Phi(x_k, y_k) - \Phi_{N_k}(x_k, y_k)| < \varepsilon.$$

Op de beschouwde puntverzameling convergeert derhalve de functierij Φ_n quasi-uniform.

2. Laat omgekeerd gegeven zijn, dat op iedere puntverzameling $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ... met $0 < x_k \leqq a$, $0 < y_k \leqq a$, $\lim_{k=\infty} x_k = 0$, $\lim_{k=\infty} y_k = 0$ deze functierij quasi-uniform convergeert.

Zij M het maximum van $f(x)$ in 0, m het minimum. Men kan een puntverzameling $x_1, x_2, \ldots$ construeeren, met $x_k > 0$ en $\lim_{k=\infty} x_k = 0$, zoodat $\lim_{k=\infty} f(x_k) = M$; evenzoo een puntverzameling $y_1, y_2, \ldots$, met $y_k > 0$ en $\lim_{k=\infty} y_k = 0$, zoodat $\lim_{k=\infty} f(y_k) = m$. Beschouwen we nu de puntverzameling

$$P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2), \ldots, \quad \text{dan is} \quad \lim_{k=\infty} \Phi(x_k, y_k) = M - m, \quad (1)$$

tenzij $m = +\infty$ of $M = -\infty$. Nu kan men volgens onderstelling in ieder der punten P_k uit een vast aantal indices $1, 2, \ldots n(\varepsilon)$ een keuze n_k doen om te zorgen dat

$$|\Phi(x_k, y_k) - \Phi_{n_k}(x_k, y_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

als ε een willekeurig gegeven positief getal is. Wegens de continuiteit van alle $\Phi_{n_k}(x, y)$ en de eindigheid van het hier beschouwde aantal bestaat er nu een getal δ, zoodat voor ieder punt P_k met $x_k < \delta$ en $y_k < \delta$ voldaan is aan

$$|\Phi_{n_k}(0, 0) - \Phi_{n_k}(x_k, y_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dus weg

$$\Phi_{n_k}(0\ 0) = 0 \quad \text{is} \quad |\Phi_{n_k}(x_k, y_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots \quad (3)$$

Uit (2) en (3) volgt: $|\Phi(x_k, y_k)| < \varepsilon$ voor $x_k < \delta$, $y_k < \delta$, en hieruit wegens $\lim_{k=\infty} x_k = 0$ en $\lim_{k=\infty} y_k = 0$

$$\lim_{k=\infty} \Phi(x_k, y_k) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit (1) en (4) volgt dat $M = m$, dus $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ bestaat en is eindig, als niet $m = +\infty$ of $M = -\infty$ is.

Had men $m = +\infty$, dan was voor iedere puntverzameling $x_1, x_2, \ldots$ met $x_k > 0$ en $\lim\limits_{k=\infty} x_k = 0$ de $\lim\limits_{k=\infty} f(x_k) = +\infty$.

Bij iedere x_k van zulk een verzameling kan men een $y_k > 0$ vinden zoodat $f(y_k) > f(x_k) + k$ en zoodat $\lim\limits_{k=\infty} y_k = 0$. Dan is $\lim\limits_{k=\infty} \Phi(x_k, y_k) = -\infty$, hetgeen in strijd is met de formule (4). Evenzoo blijkt dat onmogelijk $M = -\infty$ kan zijn. Samenvattende hebben we de volgende stelling:

Heeft men een rij van functies $f_n(x)$, die continu zijn voor $0 \leq x \leq a$ en heeft men $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$ voor $0 < x \leq a$, dân is een noodige en voldoende voorwaarde waaronder $f(x)$ in 0 tot een eindige limiet nadert: de quasi-uniforme convergentie van de functierij $\Phi_n(x, y) = f_n(x) - f_n(y)$ op iedere puntverzameling $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ met $0 < x_k \leq a$, $0 < y_k\, a$ en $\lim\limits_{k=\infty} x_k = 0$, $\lim\limits_{k=\infty} y_k = 0$.

II.

3. Laten $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... continu zijn voor $0 \leq x \leq a$ en in 0 met eindige afgeleiden $f'_n(0)$ voorzien. Laat de rij convergent zijn voor $0 \leq x \leq a$. De functies $f^*_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$ voor $x > 0$ en $= f'_n(0)$ voor $x = 0$ zijn uit hoofde van de gemaakte onderstellingen continu in $0 \leq x \leq a$ en de functierij $f^*_n(x)$ convergeert voor $0 < x \leq a$ tot de grensfunctie $f^*(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$, waarin $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$.

Heeft $f(x)$ in 0 een eindige afgeleide, dan nadert $f^*(x)$ voor $x \to 0$ tot een eindige limiet, en omgekeerd.

Door toepassing van de in I behandelde stelling vinden we derhalve, als we bedenken dat

$$f^*_n(x) - f^*_n(y) = \frac{y\, f_n(x) - x f_n(y) + (x-y) f_n(0)}{xy}.$$

Heeft men een rij van functies $f_n(x)$, die continu zijn voor $0 \leq x \leq a$ en in 0 met eindige afgeleiden $f'_n(0)$ voorzien, terwijl voor $0 \leq x \leq a$ $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$, dan is een noodige en voldoende voorwaarde waaronder $f(x)$ in 0 een eindige afgeleide heeft: de quasi-uniforme con-

vergentie van de functierij $\psi_n(x,y) = \dfrac{y f_n(x) - x f_n(y) + (x-y) f_n(0)}{xy}$ *op iedere puntverzameling* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ *met* $0 < x_k \leqq a,\ 0 < y_k \leqq a$, en $\lim\limits_{k=\infty} x_k = 0,\ \lim\limits_{k=\infty} y_k = 0$.

4. Merken we op, dat in deze stelling omtrent de convergentie of divergentie van de rij $f'_n(0)$ niets verondersteld wordt. Laat deze rij convergeeren. Dan convergeert de rij van continue functies $f^*_n(x)$ in $0 \leqq x \leqq a$, tot $f^*(x)$ voor $x > 0$, tot $\lambda = \lim\limits_{n=\infty} f'_n(0)$ voor $x = 0$. Is $f'(0) = \lim\limits_{n=\infty} f'_n(0)$, dan is

$$\lim_{x=0} f^*(x) = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Beschouwen we een puntverzameling $x_1, x_2, \ldots$, met $\lim\limits_{k=\infty} x_k = 0$ en geven we weer twee positieve getallen ε, N. Er is een index $N_0 > N$, zoodat

$$|f'_{N_0}(0) - \lambda| < \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Daar $f'_{N_0}(0) = f^*_{N_0}(0)$ en $f^*_{N_0}(x)$ continu is en wegens (5) heeft men een zeker getal k_0, zoodat voor iedere $k > k_0$

$$|f^*_{N_0}(x_k) - f^*(x_k)| < \varepsilon.$$

Daar men in ieder van het eindige aantal punten x_k waarvoor $k \leqq k_0$ een index $N_k > N$ vinden kan zoodat

$$|f^*_{N_k}(x_k) - f^*(x_k)| < \varepsilon,$$

blijkt dat de functierij $f^*_n(x)$ op de beschouwde puntverzameling quasi-uniform convergeert.

Convergeert deze functierij quasi-uniform op iedere puntverzameling van de boven beschouwde soort, dan blijkt door een redeneering als in § 2 gehouden, dat

$$f'(0) = \lim_{n=\infty} f'_n(0).$$

We hebben dus de volgende stelling:

Heeft men een rij van functies $f_n(x)$, *die continu zijn voor* $0 \leqq x \leqq a$ *en in* 0 *met eindige afgeleiden* $f'_n(0)$ *voorzien, terwijl* $f_n(x)$ *tot* $f(x)$ *convergeert voor* $0 \leqq x \leqq a$ *en de rij* $f'_n(0)$ *convergeert, dan is voor „het termsgewijs differentieeren in* 0", *d. w. z. voor* $\lim\limits_{n=\infty} f'_n(0) = f'(0)$ *noodig en voldoende, dat de functierij*

$$f^*_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$$

quasi-uniform convergeert op iedere puntverzameling $x_1, x_2, \ldots$ met $\lim_{k=\infty} x_k = 0$.

De functie $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ convergeert overal tot nul, dus $f'(0)=0$

$$f_n^*(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \; f_n'(0) = 1, \quad \psi_n(x,y) = \frac{1}{1+n^2x^2} - \frac{1}{1+n^2y^2}.$$

$\psi_n(x, y)$ convergeert overal tot een continue functie, dus quasi-uniform in ieder eindig gebied, zoodat aan het in § 3 gegeven kenmerk voldaan is. $f'(0)$ is dan ook eindig. Maar als we $\varepsilon < {}^1/_2$ kiezen en hebben we een eindig aantal indices, dan is voor iedere voldoend kleine x voor ieder van die indices $f_n^*(x) > {}^1/_2$, terwijl voor $x \neq 0$ $\lim_{n=\infty} f_n^*(x) = 0$. Aan het in deze § gegeven kenmerk is derhalve niet voldaan. Men heeft dan ook

$$\lim_{n=\infty} f_n'(0) = 1 \neq f'(0).$$

De behandelde stellingen zijn onmiddellijk uit te breiden tot het complexe vlak en worden op analoge wijze bewezen.

III.

5. Zij gegeven een rij van functies $f_1(z), f_2(z), \ldots$, alle analytisch in den cirkel $|z| < a$, en convergent in dat gebied. We zullen de volgende stelling bewijzen:

Een noodige en voldoende voorwaarde waaronder de grensfunctie f analytisch is in $|z| < a$ bestaat in de quasi-uniforme convergentie van de functierij

$$\psi_n(x, y, z) = \frac{(y-z) f_n(x) + (x-y) f_n(z) + (z-x) f_n(y)}{(x-z)(y-z)} \quad . \quad (1)$$

op iedere gesloten verzameling $V(x, y, z)$, die met de verzamelingen $(x = z,\ y \neq z)$ en *$(x \neq z,\ y = z)$ geen punt gemeen heeft.*

Voor $\psi_n(x, y, z)$ kan men schrijven $\Phi_n(x, z) - \Phi_n(y, z)$, waarin

$$\Phi_n(u, v) = \frac{f_n(u) - f_n(u)}{u-v} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Daar de f_n analytisch zijn voor $|z| < a$, is $\psi_n(x, y, z)$ een analytische functie van x, y en z in het gebied $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < a$, mits men voor $u = v$ stelt $\Phi_n(u, v) = \Phi_n'(u)$, 't geen boven stilzwijgend ondersteld is.

6. Laat gegeven zijn dat f analytisch is. Zij (x_0, y_0, z_0) een punt van V, en $x_0 \neq z_0$, dan is $y_0 \neq z_0$.

Dan is

$$\lim_{n=\infty} \psi_n (x_0, y_0, z_0) = \frac{(y_0 - z_0) f(x_0) + (x_0 - y_0) f(z_0) + (z_0 - x_0) f(z_0)}{(x_0 - z_0)(y_0 - z_0)} = \psi(x_0, y_0, z_0).$$

In een voldoend kleine omgeving Ω' van $(x_0\, y_0\, z_0)$ heeft men insgelijks

$$\lim_{n=\infty} \psi_n (x, y, z) = \frac{(y-z) f(x) + (x-y) f(z) + (z-x) f(y)}{(x-z)(y-z)} = \psi(x, y, z).$$

Uit het analytisch zijn van f volgt dat van $\psi(x, y, z)$ in Ω', in 't bizonder de continuiteit van $\psi(x, y, z)$.Geven we ε en N, dan is er een index $N_0 > N$ waarvoor

$$| \psi_{N_0}(x_0, y_0, z_0) - \psi(x_0, y_0, z_0) | < \varepsilon.$$

Uit de continuiteit van ψ_{N_0} en ψ in Ω' volgt dat er in Ω' een omgeving Ω ligt waar overal

$$| \psi_{N_0} (x, y, z) - \psi(x, y, z) | < \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Heeft men $x_0 = y_0 = z_0$, dan is $\psi_n(x_0, y_0, z_0) = 0$ voor iedere n. Ook is ψ_n continu in een omgeving Ω' van (x_0, y_0, z_0) en als (x, y, z) de verzameling V doorloopt, is $\lim\limits_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}} \psi(x, y, z) = 0$, zoodat ook hier in een omgeving Ω van (x_0, y_0, z_0) de ongelijkheid (3) plaats heeft.

Ieder punt van V ligt dus in een omgeving Ω, zoodat in $\Omega\, V$ voor één en denzelfden index N_0 aan (3) voldaan is. Daar V begrensd en gesloten is, kan men V met een eindig aantal van die omgevingen overdekken[1]), waaruit volgt, dat ψ_n quasi-uniform op V convergeert.

7. Laat omgekeerd de quasi-uniforme convergentie van ψ_n op iedere V gegeven zijn. Zij z_0 een willekeurig punt, waarvoor $|z_0| < a$. Voor V kiezen we nu een willekeurige puntverzameling $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_0)$, $P_2(x_2, y_2, z_0), \ldots$ met $x_k \neq z_0$, $y_k \neq z_0$, $\lim\limits_{k=\infty} x_k = x_0$, $\lim\limits_{k=\infty} y_k = y_0$.

Gegeven is dat men in ieder punt P_k van V een keuze n_k kan doen, zoodat

$$| \psi_{n_k}(x_k, y_k, z_0) - \psi(x_k\, y_k\, z_0) | < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Wegens de continuiteit van ψ_n en de eindigheid van het aantal indices n_k bestaat er een positief getal δ, zoodat voor $|x_k - x_0| < \delta$ en $|y_k - y_0| < \delta$ men heeft

[1]) E. Borel. Leçons sur les Fonctions monogènes, bl. 11.

$$|\psi_{n_k}(x_k, y_k, z_0) - \psi_{n_k}(x_0, y_0, z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Daar $\psi_{n_k}(x_0, y_0, z_0) = 0$, volgt uit (4) en (5):

$$|\psi(x_k, y_k, z_0)| < \varepsilon \text{ voor } |x_k - x_0| < \delta \text{ en } |y_k - y_0| < \delta,$$

$$\text{d.w.z.} \left| \frac{f(x_k) - f(z_0)}{x_k - z_0} - \frac{f(y_k) - f(z_0)}{y_k - z_0} \right| < \varepsilon.$$

Hieruit volgt, dat $\dfrac{f(x_k) - f(z_0)}{x_k - z_0}$ tot een eindige limiet nadert als $x_k \neq z_0$ een willekeurige puntverzameling doorloopt met z_0 tot eenig verdichtingspunt, en hieruit weer dat er een eindige $\lim\limits_{x \to z_0} \dfrac{f(x) - f(z_0)}{x - z_0}$ bestaat, zoodat $f(z)$ in z_0 een eindige afgeleide heeft. Daar dit voor iedere $|z| < a$ geldt, volgt uit een stelling van GOURSAT, dat $f(z)$ analytisch is in $|z| < a$.

Opgemerkt kan worden, dat we hier slechts een gedeelte van de onderstelling gebruikt hebben.

8. *Als de rij van functies $f_1(z), f_2(z), \ldots$, die alle analytisch zijn voor $|z| < a$, convergeert in een punt z_0 binnen dat gebied, terwijl de functie $f_n^*(x, y) = \dfrac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}$ quasi-uniform convergeert op elke afgesloten puntverzameling binnen $|x| < a$, $|y| < a$, dan convergeert $f_n(z)$ voor iedere $|z| < a$, de grensfunctie f is analytisch en men heeft overal*

$$f'(z) = \lim_{n=\infty} f_n'(z).$$

Dat $f_n(z)$ overal convergeert volgt uit de convergentie van $\dfrac{f_n(z) - f_n(z_0)}{z - z_0}$. Voor $x = y = z$ valt $f_n^*(x, y)$ samen met $f_n'(z)$. Dus $f_n'(z)$ convergeert eveneens. Is C een binnen $|z| < a$ gelegen cirkel met z_0 als middelpunt, dan convergeert $f_n^*(z_0, z)$ quasi-uniform in C. Deze functie is continu in C en valt voor $z = z_0$ met $f_n'(z)$ samen. Wegens de quasi-uniforme convergentie is de grensfunctie ook continu in C. Deze grensfunctie is $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ voor $z \neq z_0$.

Derhalve is

$$\lim_{z=z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{n=\infty} f_n(z),$$

waaruit volgt, dat $f'(z_0)$ bestaat en $f'(z_0) = \lim_{n=\infty} f'_n(z_0)$. Daar z_0 willekeurig binnen $|z| < a$ gekozen mag worden, is hiermee de stelling bewezen.

9. *Als de rij van functies $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., die alle analytisch zijn voor $|z| < a$, daar overal convergeert tot een analytische functie $f(z)$, terwijl men voor iedere z heeft:*

$$f'(z) = \lim_{n=\infty} f'_n(z),$$

dan convergeert de functie $f^*_n(x, y) = \dfrac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}$ *quasi-uniform op elke afgesloten puntverzameling binnen* $|x| < a$, $|y| < a$.

Wegens de convergentie van f_n convergeert $f^*_n(x, y)$ tot $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ voor $x \neq y$ en tot $f'(z)$ voor $x = y = z$, omdat daar $f^*_n(x, y) = f'_n(z)$. De overal continue functie $f^*_n(x, y)$ convergeert derhalve tot een functie, die wegens het analytisch zijn van f eveneens overal continu is. Daaruit volgt de quasi-uniforme convergentie van $f^*_n(x, y)$ op elke afgesloten verzameling binnen $|x| < a$, $|y| < a$.

10. Men kan de stellingen van § 8 en 9 als volgt kort samenvatten: *Voor het termsgewijs differentieeren van een convergente reeks van analytische functies is noodig en voldoende de quasi-uniforme convergentie der reeks* $\Sigma f^*_n(x, y)$.

11. *Als men binnen $|z| < a$ een convergente reeks van analytische functies $f_n(z)$ heeft, zoodanig dat de grensfunctie $f(z)$ in 0 een eindige afgeleide heeft, terwijl de reeks $f_1^*(0, z) + f_2^*(0, z) + ..$ quasi-uniform convergeert op $0 < |z| \leqq b < a$, dan kan men de termen der reeks $\Sigma f_n(z)$ zoodanig in groepen vereenigen, dat de nieuwe reeks termsgewijs gedifferentieerd mag worden in* 0.

Noemt men $\sum_1^n f_n(z) = S_n(z)$ en $\sum_1^n f^*_n(0, z) = S^*_n(0, z)$ dan is $S^*_n(0, z)$ continu in $0 \leqq |z| \leqq b$ en $S^*_n(0,0) = S'_n(0)$.

Verder is voor $|z| > 0$

$$\lim_{n=\infty} S^*_n(0, z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} = f^*(0, z).$$

Deze functie nadert volgens onderstelling tot een eindige limiet $f'(0)$ voor z 0.

Wij geven een willekeurig getal $\varepsilon_1 > 0$ en construeeren een puntverzameling $z_1, z_2, \ldots$ met $\lim_{k=\infty} z_k = 0$. Uit een beperkt aantal indices kan men in ieder van die punten er een kiezen zoodat

$$|S^*_{n_k}(0, z_k) - f^*(0, z_k)| < \varepsilon_1$$

is. Er zijn derhalve oneindig veel punten z_k, waar men één en denzelfden index gebruiken kan, dezen noemen we n_1. Nadert z_k tot nul, dan nadert $S^*_{n_1}(0, z_k)$ tot $S'_{n_1}(0)$ en $f^*(0, z_k)$ tot $f'(0)$. Hieruit volgt dat $|S'_{n_1}(0) - f'(0)| \leqq \varepsilon_1$. Zij $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ een afnemende rij van positieve getallen met nul tot limiet. Boven n_1 kan men weer uit een beperkt aantal indices voor iedere z_k een keuze n_k doen waarbij $|S^*_{n_k}(0, z_k) - f^*(0, z_k)| < \varepsilon_2$, waaruit even als boven het bestaan van een index $n_2 > n_1$ volgt, zoodat $|S'_{n_2}(0) - f'(0)| \leqq \varepsilon_2$.

Zoo voortgaande zien we dat er een partieele functierij is: $S'_{n_1}(0)$, $S'(0), \dots$, zoodat $\lim\limits_{p=\infty} S'_{n_p}(0) = f'(0)$, waarmee de stelling bewezen is [1]).

12. De stelling der vorige § laat zich als volgt omkeeren:

Als men binnen $|z| < a$ een convergente rij van analytische functies heeft $f_n(z)$, zoodanig dat de grensfunctie $f(z)$ continu is voor $z \neq 0$ en in 0 een eindige afgeleide $f'(0)$ heeft, en als men een partieele rij $f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \dots$ vinden kan waarvoor $\lim\limits_{p=\infty} f'_{n_p}(0) = f'(0)$, dan convergeert de functierij $f^*_n(0, z)$ quasi-uniform op $0 < |z| \leqq b$, waarin b een willekeurig getal $< a$ is.

Wij geven twee positieve getallen ε en N. Men kan een getal $n_p > N$ bepalen, zoodat

$$|f'(0) - f'_{n_p}(0)| < \varepsilon.$$

Daar $\lim\limits_{z=0} f^*(0, z) = f'(0)$ en $\lim\limits_{z=0} f^*_{n_p}(0, z) = f'_{n_p}(0)$ kan men een getal δ bepalen, zoodat

$$|f^*(0, z) - f^*_{n_p}(0, z)| < \varepsilon \quad \text{voor} \quad |z| < \delta.$$

Daar $f^*_n(0, z)$ op den ring $\delta \leqq |z| \leqq b$ tot de continue functie $f^*(0, z)$ convergeert, is die convergentie daar quasi-uniform, d. w. z. men kan uit een beperkt aantal boven N gelegen indices in ieder punt z van den ring een keuze n_z doen, waarbij

$$|f^*(0, z) - f^*_{n}(0, z)| < \varepsilon \qquad \text{is.}$$

In ieder punt van $0 < |z| \leqq b$ kan men dus uit een beperkt aantal boven N gelegen indices zulk een keuze doen, waarmee de stelling bewezen is.

13. Eenige van de boven afgeleide resultaten zullen we toepassen op het blz. 342 geciteerde voorbeeld van Montel, dat we hier even reproduceeren:

De funtie $\varphi_n(z) = n^2 z e^{-n^2 z^2}$ nadert voor $n = \infty$ tot nul voor iedere

[1]) Verg. Verk. der Kon. Ak. v. W., deel 27 (1919), bl. 1102.

rëeele z. Beschouw de 3 rechthoeken $I_n\left(-n \leqq x \leqq n, -\frac{1}{2n} \leqq y \leqq \frac{1}{2n}\right)$, $II_n\left(-n \leqq x \leqq n, \frac{1}{n} \leqq y \leqq n\right)$ en $III_n\left(-n \leqq x \leqq n, -n \leqq y \leqq -\frac{1}{n}\right)$.

Er bestaat een polynomium $P_n(z)$, dat in I_n minder dan $\frac{1}{4n}$ afwijkt van $\varphi_n(z)$, in II_n en III_n minder dan $\frac{1}{n}$ van nul. De functie $P_n(z)$ nadert voor $n = \infty$ blijkbaar tot nul in het heele vlak. Volgens de stelling van § 5 moet de functie $\psi_n(x,y,z)$ quasi-uniform convergeeren op iedere puntverzameling V: $P_1(x_1, y_1, 0)$, $P_2(x_2, y_2, 0)$, ... met $x_k \neq 0$, $y_k \neq 0$, $\lim_{k=\infty} x_k = 0$ en $\lim_{k=\infty} y_k = 0$. Dat dit het geval is blijkt als volgt: Kies een willekeurig getallenpaar ε, N. Zij $N_0 > N$ en tevens $> \frac{1}{2\varepsilon}$. Van af een zekeren index k_0 liggen x_k en y_k beide in I_{N_0}, zoodat

$$\left| \psi_{N_0}(x_k, y_k, 0) - N_0^2 \left(e^{-N_0^2 x_k^2} - e^{-N_0^2 y_k^2}\right) \right| < \frac{1}{4N_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Er is dus een getal δ, zoodat voor $|x_k| \leqq \delta$ en $|y_k| \leqq \delta$

$$|\psi_{N_0}(x_k, y_k, 0)| < \varepsilon$$

Dit gebeurt dus van af zekeren index k_1.

Verder is er een getal $N_1 > N$ te vinden, zoodat $N_1 > \frac{4M}{m^2 \varepsilon}$, waarin M = het maximum van $|x_k|$ en $|y_k|$, m het minimum voor $k = 1, 2, \ldots k_1 - 1$, en zoodat tevens $\frac{1}{N_1} < |x_k| < N_1$ en $\frac{1}{N_1} < |y_k| < N_1$ voor $k = 1, 2, \ldots k_1 - 1$, zoodat de punten $P_1, P_2, \ldots P_{k_1-1}$ binnen $II_{N_1} + III_{N_1}$ liggen, en

$$\left| \psi_{N_1}(x_k, y_k, 0) \right| < \frac{4M}{N_1 m^2} < \varepsilon.$$

Daar nu in ieder punt van het vlak $\lim \psi_n = 0$, voldoet in ieder punt van V één der beide indices N_0 en N_1 aan $|\psi_n - \lim_{n=\infty} \psi_n| < \varepsilon$, waarmee de quasi-uniforme convergentie is aangetoond. Verder heeft de grensfunctie in 0 nul tot afgeleide, terwijl $\lim_{n=\infty} P'_n(0) = +\infty$ [1]).

---

[1]) Immers voor iedere n is

$$|P'_n(0) - \varphi'_n|(0) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{I_n} \frac{\{P_n(t) - \varphi_n(t)\}\, dt}{t^2} \right| < \frac{4n^2 + 2}{2\pi} < \frac{2n^2 + 1}{3}$$

Daar $\varphi'_n(0) = n^2$, heeft men $|P'_n(0)| > \frac{n^2 - 1}{3}$.

Volgens § 8 kan de functie $P_n^*(x, y)$ niet quasi-uniform convergent zijn op iedere V. Voor V kiezen we: $x = 0$, $0 \leq y \leq a$. Daar de continue functie $P_n^*(x, y)$ voor $y \neq 0$ convergeert tot nul en voor $y = 0$ tot $+\infty$, is de convergentie niet quasi-uniform.

14. *Als in een gebied G een reeks van analytische functies convergeert tot een analytische functie, terwijl de reeks der afgeleiden op iedere gesloten puntverzameling van G quasi-uniform convergeert, dan mag de reeks overal in G termsgewijs gedifferentieerd worden.*

Vooreerst merken we op, dat ieder gebied van G een ander gebied bevat, waar de convergentie gelijkmatig is[1]), zoodat in het laatste gebied de termsgewijze differentiatie mag worden toegepast.

Daar $f_n'(z)$ tot een in G continue functie convergeert die op een overal dichte puntververzameling met $f'(z)$ samenvalt, heeft men overal $f'(z) = \lim\limits_{n=\infty} f_n'(z)$.

[1]) P. MONTEL. These, bl. 83.

Natuurkunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. A. SCHOUTEN en D. J. STRUIK: „*Over n-voudig orthogonale stelsels van n—1 dimensionale uitgebreidheden in een algemeene uitgebreidheid van n-afmetingen*".

(Deze mededeeltng zal in een volgend Zittingsverslag worden opgenomen).

De Heer J. BÖESEKEN biedt voor de boekerij der Akademie ten geschenke aan:

1. Namens den Heer G. E. HOEFFELMAN een exemplaar van diens dissertatie: „De acetyleering van nitrophenolen onder den invloed van eenige katalysatoren".

2. Namens den Heer CHR. VAN LOON een exemplaar van diens dissertatie: „Stereochemie der cyclopentaan en der hydrindeen 1,2 — diolen".

De vergadering wordt gesloten.

---

18 December 1919.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 25 OCTOBER 1919.

DEEL XXVIII.

N°. 4.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren I. K. A. Wertheim Salomonson en Max Weber dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Eene missive van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 27 September 1919, berichtende dat bij Zijner Exc.'s beschikking van dien datum, n°, 2942[1], Afd. K. W. aan den Heer H. Boschma, overeenkomstig het voorstel der Afdeeling, ten behoeve van zijne uitzending naar het botanisch Station te Buitenzorg ook eene Rijkssubsidie over 1919 is verleend van *f* 700 en verzoekende van de Afdeeling te mogen vernemen wanneer de Heer Boschma naar Buitenzorg denkt te vertrekken.

De inhoud dezer missive is aan den Heer Boschma medegedeeld met verzoek om den vermoedelijken datum van zijn vertrek aan de Afdeeling op te geven.

3°. Eene missive van denzelfden Minister dd. 14 October 1919 met bericht dat de voorgestelde wijzigingen van § § 8, 13 en 20 van het Reglement van Orde der Afdeeling door Zijne Exc. zijn goedgekeurd.

Aangenomen voor kennisgeving.

4°. Bericht van den Heer H. Boschma dd. 6 October 1919, dat hij voornemens is in Juli 1920 zijne studiereis naar Buitenzorg, voor rekening van het Buitenzorg-fonds met steun der Rijkssubsidie, te aanvaarden.

Aan den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen is hiervan kennis gegeven.

5°. Bericht van den Heer L. Rutten dd. 14 October 1919, dat hij zijne benoeming tot Correspondent der Afdeeling aanneemt, onder dankzegging voor de benoeming.

Aangenomen voor kennisgeving.

De Voorzitter verwelkomt den Heer A. Einstein, hoogleeraar te Berlijn, die thans in Nederland vertoevend, de vergadering bijwoont.

Ook richt hij een woord van welkom tot den Heer L. Rutten, onlangs benoemd tot Correspondent der Afdeeling en tijdelijk in Nederland verblijvend, die voor de eerste maal bij eene vergadering der Afdeeling tegenwoordig is.

De Heer H. A. Lorentz doet eene mededeeling naar aanleiding van de jongste bevestiging van de algemeene relativiteitstheorie van Prof. Einstein. (Deze mededeeling wordt niet afgedrukt in dit Verslag).

Aan de thans volgende gedachtenwisseling wordt deelgenomen door de Heeren W. H. Julius, M. W. Beijerinck, W. Einthoven, J. P. Kuenen, P. Ehrenfest en Prof. Einstein zelf.

Geologie. — Praeadvies betreffende een missive van Zijn Excellentie den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, dd. 22 Augustus 1919, N°. 2931, Afd. K. W. en een als vervolg daarop ontvangen schrijven van denzelfden Minister dd. 27 September 1919, N°. 3439, Afd. K. W., beide vergezeld van een request van gelijke strekking, in welke missiven het advies der Afdeeling gevraagd wordt over het in die requesten uitgedrukte verlangen om een Rijkssubsidie ad *f* 2000 te mogen ontvangen ten behoeve van de Publicatie-Commissie van het Geologisch Mijnbouwkundig Genootschap voor Nederland en Koloniën.

Het Geologisch-Mijnbouwkundig Genootschap voor Nederland en Koloniën, waarvan alle hoogleeraren voor de Geologie, de Mineralogie, de Geografie en de Technische vakken der Mijningenieurs in Nederland lid zijn, is een lichaam analoog aan het Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap en van een geheel wetenschappelijk karakter, zooals blijkt uit alle stukken, die in hare „Verhandelingen" verschijnen.

Een onderdeel van het Genootschap, speciaal belast met het verzamelen harer werken is de Publicatie-Commissie. Op dit oogenblik is voor den druk onder bewerking een Geologische Nomenclatuur in Hollandsch, Fransch, Duitsch en Engelsch, ten doel hebbende uniformiteit te brengen in de benoeming van de geologische begrippen.

Dat dit reuzenwerk in Nederland begonnen wordt is daarom van zooveel belang, omdat daardoor in ons land een centrum zal kunnen ontstaan voor de codificeering der geologische nomenclatuur.

De toenemende belangstelling, die de Werken van het Genootschap tot zich trekken, verhoogt uit den aard der zaak de kosten, welke aan de publicatie der Verhandelingen verbonden zijn. Maar dit is in niet mindere mate het geval tengevolge der tegenwoordige prijsstijgingen. Daar deze kosten thans zoozeer zijn toegenomen, dat zij zelfs met den steun van verschillende Maatschappijen, de contributievermeerdering der leden en de bijdragen der particuliere lichamen, die bij het Genootschap belang hebben, niet meer kunnen bestreden worden, heeft het Bestuur zich tot Zijn Excellentie den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen gewend met verzoek om een subsidie van *f* 2000.

Op grond van de groote wetenschappelijke beteekenis die aan de

bovengenoemde omvangrijke onderneming moet worden toegekend, zoowel voor de verdere ontwikkeling der Geologie in het algemeen als die van Nederland in het bijzonder, geven ondergeteekenden de Akademie in overweging het verzoek van het Genootschap wel te willen ondersteunen.

(get.) M. W. Beijerinck.
,, J. F. van Bemmelen.

De vergadering neemt dit prae-advies ongewijzigd over, dat nu als het advies der Afdeeling aan den Minister zal worden medegedeeld.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt een mededeeling aan van de Heeren P. E. VERKADE en N. L. SÖHNGEN over: *„De aantasting van cis-transisomere onverzadigde zuren door schimmels"*.

(Mede aangeboden door den Heer A. F. HOLLEMAN).

De voor eenigen tijd in deze Verslagen verschenen mededeeling van BÖESEKEN en VAN LOON[1]) over cis-transisomerie geeft ons aanleiding tot publikatie der voorloopige resultaten van een reeds voor een paar jaar opgezet onderzoek, hetwelk ten doel heeft het gedrag van isomere organische zuren (in het bizonder van cis-transisomeren) tegenover verschillende schimmels na te gaan. Het zal nl. in het onderstaande blijken, dat het door ons op dit gebied verzamelde feitenmateriaal in overeenstemming is met de door genoemde auteurs gegeven theoretische beschouwingen, in zooverre als ook hier weer geen algemeene zekerheid betreffende de konfiguratie dezer onverzadigde zuren kon worden verkregen.

Directe aanleiding tot dit onderzoek was het algemeen bekende feit, *dat fumaarzuur uiterst gemakkelijk, maleïnezuur daarentegen in het geheel niet door aspergillus niger of penicillium glaucum wordt geassimileerd.* O.a. is dit geval uitvoerig bestudeerd door BUCHNER[2]), welke voor het onderzoek gebruik maakte zoowel van de zure als van de neutrale ammoniumzouten dezer beide zuren in oplossingen van diverse koncentraties. Hij konkludeerde:

„dass den Mycelpilzen die Fähigkeit mangelt, Maleïnsäure in Fumarsäure überzuführen, eine Umwandlung, die für den Chemiker zu den leichtesten Operationen gehört".

Ook bij andere biologische processen openbaart zich een dergelijk frappant verschil tusschen fumaar- en maleïnezuur. Zoo vond JSHIZUKA[3]) bv. dat, aangewend *in gekoncentreerde oplossing* der neutrale natriumzouten, de remmende invloed op de ontwikkeling van chlorophylhoudende planten (bladeren, takken, zaden enz.) en van lagere waterdieren (rotatoriën, infusoriën, capepoden) bij maleïnezuur aanmerkelijk grooter was dan bij fumaarzuur. *In zeer verdunde oplossing* was er daarentegen tusschen de werking van beide zouten geen

---

1) Deze Verslagen 27. 5 (1918).

2) Ber. 25. 1161 (1892).

3) Bull. Coll. Agr. Tokyo 2. 484; C. 1897 (1) 934.

verschil waarneembaar; misschien werd hier het maleïnezuur in fumaarzuur omgezet, alvorens het nog remmend kon werken.

Dezelfde onderzoeker konstateerde een dergelijk verschil tusschen beide zuren wat betreft hun invloed op het dierlijk (honden-) lichaam. Ruim 1 gr. maleïnezuur per K.G. lichaamsgewicht was reeds doodelijk, terwijl een gelijke dosis fumaarzuur geen noemenswaardige gevolgen had.

Volgens SHIBATA[1]) had een neutraal zout van fumaarzuur wel, van maleïnezuur daarentegen geen chemotactische werking op de spermatozoïden van *Isoëtes japonica*. Juist wat betreft de chemotaxis wordt echter gewoonlijk een omgekeerd resultaat verkregen; dit bleek bv. bij de onderzoekingen van LIDFORSS[2]) over *Equisetum*-spermatozoïden (maleïnezuur wel chemotaktische werking, fumaarzuur niet), van PFEFFER[3]) over die van de varens (maleïnezuur iets beter dan fumaarzuur) en van SHIBATA[4]) over die van *Salvinia*.

BISCHOFF[5]) vermeldt daarentegen, dat *penicillium glaucum* in waterige oplossingen van zoowel citrakon- als mesakonzuur ook na 163 dagen staan bij kamertemperatuur geen groei vertoonde.

Natuurlijk zijn in de literatuur nog wel verspreide mededeelingen te vinden over de aantastbaarheid van verschillende onverzadigde zuren door schimmels; vergelijkende proeven met dergelijke stereoisomere zuren hebben wij echter verder niet kunnen vinden. Waar dus blijkbaar onze kennis op dit gebied nog zeer gering is, kwam het ons wenschelijk voor te trachten hierin eenige verbetering te brengen.

Bij een dergelijk onderzoek speelt de zuiverheid der te onderzoeken preparaten een uiterst belangrijke rol; het is daarom zeker niet overbodig hier een en ander over herkomst en zuivering der zuren (en dan tegelijkertijd iets over hun konstitutie) mede te deelen.

1. *maleïnezuur*: preparaat van KAHLBAUM, gezuiverd via het anhydried. Smpt. 135°.

2. *fumaarzuur*: do., omgekrist. uit water.

3. *citrakonzuur*: verzameling-preparaat T. H., omgekrist. uit aether-petroleumaether. Smpt 91°.

4. *mesakonzuur*: do., tevens zelf uit citrakonzuur bereid[6]), omgekrist. uit water.

---

1) Ber. d. deutsch. botan. Ges. **22**. 478 (1904).

2) ibid. **23**. 314 (1905).

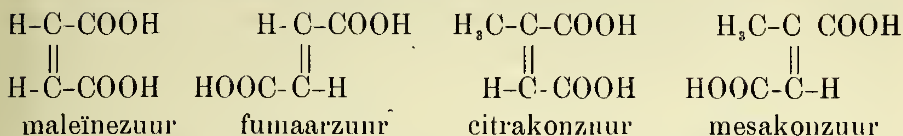
3) Unters. a. d. botan. Inst. Tübingen **1**. 382.

4) The botanical Magazine **19**. 219 (1905).

5) Ber. **24**. 1072 (1891).

6) FITTIG: Ann. **304**. 117 (1898).

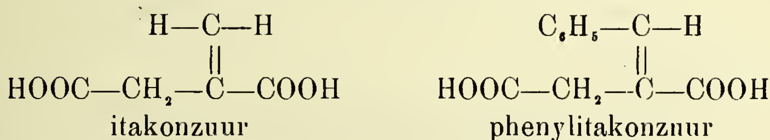
De konstitutie dezer vier zuren staat volkomen vast:



5. *itakonzuur*: verzameling-preparaat T. H., omgekrist. uit water.

6. *phenylitakonzuur*: bereid volgens STOBBE [1]) door kondensatie van barnsteenzure ester met benzaldehyde en Na-aethylaat. Omgekrist. uit water, daarna uit aether-petroleumaether.

Deze beide zuren bezitten onderstaande structuur:

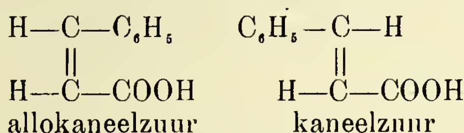


Die van het laatste zuur is o. a. door STOBBE en HORN [2]) bewezen; met gekoncentreerd zwavelzuur ging het nl. in zijn anhydried en niet in het *α-indon-β-azijnzuur* over, in tegenstelling met het uit phenylitakonzuur door koken met natronloog verkregen stereoisomere phenylatikonzuur.

7. *allokaneelzuur*: verkregen door partieele katalytische reductie volgens PAAL van phenylpropiolzuur; het zuur werd via zijn anilinezout gezuiverd en tenslotte uit petroleumaether omgekristalliseerd. Smpt. 68°.

8. *kaneelzuur*: verzameling-preparaat T. H. (synthetisch), meermalen omgekrist. uit water. Smpt. 133°.

Ook van deze beide zuren staat op tal van gronden de konstitutie met zekerheid vast:



9. *glutakonzuur*: eigen preparaten, bereid volgens verschillende methoden [3]). Omgekrist. uit aethylacetaat en uit aether-benzol. Smpt. 136—138°.

10. *akonietzuur*: verkregen door inwerking van 70 %-ig zwavelzuur op citroenzuur [4]). Omgekrist. uit water, daarna uit aether-benzol.

In deze beide zuren zijn — zooals o. a. uit de onderzoekingen

---

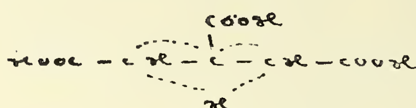
1) Ber. 41. 4350 (1908).

2) ibid. 41. 3983 (1908).

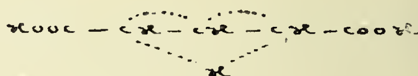
3) VERKADE: Deze Verslagen 24. 955 (1915).

4) HENTSCHEL: J. pr. (2) 35. 205 (1887).

van THORPE c.s. [1]) gebleken is — de α- en γ-positie identiek. Men schrijft hen tegenwoordig een „*normale*" structuur toe, waarin een waterstofatoom gelijktijdig onder invloed van het α- en het γ-koolstofatoom staat en dus in zekeren zin een vierring gevormd wordt; de dubbele binding is „zwevend". De stand der karboxylgroepen ten opzichte van elkaar in de ruimte is dan vooralsnog onbekend.



akonietzuur



glutakonzuur

11. *isocrotonzuur* [2]).

12. *crotonzuur*: bereid door kondensatie van paraceetaldehyde met malonzuur in tegenwoordigheid van ijsazijn [3]). Omgekrist. uit water. Smpt. 72°.

13. $\beta\beta$- *dimethylakrylzuur*: bereid uit aceton, malonzuur en azijnzuuranhydride [4]). Omgekrist. uit water. Smpt. 70°.

14. *angelicazuur* [2]).

15. *tiglinezuur* [2]).

16. *undekyleenzuur*: zeer zuiver preparaat, verkregen door vakuümdistillatie van ricinusolie. Kpt $_{15}$ = 165°. Smpt. 24°.5.

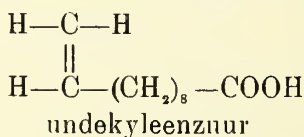
17. *oliezuur*: preparaat van KAHLBAUM.

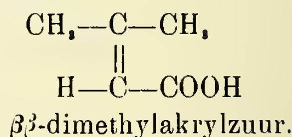
18. *elaïdinezuur*: do., tevens zelf uit oliezuur bereid; omgekrist. uit alkohol. Smpt. 51°.

19. *erucazuur*: do., omgekrist. uit alkohol. Smpt. 33—34°.

20. *brassidinezuur*: bereid uit erucazuur met behulp van salpeterigzuur [5]); omgekrist. uit alkohol. Smpt. 66°.

De zuren 13 en 16 hebben resp. de struktuur:





Die der zuren 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19 en 20 staat echter nog

---

1) THORPE en ROGERSON: Soc. **87**. 1669 (1905); THOLE en THORPE: ibid. **99**. 2187 (1911) (glutakonzuur); ROGERSON en THORPE: ibid. **89**. 631 (1906) (akonietzuur).

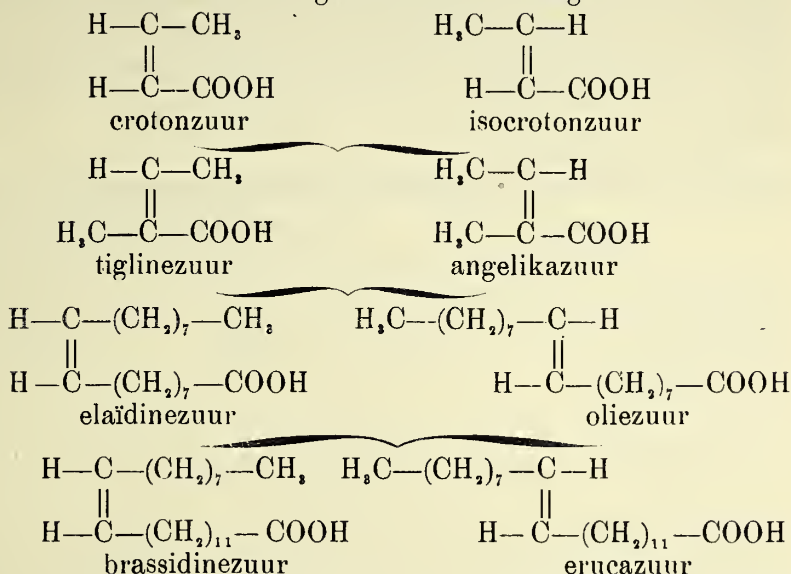
2) Dr. MONTAGNE te Leiden was zoo vriendelijk ons een kleine hoeveelheid van dit zuur te zenden. Het werd niet verder gezuiverd.

3) KOMNENOS: Ann. **218**. 147 (1883).

4) MASSOT: Ber. **27**. 1574 (1894).

5) REIMER en WILL: Ber. **19**. 3321 (1886).

geenszins vast; op grond hunner chemische en physische eigenschappen worden hun meestal de volgende formules toegekend:



Van al deze zuren was de zuiverheid door zorgvuldige titraties met barietoplossing en eventueel door bepaling der dissociatiekonstante gekontroleerd.

De kultuurvloeistof bestond steeds uit leidingwater, waarin was opgelost $\frac{1}{20}$ % KH_2PO_4, $\frac{1}{20}$ % $MgSO_4$, $\frac{1}{100}$ % $FeCl_3$ en $\frac{1}{100}$ % $MnSO_4$. Als stikstofbron werd toegevoegd hetzij $\frac{1}{20}$ % Am_2SO_4, hetzij $\frac{1}{20}$ % KNO_3; op de resultaten maakte dit geen verschil, gelijk uit de desbetreffende proeven bleek.

Aan deze vloeistof werd nu toegevoegd $\frac{1}{4}$ % van het te onderzoeken zuur, benevens *een overmaat* $CaCO_3$; vervolgens werd gedurende 10 min. bij 110° gesteriliseerd [1]). Van alle zuren werd dus het *Ca-zout* onderzocht; dat deze zouten vaak weinig in water oplosbaar zijn doet hier niets ter zake; immers de aantasting door de schimmels gaat zeer langzaam en de oplossing blijft dus altijd wel met het Ca-zout verzadigd. Een overmaat $CaCO_3$ werd aangewend met het doel eventueel bij de assimilatie door afbraak ontstane nieuwe zuren te binden en zoodoende de vloeistof steeds zooveel mogelijk neutraal te houden.

---

[1]) Bij deze hooge temperatuur is een gedeeltelijke omlegging van sommige dezer zuren in hun stabiele stereoisomeren niet ondenkbaar. Proeven werden daarom genomen, waarbij het zuur ten slotte aan de *van te voren* gesteriliseerde kultuurvloeistof + krijt werd toegevoegd, waarna nog een oogenblik werd opgekookt. De dus verkregen resultaten kwamen met de langs den bovenbeschreven weg verkregene overeen.

De proeven met *aspergillus niger* werden verricht bij 30° C., die met *penicillium glaucum* bij 22° C. De resultaten van verschillende onderling met elkaar kloppende series zijn vervat in onderstaande tabel; zij zijn volmaakt betrouwbaar, daar steeds in twijfelachtige gevallen de proeven met een nieuw preparaat van het zuur werden herhaald.

Ca-zout van	*Aspergillus-niger.*	*Penicillium glaucum.*
1. maleïnezuur	—	—
2. fumaarzuur	goed	goed
3. citrakonzuur	—	—
4. mesakonzuur	—	—
5. itakonzuur	—	—
6. phenylitakonzuur	—	—
7. allokaneelzuur		
8. kaneelzuur	goed	goed
9. glutakonzuur	zwak	zwak
10. akonietzuur	goed	goed
11. isocrotonzuur	—	—
12. crotonzuur	—	—
13. $\beta\beta$-dimethylakrylzuur	—	—
14. angelikazuur	—	—
15. tiglinezuur	—	—
16. undekyleenzuur	—	—
17. oliezuur	goed	goed
18. elaïdinezuur	—	—
19. erucazuur	goed	goed
20. brassidinezuur	—	—

Het eerste springt hier wel in het oog het volmaakt gelijke gedrag van beide schimmels. Wij zullen misschien later gelegenheid hebben op dit punt uitvoerig terug te komen.

Van eenige regelmatigheid der resultaten in verband met de atoomkonfiguratie der zuren valt intusschen niets te bespeuren. Op de volgende punten zij nog terloops de aandacht gevestigd:

a. Typisch is wel het verschillend gedrag van olie- en elaïdine-

zuur, resp. van eruca- en brassidinezuur; juist het in de natuur voorkomende labiele[1]) isomeer wordt geassimileerd.

b. Bij de lagere termen der reeks van olefinemonokarbonzuren treedt een dergelijk markant onderscheid tusschen de stereoisomeren absoluut niet op (vgl. 11 met 12, 14 met 15); *het is bijgevolg uitgesloten om — zooals wij hoopten — de al of niet aantasting door schimmels te gebruiken als biochemische onderscheidingsmethode tusschen dergelijke paren van cis-transisomeren.*

c. Ditzelfde blijkt ook bij andere homologe reeksen; zoo is bv. het scherpe verschil tusschen fumaar- en maleïnezuur bij hun monomethyl-derivaten (3 en 4) geheel weggevallen[2]). Omgekeerd worden zoowel het gewone als het allokaneelzuur (7 en 8) gemakkelijk aangetast.

d. Beide zuren met een „zwevende" dubbele binding (9 en 10) worden door de schimmels als voedsel gebruikt.

Ook ten opzichte der *sporevorming* werden zeer uiteenloopende resultaten verkregen. Soms bleef sporevorming geheel achterwege (bv. bij kaneelzuur); bij andere zuren (bv. mesakonzuur) trad bij een uiterst geringe hoeveelheid mycelium een goede sporevorming op enz. Wij achten het echter van geen belang hierop thans nader in te gaan.

Geheel overeenkomstige resultaten werden *met beide schimmels* verkregen, wanneer in plaats van de calcium-zouten de *vrije zuren* — indien mogelijk tot een koncentratie van $^1/_4$ $^0/_0$; anders tot verzadiging — aan dezelfde kultuurvloeistof als boven werden toegevoegd. Alleen trad nu met *kaneelzuur* in het geheel geen groei op.

Wij hebben getracht het gedrag der vrije onverzadigde zuren tegenover de schimmels aan de hand van enkele in de literatuur vermelde feiten op eenvoudige wijze te verklaren, echter zonder veel succes, zoodat wij voorloopig de al of niet aantastbaarheid der zuren in hoofdzaak wel *op hun verschillende chemische konstitutie* moeten terugvoeren; over den aard van het verband tusschen chemische konstitutie en physiologische werking valt intusschen niets met zekerheid te zeggen.

Van de opgeworpen verklaringswijzen noemen wij de volgende:

---

[1]) Vgl. betreffende de stabiliteit o.a. de door STOHMANN en LANGBEIN bepaalde verbrandingswarmten dezer zuren: J. pr. (2) **42** 361 (1890); Ph. Ch. **10**. 412 (1892).

[2]) *De remmende werking van de methylgroep* is voor andere gevallen (methylbarnsteenzuren) reeds door WATERMAN gekonstateerd (Proefschrift Delft 1913, pag. 115—116).

1. Door WATERMAN[1]) zou — o.a. door proeven met kleine hoeveelheden zwavelzuur — aangetoond zijn, dat de aanwezigheid van 0.6 mgr. waterstofionen in 50 cc. vloeistof reeds een duidelijk remmenden invloed op den groei van *penicillium glaucum* uitoefent, terwijl bij aanwezigheid van ± 1 mgr. dezer ionen in die vloeistof de groei geheel zou uitblijven; aan de werking der waterstofionen schreef hij ook toe, dat in eenigszins meer gekoncentreerde oplossingen van oxaalzuur, malonzuur, wijnsteenzuur enz. geen groei optreedt. *Aspergillus niger* zou aanmerkelijk minder gevoelig voor waterstofionen zijn; hier trad nl. eerst remming van den groei op bij een ongeveer 4.5 × zoo groote koncentratie dezer ionen[2]).

Het sterkste der door ons onderzochte zuren is het maleïnezuur ($K = 1.2 \times 10^{-2}$); in 50 cc. eener $^1/_4$ $^0/_0$-ige oplossing hiervan bevinden zich volgens berekening 0.56 *mgr.* waterstofionen, zoodat wij hier juist de koncentratie, waarbij remming optreedt, zouden bereiken. Bij alle andere zuren is deze hoeveelheid nog aanmerkelijk kleiner (bij akonietzuur bv. 0,2 mgr., bij crotonzuur slechts 0.04 mgr. per 50 cc. enz.). Het niet aangetast worden van de meeste der zuren door de schimmels is dus langs dezen weg niet te verklaren; trouwens de in tegenwoordigheid van een overmaat $CaCO_3$ verkregen resultaten zouden dan ook nog op een interpretatie wachten.

2. Geleid door de gewichtige op breeden grondslag verrichte onderzoekingen van OVERTON en ook van HANS MEYER over het verband tusschen de snelheid van indringen van vele verbindingen in de cel en hun verdeeling tusschen olie en water kon bv. WATERMAN[3]) de werking, welke allerlei stoffen op de groei van *penicillium glaucum* uitoefenen uit hun oplosbaarheid resp. in water en in olijfolie verklaren.

Van een aantal der door ons bestudeerde onverzadigde zuren hebben wij nu deze zelfde oplosbaarheden bij 25°.0 bepaald, teneinde na te gaan of ook in ons geval het — vaak frappante — gedrag der zuren uit deze gegevens te verklaren zou zijn.

De gebruikte olijfolie was „Olio finissimo d'oliva di Lucca", merk „La Gama", welwillend door de Fransch-Hollandsche Oliefabriek Calvé-Delft voor dit doel ter beschikking gesteld; zij reageerde zeer zwak zuur, zoodat bij de oplosbaarheidsbepalingen steeds een kleine correctie werd aangebracht. Een overmaat van het te onderzoeken zuur werd met de olijfolie in gesloten stopfleschjes in een thermostaat bij 25°.0 geschud tot zich het evenwicht had ingesteld, wat

[1]) Proefschrift pag. 106 e.v.; Zentralbl. f. Bakteriologie **42**. 639 (1915).

[2]) BÖESEKEN en WATERMAN: Deze Verslagen **20**. 1246 (1910—11).

[3]) Proefschrift pag 72 e.v.

steeds binnen enkele uren het geval was. Een deel der oplossing werd nu na bezinken uitgepipetteerd, overgebracht in een gewogen stopflesch, gewogen en na toevoegen van wat koolzuurvrij water onder voortdurend heftig schudden met barietoplossing getitreerd. Als indikator diende hierbij fenolftaleïne.

Deze methode is veel eenvoudiger dan de door WATERMAN gevolgde; immers deze kookte de uitgepipetteerde olijfolie herhaaldelijk (soms zelfs 20 maal) met gedistilleerd water uit en titreerde dan telkens de waterige vloeistof. Uit kontrôleproeven met afgewogen hoeveelheden salicylzuur bleek, dat onze methode eveneens zeer goede resultaten gaf.

Bepaald werden de volgende oplosbaarheden in grammen per 100 gram van het oplosmiddel.

	in 100 gram water.	*in 100 gr. olijfolie.*	$V.G._{25}$
1. maleïnezuur	80.8	0.089	0.0011 }
2. fumaarzuur	0.63	practisch onoplosbaar	zeer klein }
3. citrakonzuur	360	0.49	0.0014 }
4. mesakonzuur		0.058	}
7. allokaneelzuur	0.845 [1]		}
8. kaneelzuur	0.0546 [1]	1.17	21.4 }
10. akonietzuur	40.0	0.008	0.0002
11. isocrotonzuur	∞	∞	? }
12. crotonzuur	9.40	9.3	1 }
16. undekyleenzuur	zeer weinig oplosbaar	∞	∞
17. oliezuur	practisch onoplosbaar	∞	∞ }
18. elaïdinezuur	„ „	7.87 [2]	zeer groot }
19. erucazuur	„ „	zeer groot	zeer groot }
20. brassidinezuur	„ „	0.75	zeer groot }

Het verdeelingsgetal is dan:

$$V.G._{25} = \frac{\text{grammen stof in 100 gram olijfolie [3]}}{\text{grammen stof in 100 gram water.}}$$

[1]) JUL. MEYER: Z. f. El. **17**. 978 (1911).

[2]) Elaïdinezuur, opgelost in olijfolie, kristalliseert bij afkoeling — in tegenstelling met alle andere zuren — zeer gemakkelijk uit; de groote kristallisatiesnelheid van dit zuur is trouwens bekend.

[3]) De dissociatie der zuren in waterige oplossing is oorzaak, dat het aldus bepaalde verdeelingsgetal afhankelijk is van de koncentratie; hiermee is echter om

Deze cijfers geven aanleiding tot de volgende opmerkingen:

a. In de eerste plaats valt op, dat van twee isomeren *datgene, hetwelk het meest in water oplosbaar is, ook het beste in olijfolie oplost* (vgl. 1 met 2, 3 met 4, 7 met 8, 11 met 12).

b. Van een aantal der zuren is nu het gedrag tegenover de schimmels inderdaad zeer goed uit de oplosbaarheidsgetallen te verklaren:

1°. *fumaarzuur* en *akonietzuur* hebben zeer kleine verdeelingsgetallen; zij dringen dus slechts langzaam in de cel door en zullen dus gemakkelijk door de schimmels kunnen worden verwerkt.

2°. bij *olie-* en *erucazuur* zijn de verdeelingsgetallen zeer groot; intusschen zal hier van een overlading van het organisme geen sprake zijn — het zuur zal toch als voedsel kunnen dienen — daar de absolute oplosbaarheid in water zoo uiterst gering is en het zuur daardoor toch nog maar langzaam en in kleine hoeveelheden in de cel doordringt.

3°. *kaneelzuur, isocrotonzuur* en *crotonzuur* vertoonen geen groei; dit is in overeenstemming met hun groot verdeelingsgetal, gepaard aan hun reeds meer of minder aanzienlijke oplosbaarheid in water.

c. In alle andere door mij onderzochte gevallen loopen wij echter hopeloos vast; ook deze mogen hier even in het kort worden besproken:

1°. de oplosbaarheid van *elaïdinezuur* en *brassidinezuur* in olijfolie is wel aanmerkelijk geringer dan die van hun isomeren olie- en erucazuur, doch toch altijd zeker nog groot genoeg om flinken groei der schimmels te doen verwachten, ook nog, indien zooals uit konklusie *a* afgeleid zou kunnen worden, hun oplosbaarheid in water eveneens geringer is.

2°. het *undekyleenzuur* vertoont dezelfde oplosbaarheidsverhoudingen als het oliezuur, is alleen iets meer in water oplosbaar. Wij zouden dus ook hier groei verwachten; deze blijft intusschen geheel uit.

3°. in hun oplosbaarheidsverhoudingen vertoonen *maleine-, citrakon-* en akonietzuur groote overeenstemming; niettegenstaande dat worden de beide eersten niet, het laatste echter wordt zeer gemakkelijk door de schimmels geassimileerd.

4°. geheel hetzelfde als bij 3° vinden wij bij vergelijking van *mesakon-* en fumaarzuur.

Aannemende dat de assimilatie plaats vindt via een lipoïdlaag *en dat de lipoïdoplosbaarheid der zuren vergelijkbaar is met die in olijfolie* komen wij dus allerminst tot een verklaring voor de al of niet

---

voor de hand liggende redenen bij ons onderzoek geen rekening gehouden. Evenmin weten wij iets over een eventueele polymerisatie der zuren in de olijfolie, welke eveneens het verdeelingsgetal zou beïnvloeden.

aantastbaarheid der zuren door de schimmels. Evenmin — en dit behoeft niet nader betoogd te worden — komen wij tot een verklaring indien aangenomen wordt, dat de zuren in het organisme *via een waterlaag* (protoplasma) doordringen. Bijgevolg kan ook de onderstelling dat de celwand uit lipoïd *en* water is opgebouwd en de te assimileeren stoffen dan van den eenen of van den anderen weg of van beide wegen gebruik kunnen maken om in het organisme te komen, hier niet voldoen. Van dergelijke uitbreidingen van de OVERTON'sche lipoïdtheorie — *welke dus hier geen klaarheid geven* — noemen wij die van NATHANSOHN, welke de plasmahuid als een mozaiek van lipoïd en protoplasmatisch materiaal aanneemt, van CZAPEK, welke deze als een uiterst fijne vet-emulsie opvat[1]) of van LEPENSCHKIN, welke deze uit lecithine-albumineverbindingen opgebouwd denkt.

Alleen met de onderstelling, dat de plasmahuid een *lyophiel kolloïde* zou zijn — dat ze bv. zou bestaan uit lipoïde, hetwelk een aanzienlijke hoeveelheid water heeft opgezogen — zijn onze resultaten met de vrije zuren niet per sé in tegenspraak. Wij weten nl. niet, hoe een dergelijke wand zich tegenover de zuren zou gedragen.

Echter blijft dan nog over het gedrag der Ca-zouten te verklaren. Wij zouden, daar ze zich tegenover de schimmels gelijk gedragen, moeten aannemen, dat deze — met uitzondering van Ca-cinnemaat — overeenkomstige verdeelingsgetallen voor lipoïd-water bezitten als de vrije zuren. Dit is mij vrij onwaarschijnlijk.

Het eenige positieve feit, hetwelk uit deze onderzoekingen af te leiden is, is dat de al of niet assimileerbaarheid der zuren zeker wel vooral afhangt van de konstitutie, dus van de verschillende rangschikking der atomen in het molekuul; zeer goed blijkt dit ook al uit het vrijwel geheel parallel loopen der resultaten verkregen resp. met de calcium-zouten en met de vrije zuren.

Rotterdam—Wageningen, 29 April 1919.

---

[1]) Vgl. VON MOELLENDORFF: Kolloïd-Zeitschr. 23. 158 (1918). Deze neemt een schuimstruktuur van het protoplasma aan, verwerpt echter de onderstelling eener semi-permeabele plasmahuid.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER spreekt over: „*Poloniumbestraling en functieherstel*".

Een aantal organen staken hun functies, wanneer men uit hun omgeving de kaliumionen wegneemt, die steeds in de circulatievloeistoffen worden aangetroffen. Deze functies keeren onmiddellijk terug, wanneer in plaats van kalium andere radioactieve atomen in de circulatievloeistoffen worden opgenomen in een hoeveelheid, die aequi-radioactief is met het weggelaten kalium.[1]) Het is hierbij onverschillig of de vervanger een α- dan wel een β-straler is, mits zijn hoeveelheid slechts zoodanig wordt gekozen, dat de totale radioactiviteit van het nieuwe bestanddeel ongeveer gelijk kan worden geacht met die van het oorspronkelijke. Voor de proefneming is geen orgaan zoo geschikt als het hart van een koudbloedig dier, met name van den kikvorsch, omdat zijn cellen aan alle zijden haast onmiddellijk (alleen door een endothelium gescheiden) door het bloed worden omstroomd.

Het aantal elementen, die op die wijze ter kaliumvervanging kunnen strekken, is vrij groot. Behalve rubidium, dat reeds als zoodanig aan S. RINGER bekend was, bevond ik uranium, thorium, radium, ionium, emanatie en actinium (als bijmengsel tot lanthanium en cerium) werkzaam, terwijl van niet-radioactieve elementen alleen caesium bruikbaar bleek.

Maar niet alleen de materieele toevoer van radioactieve elementen langs de bloedbaan kan de verloren gegane functie terugroepen, ook bestraling van buiten af is hiertoe in staat.[2]) Dit gelukte met in glas besloten mesothorium, achter mica gehouden radium en vrij geëxposeerd polonium (galvanoplastisch op koperblik). De hoeveelheid is van de orde van die, welke van uit denzelfden afstand de cultures van bacteriën in haar groei belemmert. Voor de functieherstellende bestraling diende $1\frac{1}{2}$ mill.gram-uur, voor opwekking van steriliteit van bacteriën 12 mill.gram-uur.

---

[1]) Zittingsverslag, Deel 25, p. 517 en p. 1096, p. 1282. Deel 26, p. 555 en p. 776. Proceedings vol. 19, p. 633 en p. 1043, p. 1161. Vol. 20, p. 768 en p. 773.

[2]) H. ZWAARDEMAKER, C. E. BENJAMINS en T. P. FEENSTRA, Radiumbestraling en hartswerking. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1916 II, p. 1923 (10 Nov. 1916).

H. ZWAARDEMAKER en G. GRIJNS, Arch. néerland. de physiol., t. 2, p. 500, 1918.

De oorzaak van het functieherstel, ligt alzoo in de radioactiviteit, zeker in het geval van de vrije bestralingen.

Het is tot dusverre een open vraag gebleven of deze werking der bestraling direct of indirect tot stand komt.

Het zou n.l. kunnen zijn, dat de bestralingen eerst voerden tot vrijmaking van kalium uit de kaliumdepôts, [1]) die in de hartspier voorhanden zijn en eerst secundair dit losgemaakte kalium, naar de circulatievloeistof diffundeerende, de functie doet terugkeeren. Deze mogelijkheid kon niet a priori worden ter zijde gesteld, daar het een feit is, dat tijdens bestraling niet onaanzienlijke kaliumhoeveelheden de bloedcellen en misschien de hartcellen kunnen verlaten. [2])

Dezer dagen was ik in de gelegenheid een experimentum crucis in te stellen.

Er bestaat n.l. een antagonisme tusschen α- en β-stralers. Zij doen, in gelijke activiteit te zelfder tijd aangebracht, elkanders werking volledig te niet.

Dit antagonisme geldt ook voor de tegenstelling uitwendige polonium-bestraling (α-straler) en inwendige toediening van kalium (β-straler). Het bleek toen aan een kikvorschhart, dat door onttrekking van het kalium aan de circulatie tot stilstand was gebracht en door polonium zijn kloppingen had hervat, dat toevoer van een physiologische dosis kalium stilstand gaf, terwijl herstel kwam èn door verwijdering van het polonium èn door verwijdering van het kalium. Toen het polonium verwijderd werd, herwon het kalium allengs zijn invloed; toen het kalium verwijderd werd, bleef de nawerking der α-bestraling alleen over.

Uit het bestaan van het antagonisme polonium-kalium volgt zonder

[1]) In de hartspiercellen bevindt zich een aanzienlijke hoeveelheid kalium in voorraad. Bevreemding wekt het, dat dit permanente kalium op zichzelf niet in staat is de functie te onderhouden. De oorzaak der onwerkzaamheid kan niet hierin liggen, dat de straling van het depôtkalium den zetel der automatie niet zou kunnen bereiken. Aan W. E. Ringer en mij bleek de straling hiervoor te doordringend. Eerst een weefsellaag ter dikte van 1 m.M. is in staat de sterk doordringende straling van het kalium tot op de helft te verminderen. Ik heb alzoo deze, door mij aanvankelijk gehuldigde veronderstelling moeten opgeven. Op dit oogenblik ben ik geneigd de verklaring te zoeken in de gelijktijdige aanwezigheid van ijzer. De hartspiercellen bevatten ijzeratomen ongeveer terzelfder plaats als de kaliumatomen. De miniatuur magnetische veldjes, die de ijzeratomen omringen, zullen alzoo de β-deeltjes van het kalium uit hun baan moeten brengen. De mogelijkheid dient m. i. overwogen te worden of misschien daardoor een beletsel voor straling naar buiten gegeven zou zijn. Eindelijk blijven nog biologische verklaringen uitgaande van de onwerkzaamheid eener continueele oorzaak en de prikkeling van tijdelijke afwisselende.

[2]) Nog ongepubliceerde onderzoekingen (zullen elders meegedeeld worden).

meer het rechtstreeksche van de stralingswerking in dit geval. Want, indien de vrijstelling van kalium-atomen, gesteld, dat zij plaats heeft, als intermediair zou hebben moeten dienen, dan ware het onmogelijk in te zien, dat de toevoeging van een kleine hoeveelheid kalium, geheel binnen de physiologische grenzen liggend, het poloniumkloppen tot stilstand zou hebben gedoemd. Integendeel, ware de veronderstelde mogelijkheid verwezenlijkt, dan zouden de vrijgemaakte en de nieuw toegevoegde atomen kalium elkander hebben gesteund en de functie hebben onderhouden, in stede van, zooals nu de poloniumstraling en het inwendig circuleerende kalium gemeenschappelijk tot stand brachten, de functie te verstoren.

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan: „*Over de structuur der perfekte puntverzamelingen*" (Derde mededeeling [1])).

§ 1.

Een *oppervlakkensysteem* resp. *oppervlak* is in het volgende gedefinieerd door een zoodanig tweedimensionaal fragment [2]) resp. samenhangend tweedimensionaal fragment, waarvan de in een elementhoekpunt samenkomende elementzijden òf alle òf alle op twee na aan twee elementen gemeenschappelijk zijn. In het eerste geval noemen we het hoekpunt *gewoon*, in het tweede geval *buitengewoon*, terwijl we een elementzijde gewoon of buitengewoon noemen, al naarmate ze tot twee of tot een enkel element behoort. Het oppervlakkensysteem resp. oppervlak wordt gevormd door het fragment *met uitzondering van* de buitengewone elementzijden en elementhoekpunten, die tezamen de *grens* van het oppervlakkensysteem resp. oppervlak vormen.

Een oppervlakkensysteem resp. oppervlak, welks elementen grondsimplexen eener simpliciale verdeeling van het oppervlakkensysteem of oppervlak ω zijn, zal een *deeloppervlakkensysteem* resp. *deeloppervlak* van ω worden genoemd.

Zij α een op het oppervlak ω met niet-negatieve karakteristiek gelegen afgesloten continuum, dat op ω geen elementair restgebied [3]) bepaalt, $\alpha' = \omega, \alpha'', \alpha''', \ldots$ een α approximeerende reeks van deeloppervlakken van ω, zoodat dus $\alpha = \mathfrak{D}(\alpha', \alpha'', \ldots)$, dan mogen we voor elke ν aannemen, dat $\alpha^{(\nu)}$ op ω geen elementair restgebied bepaalt, dat $\alpha^{(\nu+1)}$ een deeloppervlak is van $\alpha^{(\nu)}$ en dat de grenzen van $\alpha^{(\nu)}$ en $\alpha^{(\nu+1)}$ geen punt gemeen hebben. Zij $k^{(\nu)}$ de karakteristiek van $\alpha^{(\nu)}$, $m^{(\nu)}$ het maximum-aantal elkaar niet ontmoetende enkelvoudige gesloten krommen van $\alpha^{(\nu)}$, die tezamen $\alpha^{(\nu)}$ niet verdeelen, dan kunnen voor toenemende ν nòch $k^{(\nu)}$ nòch $m^{(\nu)}$ toenemen, zoodat een geheel positief getal g bestaat met de eigenschap, dat $k^{(g+\mu)} = k^{(g)}$ en $m^{(g+\mu)} = m^{(g)}$ voor elke niet negatieve μ. De door $\alpha^{(g+\mu+1)}$ in $\alpha^{(g+\mu)}$

[1]) Vgl. deze Verslagen XVIII, p. 833; XIX, p. 1416.

[2]) Vgl. Math. Annalen 71, p. 306.

[3]) Een deelgebied van ω heet elementair, indien het slechts op ω samentrekbare enkelvoudige gesloten krommen bevat.

bepaalde restoppervlakken zijn derhalve alle cylinderoppervlakken, het topologische karakter van $\alpha^{(g+\mu)}$ is voor elke μ gelijk aan dat van $\alpha^{(g)}$ en $\alpha^{(g+\mu+1)}$ ontstaat uit $\alpha^{(g+\mu)}$ door binnenwaartsche terugtrekking der randen. Hieruit volgt, dat tusschen α en de $\alpha^{(g+\mu)}$ de volgende relaties bestaan:

1. Bij elke combinatie $(\varepsilon, \varepsilon_1, \mu)$ bestaat een zoodanige met ε tot 0 convergeerende ε_2, dat elke ε-keten[1]) van $\alpha^{(g+\mu)}$ door een eindige reeks van ε_2-wijzigingen[1]) binnen $\alpha^{(g+\mu)}$ in een ε_1-keten van α kan worden overgevoerd.

2. Bij elke ε bestaat een zoodanige met ε tot 0 convergeerende ε_3, dat elke ε-keten van een $\alpha^{(g+\mu)}$ door een eindige reeks van ε_3-wijzigingen binnen $\alpha^{(g+\mu)}$ in een keten van α kan worden overgevoerd.

3. α en alle $\alpha^{(g+\mu)}$ bezitten een gelijke minimale multipliciteit der basis der cyclosis[2]).

4. Bij elke combinatie van een voldoend kleine ε', een ε'_1 en een μ bestaat een zoodanige met ε' tot 0 convergeerende ε_2, dat elk systeem van $(\varepsilon, \varepsilon')$-fundamentaalketens[2]) van $\alpha^{(g+\mu)}$ door een eindige reeks van ε_2-wijzigingen binnen $\alpha^{(g+\mu)}$ in een systeem van $(\varepsilon_1, \varepsilon'_1)$-fundamentaalketens van α kan worden overgevoerd.

5. Bij elke ε' bestaat een zoodanige met ε' tot 0 convergeerende ε'', dat elk systeem van $(\varepsilon, \varepsilon')$-fundamentaalketens van een $\alpha^{(g+\mu)}$ door een eindige reeks van ε''-wijzigingen binnen $\alpha^{(g+\mu)}$ in een systeem van $(\varepsilon, \varepsilon'')$-fundamentaalketens van α kan worden overgevoerd.

6. Bij elke ε bestaat een zoodanige ε^0, dat elk systeem van $(\varepsilon, \varepsilon')$-fundamentaalketens van α voor elke $\alpha^{(g+\mu)}$ een systeem van $(\varepsilon^0, \varepsilon')$-fundamentaalketens is.

Deze relaties zullen we tot uitdrukking brengen, door α een *cyclomatisch extract* van $\alpha^{(g)}$ te noemen.

Zij thans α een willekeurig op ω gelegen afgesloten continuum, α_1 de puntverzameling, die ontstaat, als we alle elementaire restgebieden van α aan α toevoegen, $\alpha_1^{(g_1)}$ een α_1 als cyclomatisch extract bevattend deeloppervlak van ω. Bij elke combinatie $(\varepsilon, \varepsilon_1)$ bestaat dan een zoodanige met ε tot 0 convergeerende ε_2, dat elke ε-keten van $\alpha_1^{(g_1)}$ door een eindige reeks van ε_2-wijzigingen binnen ω in een ε_1-keten van α kan worden overgevoerd. *We zullen ook α een cyclomatisch extract van $\alpha_1^{(g_1)}$ noemen.*

In het bijzonder zullen we een cyclomatisch extract van een element

[1]) Vgl. Math. Annalen 72, p. 422.

[2]) Ibid., p. 424.

een *elementair continuum*, een cyclomatisch extract van een cylinderoppervlak een *cylindercontinuum* noemen.

§ 2.

Zij α een op het oppervlak ω met niet-negatieve karakteristiek gelegen afgesloten puntverzameling, die op ω geen elementair restgebied bepaalt, $\alpha' = \omega, \alpha'', \alpha''', \ldots$ een α approximeerende reeks van deeloppervlakkensystemen van ω, dan mogen we voor elke ν aannemen, dat $\alpha^{(\nu)}$ op ω geen elementair restgebied bepaalt, dat $\alpha^{(\nu+1)}$ een deeloppervlakkensysteem is van $\alpha^{(\nu)}$ en dat de grenzen van $\alpha^{(\nu)}$ en $\alpha^{(\nu+1)}$ geen punt gemeen hebben. Zij $\beta^{(\nu)}$ het oppervlakkensysteem dat ontstaat, als we aan $\alpha^{(\nu)}$ de stukken, die de topologische gedaante van een element of van een cylinder bezitten, ontnemen, S een willekeurig stuk van $\beta^{(\nu)}$, $k(S)$ de karakteristiek van S, $m(S)$ het maximum-aantal elkaar niet ontmoetende enkelvoudige gesloten krommen van S, die tezamen S niet verdeelen, dan kunnen $k(S)$ en $m(S)$ geen van beide negatief en niet beide $= 0$ zijn. Er bestaan dus twee geheele niet-negatieve getallen g en h met de eigenschap, dat elke $\beta^{(g+\mu)}$ bestaat uit h stukken $\beta_1^{(g+\mu)}, \beta_2^{(g+\mu)}, \ldots \beta_h^{(g+\mu)}$, het topologische karakter van elke $\beta_s^{(g+\mu)}$ voor elke μ en elke s gelijk is aan dat van $\beta_s^{(g)}$, terwijl $\beta_s^{(g+\mu+1)}$ uit $\beta_s^{(g+\mu)}$ door binnenwaartsche terugtrekking der randen ontstaat, en het als $\mathfrak{D}(\beta_s^{(g)}, \beta_s^{(g+1)}, \ldots)$ bepaalde stuk van α een cyclomatisch extract van $\beta_s^{(g)}$ is.

Het hiermee verkregen resultaat kan in den volgenden vorm, die, zooals door een triviale redeneering blijkt, voor oppervlakken ω met negatieve karakteristiek haar geldigheid behoudt, worden uitgedrukt:

Bij iedere op een oppervlak ω gelegen afgesloten puntverzameling α bestaat een deeloppervlakkensysteem ψ van ω met de eigenschap dat α bestaat uit ten eerste een cyclomatisch extract van elk der stukken van ψ, ten tweede een verzameling van elementaire continua en cylindercontinua.

Is in het bijzonder ω een bol, dan zijn alle stukken van α elementaire continua.

Is ω een projectief vlak, dan zijn òf alle stukken van α elementaire continua, òf alle met uitzondering van één, dat een cyclomatisch extract van ω is.

Is ω een torus, dan zijn òf alle stukken van α elementaire continua, òf alle met uitzondering van één, dat een cyclomatisch extract van ω is, òf alle met uitzondering van een afgesloten cyclisch geordende verzameling van cylindercontinua, cyclomatische extracten van op ω continu in elkaar over te voeren deelcylinders van ω.

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer B. P. HAALMEIJER: „*Opmerking over lineaire homogene puntverzamelingen*".

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

We noemen een lineaire puntverzameling π *homogeen* in het interval AB, wanneer haar *binnen* een willekeurig deelinterval van AB gelegen deelverzameling eeneenduidig en gelijkmatig continu is af te beelden op het *binnen* het interval AB gelegen deel van π [1]).

Ligt de verzameling π in het interval AB *geometrisch overal dicht*, dan brengt zulk een afbeelding tevens een eeneenduidige continue afbeelding der geheele lijnsegmenten mee; zooals we zullen aantoonen, mogen we in dat geval onderstellen, dat elk der door de homogeniteit gepostuleerde afbeeldingen de richting invariant laat. Zij n.l. CD een deelinterval van AB (eventueel het geheele interval AB) en E een punt gelegen tusschen C en D. We onderscheiden de volgende mogelijkheden:

1. Voor elke keuze der punten C, D en E is bij de afbeelding der segmenten CD en CE op elkaar, de richting invariant.

2. Dit is niet het geval.

Eerste geval. Moet AB worden afgebeeld op een deelinterval FH (volgorde van links naar rechts A, F, H, B), dan zijn volgens de onderstelling zoowel AB als FH met behoud der richting af te beelden op AH en dus ook onderling.

Tweede geval. Er bestaat dan een interval CD dat op zijn deelinterval CE wordt afgebeeld met omkeering der richting. Daar het betreft een topologische afbeelding der *geheele* segmenten, volgt uit het continuiteitsaxioma het bestaan van een punt P (niet noodzakelijk tot de verzameling π behoorende), dat aan zichzelf beantwoordt. Hieruit volgt dan echter terstond het bestaan van een topologische afbeelding van het binnen CD gelegen deel van π op *zichzelf met omkeering van den richtingszin.* Eenzelfde afbeelding bestaat dus

[1]) Een analoge definitie van homogeniteit is door HAUSDORFF gegeven voor geordende verzamelingen, Grundz. der Mengenlehre, p. 173. Voor lineaire puntverzamelingen heeft BROUWER de volgende ruimere definitie ingevoerd: men noemt een lineaire puntverzameling π homogeen, wanneer voor elk puntenpaar A B dier verzameling een eeneenduidige continue transformatie der rechte lijn in zichzelf bestaat, waarbij A in B overgaat en π in zichzelf. Vgl. deze Verslagen XXV, p. 1426.

eveneens voor het binnen een willekeurig deelsegment van AB gelegen deel van π en hieruit volgt onmiddellijk, dat bij elke door de homogeniteit gepostuleerde afbeelding de richting invariant is te houden.

We formuleeren thans de volgende stelling: *Het lineaire continuum is niet te splitsen in twee overal dichte homogene puntverzamelingen met hetzelfde geometrische type.*

We geven een indirect bewijs. Stel twee puntverzamelingen π en π' van de bedoelde soort vullen het open lijnsegment AB. Nu hebben π en π' hetzelfde geometrische type, d.w.z. zij zijn eeneenduidig en gelijkmatig continu op elkaar af te beelden. Onderstellen we eerst, dat bij deze afbeelding de richting omkeert. De verzameling π is nu te splitsen in twee deelverzamelingen π_1 en π_2, zoodanig dat elk punt van π_1 links ligt van het correspondeerende punt van π' en elk punt van π_2 rechts van zijn beeldpunt. Bovendien ligt elk punt van π_1 links van elk punt van π_2. Daar de somverzameling π geometrisch overal dicht ligt, volgt uit het continuiteitsaxioma dat π_1 en π_2 een scheidingspunt R bepalen. Dit punt R kan echter niet tot π_1 of π_2 behooren. Stel namelijk het behoorde tot π_1, dan lag het links van zijn beeldpunt en uit de continuiteit der afbeelding zou verder volgen, dat dit ook het geval was voor alle punten van π binnen een zekere eindige omgeving van R, wat tegen het voorgaande strijdt. Het punt R behoort dus tot de complementaire verzameling π'. We komen dan echter weer tot een contradictie, want het feit dat R òf links òf rechts van zijn beeldpunt moet liggen, is niet te rijmen met de omstandigheid, dat allè links van R gelegen punten van π' ook links van de correspondeerende punten liggen, en de rechts van R gelegene ook rechts van hun beeldpunten.

We komen nu tot de tweede mogelijkheid, dat namelijk bij de afbeelding van π op π' de richting invariant blijft. We onderscheiden hierbij twee gevallen:

1. Er komen in π zoowel punten voor, die links, als die rechts van hun beeldpunten liggen.

2. Alle punten van π liggen aan dezelfde zijde van hun beeldpunten.

Eerste geval. Laat het punt P_1 van π links van zijn beeldpunt P'_1 liggen en P_2 van π rechts van zijn beeldpunt P'_2. De deelverzameling van π gelegen tusschen P_1 en P_2, inclusief de eindpunten, stellen we voor door π_1. Zij ${}_1\pi_1$ de deelverzameling van π_1 bestaande uit de punten, die evenals alle meer naar links gelegen punten van π_1

aan hun beeldpunten voorafgaan[1]). Zij R het meest naar rechts gelegen grenspunt van ${}_1\pi_1$. We komen dan zoowel door aan te nemen, dat R aan zijn beeldpunt voorafgaat, als door aan te nemen, dat R op zijn beeldpunt volgt (n.l. bij de tot het geheele lijnsegment A B *uitgebreide* afbeelding van π op π') direct tot een tegenstrijdigheid. R moet dus bij deze afbeelding aan zichzelf beantwoorden, maar dit is onmogelijk, zoowel als R tot π, als wanneer R tot π' behoort.

Tweede geval. Alle punten van π liggen links van hun beeldpunten. Laten met de punten P_1 en P_2 van π correspondeeren de punten P'_1 en P'_2 van π' en laat de volgorde van links naar rechts zijn P, P'_1, P_2, P'_2. Een dergelijk systeem van punten is steeds te vinden.

We kiezen een punt C van π', gelegen links van P_1 en we beelden π eeneenduidig en gelijkmatig continu op zichzelf af, waarbij we P'_1 in C laten komen en P'_2 onveranderd laten. Dat een dergelijke transformatie mogelijk is, volgt uit de homogeniteit. Noemen we de getransformeerde verzameling π'', dan bestaat tusschen π'' en π een eeneenduidige, gelijkmatig continue correspondentie, waarbij een punt van π'' aan zijn beeldpunt voorafgaat en een ander op zijn beeldpunt volgt. Verder is de redeneering van het eerste geval te gebruiken.

Aan professor L. E. J. Brouwer ben ik dank verschuldigd voor verschillende opmerkingen, welke in het voorgaande zijn verwerkt.

[1]) Met „voorafgaan" aan bedoelen we „links liggen van".

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer B. VON KERÉKJÁRTÓ te Ujpest (Hongarije): „*Ueber Transformationen ebener Bereiche*".

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

In der vorliegenden Note wird eine Anwendung [1]) gemacht vom folgenden BROUWERschen Fixpunktsatze:

Eine eineindeutige stetige Abbildung der abgeschlossenen Kreisscheibe auf einen Teilbereich derselben lässt wenigstens einen Punkt invariant.

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir das folgende

THEOREM. *Eine eineindeutige stetige Abbildung eines von endlichvielen Jordanschen Kurven begrenzten abgeschlossenen ebenen Bereiches auf einen Teilbereich desselben, bei welcher die Grenzkurven des ursprünglichen und des Bildbereiches paarweise äquivalent sind, jedoch eine und nur eine Grenzkurve in eine äquivalente übergeht, lässt wenigstens einen Punkt invariant.*

(Hierbei sollen zwei einander nicht kreuzende Kurven *äquivalent* genannt werden, wenn in ihrem Zwischengebiete keine Grenzkurve liegt).

C_1 sei die äussere Grenzkurve des gegebenen Bereiches, ihr Bild C_1' sei mit ihr äquivalent; die übrigen Grenzkurven seien C_2, $C_3, \ldots C_n$, ihre Bilder C_2', $C_3', \ldots C'_n$. Man erweitere die gegebene Abbildung durch eine an sie anschliessende Abbildung des Innern von C_α auf das Innere von C_α' $(\alpha = 2, 3, \ldots n)$. Hiermit erhält man eine eineindeutige stetige Abbildung des Innern von C_1 auf das Innere von C_1', welche nach dem obigen BROUWERschen Satze wenigstens einen Punkt invariant lässt; dieser Fixpunkt kann aber nicht im Innern von C_α $(\alpha \neq 1)$ liegen, gehört somit zum ursprünglichen abgeschlossenen Bereich.

[1]) Für eine analoge Anwendung nebst daraus gezogenen Konsequenzen vgl. Math. Annalen 80, S. 34.

Dierkunde. — De Heer J. F. VAN BEMMELEN biedt eene mededeeling aan over: „*De vleugelteekening der Chaerocampinen*".

In een Monographie, toegevoegd aan het Zeitschrift für wissenschaftliche Insektenbiologie van CHR. SCHRÖDER te Husum, waarvan de eerste aflevering mij onlangs gewerd, behandelt Dr. P. DENSO, de bewerker der Palaearctische Sphingiden in SEITZ' Macrolepidoptera, de tot nu toe bekend geworden vlinderhybriden, en begint die bewerking met beschouwingen over de vleugelteekening der Celerio-soorten. Hij zegt daarvan op blz. 1:

„Eingehende Untersuchungen und theoretische Betrachtungen, die näher ins Auge zu fassen hier zu weit führen würde, zeigen deutlich, dass die Zeichnungen (und Färbungen) aller Celerio-Falter sich leicht und zwanglos von einer Urform ableiten lassen, die von derjenigen, wie sie heute noch die älteste Celerio-Art *zygophylli* O. oder aber *lineata* (wenn man sich die weissen Adern wegdenkt) aufweisen, nur sehr wenig abweicht. Es sei hierbei bemerkt, dass die Urzeichnung der Celerio-arten der der nächstverwandten Pergesa-arten sehr nahe steht".

Het is zeker te betreuren, dat Dr. DENSO niet heeft kunnen besluiten om zijn „grondige onderzoekingen en theoretische beschouwingen" over de onderlinge phylogenetische verhouding tusschen de verschillende Celerio-soorten in bijzonderheden mee te deelen. Nu moeten wij de redenen, waarom hij juist *zygophylli* en *lineata* voor de (phylogenetisch) oudste soorten houdt, uit enkele in den tekst zijner verhandeling verstrooide opmerkingen trachten af te leiden.

Onder deze omstandigheden meen ik er de voorkeur aan te mogen geven, mijne eigene opvattingen onafhankelijk van DENSO's beschouwingen mee te deelen, en daarna te trachten over de gevolgtrekkingen van laatstgenoemde een oordeel uit te spreken.

Mijns inziens dan kan slechts door de vergelijking met andere Sphingiden, in 't bijzonder Chaerocampinen, een juist inzicht in het vleugelpatroon der Celerio-soorten verkregen worden, en blijkt daarbij duidelijk, dat dit patroon een sterk gewijzigde variant van de gemeenschappelijke grondteekening der Heterocera-vleugels is, waarbij de oorspronkelijke ook bij hen aanwezige zeven dwarsbanden op de bovenzijde van den voorvleugel grootendeels door de *V*-diagonaalteekening (zooals ik mijn vorige mededeeling over de vleugelteeke-

ning der Saturninen[1]) de schuin van voor-buiten naar achter-binnen loopende lijnenteekening noemde) is uitgewischt. Daaruit volgt, dat naar mijne overtuiging die Chaerocampinen de oorspronkelijkste teekening hebben behouden, bij welke de *V*-diagonaal-baan den geringsten invloed op de dwarsbanden heeft uitgeoefend. Dit nu is volstrekt niet het geval bij *Celerio zygophylli* en *lineata*, maar integendeel bij *Pergesa* (*Deilephila, Metopsilus*) *porcellus*, en eveneens nog veel duidelijker bij *Berutana* (*Metopsilus*) *syriaca*. Hier ziet men op den voorvleugel een dwarsbandenteekening, welke met die van *Smerinthus populi* een opmerkelijke overeenkomst vertoont, al zet zij zich ook niet noemenswaard op den achtervleugel voort. Van de *V*-diagonaalteekening is slechts aan de vleugelspits een aanduiding, en wel in den vorm van de voorste-buitenste-driehoekvlek, die zich als een donkerbruin naar achteren toe lichter en smaller wordend rechthoekig-driehoekig veldje van den voorrand af uitstrekt en door het reeds meermalen bij zoo talrijke vlindervormen opgemerkte schuine lichte lijntje wordt afgescheiden van den convexen marginaalvlek (Band I). Ook de achter-buiten-driehoekvlek is goed ontwikkeld, en door een afstand van drie tusschen-adervelden van de voor-dito gescheiden, in welke velden zich slechts flauwe sporen van donkere vlekken vertoonen.

Bd. II is volledig en scherp, Bd. III daarentegen uiterst flauw, IV is een breede donkere baan, die naar buiten toe geleidelijk uitvloeit over het gebied waar III had moeten liggen, als hij zichtbaar was, naar binnen toe daarentegen zeer scherp is afgegrensd. V is tamelijk duidelijk, maar bereikt den achterrand niet, VI is door een flauw golflijntje even gemarkeerd, VII niet kennelijk waarneembaar. Op de bovenzijde van den achtervleugel is slechts een breede donkere randzoom en een wortel-verdonkering te vinden.

Aan den onderkant vertoont zich het gebruikelijke patroon, n.l. een teekening, die op vóór- en achtervleugel gelijk is en in vergelijking met den bovenkant gereduceerd, bestaande uit een duidelijke marginaalvlekken-zoom, die naar binnen toe door een grillige kartellijn wordt begrensd, en verder uit de banen II en III (+ IV?), vertegenwoordigd door bruine lijnen op een lichteren grond.

Van het *syriaca*-patroon laat zich de teekening van *porcellus* vrij gemakkelijk en met groote mate van waarschijnlijkheid afleiden. Immers alle zeven dwarsbanden zijn in de streek van den voorrand des voorvleugels duidelijk te onderscheiden, terwijl I, II en III, dus de buitenste of distale, tot aan den achterrand doorloopen. Dat

[1]) Verslagen der K. Ak. v. Wet., Afd. Wis- en Natuurk., Deel XXVII, 1919, p. 1368.

echter deze oorspronkelijkheid niet mag opgevat worden in den zin, die gewoonlijk aan dat woord gehecht wordt, laat zich bij *porcellus* bijzonder treffend betoogen.

Niet slechts het patroon der zeven dwarsbanden toch, maar evengoed dat van de V-diagonaal, is op den voorvleugel aanwezig. Men kan dit ook uitdrukken door te zeggen, dat men het patroon van *porcellus* verkrijgen kan, door dat van *Smerinthus populi* te combineeren met dat van *Deilephila elpenor, gallii* en *euphorbiae,* natuurlijk onder weglating en reductie van enkele deelen van elk. Het best laat zich deze bewering bewijzen, door de bedoelde patronen op een afbeelding van *porcellus* in te teekenen, of wel door daaruit die elementen, die men op den *porcellus*-vleugel terugvindt, door een donkere nuance sterker te doen spreken.

Bd. I, m.a.w. de marginaal- of buitenrandszoom, heeft bij *porcellus* het voor de Chaerocampinae gewone type van een onregelmatige gehakkelde (paarsroode) strook, die aan de vleugelspits met het eveneens algemeen voorkomende, boven reeds vermelde schuine streepje begint, welk streepje tevens het distale aanvangslid der *V*-diagonaal vormt.

Bd. II begint met een tamelijk scherp en vrij donker blokje in het wijnrood van den voorrand, maar wordt veel flauwer zoodra hij het geelbruine middenveld betreedt, en doorloopt dat veld met een duidelijk binnenwaartsche buiging. Bd. III begint aan den voorrand met een dubbel blokvlekje, maar wordt enkelvoudig in het geel, terwijl hij tegelijkertijd in contact komt met de groote discoïdaalvlek, die zelf mag opgevat worden als een overblijfsel van Bd IV. Verderop loopt III dan evenwijdig met II, en is dus evenals deze eenigszins binnenwaarts verplaatst.

Bd. V en VI worden door een paar groenachtig-bruine streepjes in het rood gemarkeerd, VII door een onduidelijk bruinachtig wortelveldje.

Op de bovenzijde van den achtervleugel vormt slechts de wijnroode randzoom een duidelijk punt van overeenkomst met den voorvleugel, maar de onderzijde bewijst weer, dat ook bij *porcellus* kennelijke overblijfselen der dwarsbanden, in den vorm van donkere vlekken en strepen op den lichtgelen en rozerooden grond aanwezig zijn. Als gewoonlijk zijn deze langs den voorrand bijzonder sterk uitgedrukt.

Aan den onderkant is ook weer de overeenkomst tusschen vóór- en achtervleugel veel grooter dan aan de tegenovergestelde zijde, terwijl de teekening op den eerstgenoemden vleugel meer dan op den anderen is gereduceerd, bepaaldelijk wat het wortelveld aangaat.

Dezelfde paarsroode en groengondbruine tinten, die *porcellus* versieren, vindt men bij *elpenor* terug, waardoor een groote oppervlakkige overeenkomst tusschen deze beide soorten teweeg wordt gebracht, die in de populaire namen „Groot en Klein Avondrood" tot uitdrukking is gekomen. Maar in het patroon bestaat aanmerkelijk onderscheid, want bij *elpenor* ontbreken de sporen der dwarsbanden langs den voorrand zoo goed als geheel, terwijl daarentegen de *V*-diagonaal-teekening sterk is uitgesproken, al is het waar dat zij den achterrand des vleugels meer in zijn distaal gedeelte treft, en dus van de oorspronkelijke dwarsrichting der primaire banden minder sterk afwijkt dan bij andere Chaerocampinen het geval is.

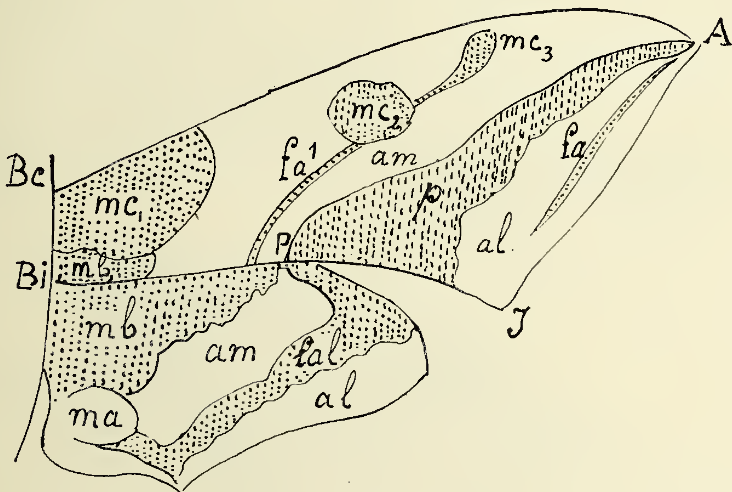


Fig. 1. (Naar Denso).

Denso schenkt bijzondere aandacht aan de wisselende verhouding tusschen de beide stukken, waarin bij de soorten van het geslacht *Celerio* de achterrand van den voorvleugel wordt verdeeld door de bovenbedoelde schuine lijn, die van de vleugelspits afkomend, het lichte middenveld buitenwaarts begrenst (AP). Hij rangschikt deze soorten in een reeks, beginnende met *lineata*, waar het ontmoetingspunt dezer lijn met den achterrand het verst proximaalwaarts ligt, en eindigend met *nicaea*, die in meer distale ligging van dat punt ongeveer overeenkomt met *elpenor*.

Zoover ik zijne opvattingen meen te begrijpen, houdt hij daarom *lineata* voor oorspronkelijker dan *nicaea*, terwijl naar mijn inzicht de verhouding tusschen die beide soorten juist omgekeerd is. Merkwaardigerwijze komt Denso bij het mededeelen eener andere bijzonderheid der vleugelteekening, die slechts bij enkele exemplaren van *nicaea*

voorkomt, tot een met mijne inzichten overeenstemmend besluit, daar hij het somtijds optreden eener donkere lijn over 't midden van den vleugel (welke lijn hij *fa'* noemt, en die volgens hem parallel aan zijn middenbaan *am* zou loopen) als een atavistisch verschijnsel beschouwt. Deze lijn nu kan moeilijk anders zijn dan Bd. III van *porcellus*, zoodat haar voorkomen m.i. terecht als een terugkeer van een element der oorspronkelijke teekening mag worden opgevat.

Trouwens deze mij onverklaarbare verwarring en tegenspraak in opvattingen meen ik op meerdere plaatsen in Denso's beschouwingen te bespeuren. Bij de beschrijving der *lineata*-teekening zegt hij:

„Meine Untersuchungen führten mich dazu anzunehmen, dass *lineata* und gewisse *zygophylli*-Falter eine der ursprünglichen Celeriozeichnung sehr nahestehende zeigen. In der Tat, wenn wir die Umrisse der *lineata*-Zeichnung anfertigen, so umschliessen diese vollkommen die Zeichnungselemente aller übrigen Celerio-arten, so dass diese letzteren aus der mehr oder weniger weitgehenden Reduktion der ursprünglichen Zeichnungsanlage entstanden zu sein scheinen.

Fig. 2 möge dies erläutern".

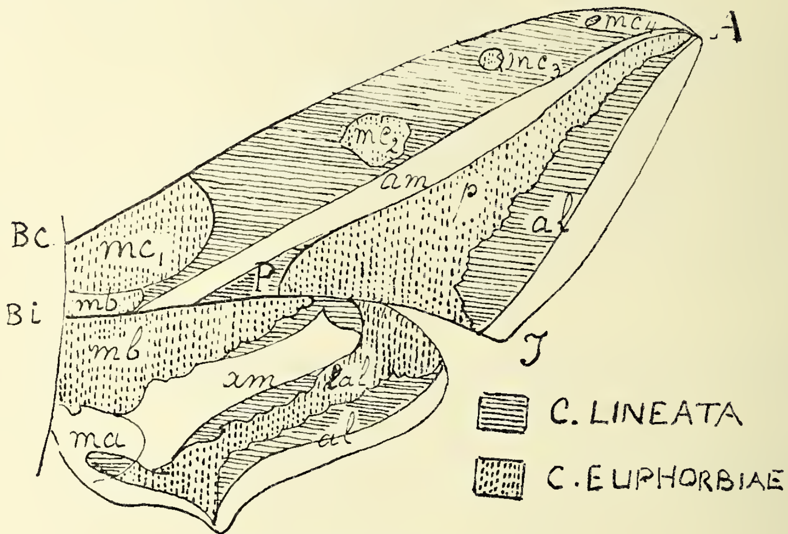


Fig. 2. (Copie naar Denso).

Die figuur nu laat ons zien, hoe bij *lineata* behalve de lichte *V*-diagonaal enkel nog een buitenrandsband (I) is te onderkennen, zoodat van de oorspronkelijke teekening zoo goed als niets is overgebleven, terwijl daarentegen bij *euphorbiae* langs den voorrand overblijfselen van minstens vier dwarsbanden, zij het ook slechts in den vorm van geïsoleerde vlekken, aanwezig zijn. Op Denso's wijze redeneerend, zou eenkleurigheid de oorspronkelijkste toestand van

den vleugel zijn, waaruit men alle patronen door oplossing van den grondtint in vlekken en banden kon afleiden.

En dit niettegenstaande hij eenige regels te voren heeft beweerd:

„Was die Flügelunterseiten betrifft, so finden wir auch bei ihnen, dass mit dem Fortschreiten der phylogenetischen Entwicklung immer mehr von ihren Zeichnungselementen *verloren* geht (ik cursiveer).

Lineata zeigt den grössten Reichtum an Einzelheiten, *gallii* weniger, *zygophylli* ebenfalls, und die wenigsten Zeichnungsmuster weisen *euphorbiae* und *nicaea* auf".

Het behoeft geen nader betoog, dat naar mijne opvatting deze laatste uitspraak ook geldig is voor de bovenzijde van vormen als *C. lineata* of *Deilephila elpenor*, in vergelijking respective met *C. euphorbiae* of *D. porcellus*.

Ook met de beschouwingen op blz. 5 over „das Auftreten atavistischer Charaktere" kan ik mij niet vereenigen.

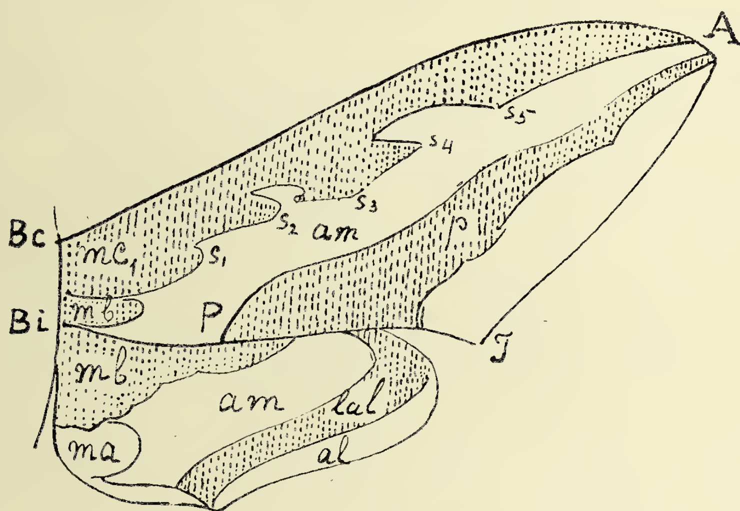


Fig. 3. (Naar Denso).

Denso schrijft: „Sehr häufig bemerken wir auch bei reinen Arten, z. B. *gallii* oder *euphorbiae* eine dunkle verschwommene Linie, die im Apex an der Schrägbinde *p* beginnend, parallel zum Distalrand durch das Saumfeld zieht. (Men vergelijke Fig. 1). In den meisten Fällen ist sie nur kurz und verschwindet etwa in der Mitte zwischen Apex und Hinterwinkel, in seltenen Fällen erreicht sie diesen Winkel und vereinigt sich mit der Binde *p*. Sie verläuft genau so wie die distale Begrenzung der Binde *p* bei *lineata*. Wir haben es hier zweifellos mit einem atavistischen Charakter zu tun, es ist eben die alte Begrenzung der *p*-Binde. Wir werden sie deshalb vergeblich in der *lineata*-Gruppe

suchen und sie nur selten und schwach bei *zygophylli* antreffen, bei der die Zurückrückung erst begonnen hat. *Gallii* zeigt diese Linie häufig, *euphorbiae* seltener und *nicaea* sehr selten, was verständlich ist, da diese beiden letzteren als relativ junge Arten schon seit längerer Zeit diese Begrenzungslinie von *p* verloren haben."

Bij vergelijking der vleugelteekeningen van *gallii*, *zygophylli* en *livornica* (zooals ze b.v.afgebeeld zijn bij Seitz, vergelijk vol. II Taf. 41.d.), komt het mij voor dat de tweede der genoemde soorten de *fa'*-lijn wel degelijk altijd bezit, maar iets binnenwaarts verschoven, en dat zij eveneens voorkomt bij *Pergesa oldenhamiae* en *japonica* en bij *Celerio boisduvali* en *minor*, maar dat de tint verschillen kan in donker- of lichtheid.

Overigens zie ik niet in, waarom juist deze lijn een *bijzondere* atavistische beteekenis zou hebben, ofschoon het van zelf spreekt, dat zij ontstaan is door versmelting van de buitenste vlekkenreeks (Bd. I), die vlak bij en evenwijdig aan den buitenrand der vleugels verloopt.

Evenmin kan ik inzien, dat er nog verschil in den graad van atavisme zou bestaan tusschen de onderscheidene dwarsloopende lijnen, die volgens Denso somtijds bij varieteiten optreden.

Denso schijnt wel van deze meening, want hij zegt:

„Während die Linie *fa* einen Charakter darstellt, der noch innerhalb des Genus *Celerio* begründet ist, geht eine andere atavistische Linie viel weiter zurück, und zwar auf Zeichnungselemente, die auch in dem Genus *Pergesa* auftreten. Es ist dies eine dunkle Linie fa_1, die, am Costalfleck mc_1 beginnend, längs der Costalzone *ac* parallel zum Proximalrand von *p* nach dem Hinterrand hinzieht. Sehr oft werden durch sie mc_8 und mc_1 mit einander verbunden. Sie tritt nur bei den Faltern auf, bei denen die Tendenz der Auflösung der Costalzone in einzelne Costalflecke besteht oder bei denen die Auflösung schon stattgefunden hat, also bei *zygophylli*, *vespertilio*, der *euphorbiae*-Gruppe und *nicaea*. Nie erscheint sie bei *hippophaes*, *gallii* und *lineata*."

Te oordeelen naar *vespertilio*, vergeleken met *askoldensis* en *mellus*, is de hier bedoelde lijn de door mij als Bd. III bestempelde, maar versmolten met IV, en ziet men bij *dahli* en bij *euphorbiae* nabij den achterrand de sporen dezer lijn, en wel niet slechts bij enkele, maar bij alle exemplaren.

In overeenstemming met het bovenstaande spreekt het vanzelf, dat ik in zake de vleugelteekeningen der *Euphorbiae*-groep een opvatting huldig, die met Denso's meeningen daaromtrent in volstrekte tegenspraak verkeert. Denso toch zegt (bl. 6): „Bei *C.*

euphorbiae L ist der Auflösungsprozess der ursprünglichen Celeriozeichnung schon sehr weit fortgeschritten". Naar mijn overtuiging is hier geen „Auflösungsprozess" in 't spel, maar zijn integendeel langs den voorrand de laatste sporen van dwarsbanden nog als geïsoleerde vlekken te bespeuren, terwijl het achterste, distale deel van den vleugel hoofdzakelijk door de *V*-diagonaal wordt beheerscht. Wel wil ik gaarne toegeven, dat de reductie der transversale vlekkenrijen tot drie of vier voorrandsvlekken (die DENSO Costalflecke noemt) en de afnemende grootte dezer vlekken naar den vleugelpunt toe, zonder twijfel in verband staan met het beloop der *V*-diagonaal, en dat zij met hun drieen of vieren beantwoorden aan de donkere voorrandsbaan van *C. lineata*. Maar ik vat laatstgenoemde baan op als een ineenvloeiïng van die vier vlekken, dus als een partieele egaliseering, die leidt tot éénkleurigheid van 't geheele voorrandsveld. Het bewijs voor die beschouwing zie ik in toestanden zooals bij *Celerio gallii* (Fig. 3), waar de vlekken wel met elkaar in verbinding zijn getreden, zoodat de geheele vleugelvoorrand gelijkmatig donker gekleurd is, maar hun grenzen nog te onderscheiden zijn door haakvormige insnijdingen die in den lichten diagonaalband overgaan. DENSO's tegenovergestelde opvatting van dezen toestand blijkt uit zijn uitspraak: „*Gallii* besitzt einen breiten Costalrand, in dem vom Mittelfeld *am* her die Grundfarbe vor allem an drei Stellen *eingedrungen* ist" (ik cursiveer).

Hetzelfde geldt voor de donkere driehoekige baan, die den lichten diagonaalband aan den buiten-achterkant begrenst, en die DENSO *p* noemt. Bij de behandeling van *C. euphorbiae* zegt hij daarvan: „Die Schrägbinde *p* ist dort, wo ihre Proximalbegrenzung den Hinterrand berührt (im Punkte *P*) weit nach dem Hinterwinkel zu *verschoben*." Omtrent *gallii* zegt hij wel is waar slechts: „Die Binde *p* ist breiter als wie bei *euphorbiae*. Ihr Endpunkt *P.* liegt mehr basalwärts", maar te voren heeft hij verklaard: „vom Distalrand" (der lichte middenbaan) „her nimmt die Saumfärbung von *af* auf Kosten von *p*. einen grösseren Raum ein, und ferner verbreitert sich *am* am Hinterrand, wodurch *p* in seiner proximalen Begrenzung steiler zum Hinterrand abfällt".

Ook in dit opzicht staan dus DENSO's meeningen diametraal tegenover de mijne.

Desniettegenstaande bestaat naar mijn inzicht, toch nog een mogelijkheid dat DENSO in zijne opvattingen het bij 't rechte eind heeft. Dit zou n.l. het geval zijn, wanneer men moest aannemen dat bij *gallii* en in nog sterker mate bij *euphorbiae*, de aanwezigheid der voorrandsvlekken berustte op terugkeer tot het oude patroon, dus

26

op atavisme. Men had zich dan voor te stellen, dat in het *lineata*-patroon de gelijkmatige donkere voorbaan van het diagonaalpatroon, die ontstaan was door samenvloeiïng der voorrandsstukken van de oorspronkelijke zeven dwarsrijen van vlekken, zich wederom in een aantal stukken oploste. Dat dit aantal lager is dan zeven, geeft steun aan de meening, dat wij hier met secundaire scheiding eener aanvankelijk samenhangende voorrandsbaan te doen hebben.

Als oorzaak dier oplossing mag echter m. i. de nog in den aanleg aanwezige neiging tot vorming der geïsoleerde voorrandsvlekken van het oude, aan alle Heterocera gemeenschappelijke dwarsbandpatroon worden beschouwd.

Beproeft men op dezelfde wijze als voor de boven besproken soorten, de zoo uiterst grillige teekening op de bovenzijde des voorvleugels van den Oleanderpijlstaart (*Deilephila* (*Daphnis*) *nerii*) te analyseeren, dan blijkt, dat men ongedwongen in de donkere en lichte plekken langs den voorrand de resten der zeven vlekkenbanen kan terugvinden, maar dat slechts één dezer, n.l. nummer V, onafgebroken tot den achterrand doorloopt, terwijl VI dit bijna doet, daar hij slechts door den witten buitenzoom van het donkere wortelveld doorsneden wordt.

De verstoringen in de overige dwarsbanen laten zich verder grootendeels terugbrengen op de twee ons reeds bekende invloeden, n.l. die van de *V*- en de *A*-diagonaal-teekening. De eerstgenoemde openbaart zich op overeenkomstige wijze als bij *euphorbiae*, *gallii* etc., maar van de lichte, schuine middenbaan der overige Deilephila's zijn bij *nerii* slechts fragmenten te bespeuren. In de eerste plaats het lichte apicaalstreepje, scherp afstekend tegen het bijzonder donkere voorste segment van baan I. Dan het witte gebogen streepje in 't midden van den achterrand, dat proximaal begrensd wordt door een bijzonder donker achterstuk van een dwarsband (waarschijnlijk een fragment van IV) en dat naar voren toe twee keer zigzagsgewijs een scherpen hoek maakt. Vermoedelijk geeft ons dit witte zigzaglijntje een stuk van de buitengrens van den driehoekigen en daarom naar achteren breeder wordenden lichten middenzoom te zien, die voor Chaerocampinae zoo kenmerkend is.

Van dezen lichten zoom is verder slechts het meest proximale gedeelte, nabij den vleugelwortel aan den achterrand aanwezig, en dit gedeelte gaat versmald en met een buitenwaarts convexe bocht in het gebied van VI over, waardoor het tot aan den voorrand komt door te loopen. Ook aan de buitenzijde van V zet zich de lichte kleur schuin distaalwaarts tot aan den vleugelvoorrand voort, en komt zoodoende in aanraking met het vooreind eener nog lichtere

bandpartij, die in de strook van III aan dien voorrand begint, maar zoo schuin buitenachterwaarts loopt, dat het gebied van III als 't ware naar dat van II wordt opgebogen.

Iets dergelijks ziet men ook bij een andere Sphingiden-soort, wier voorvleugelpatroon met dat van *nerïi* merkwaardig veel punten van overeenkomst vertoont, n.l. *Dillina tiliae*. Hier doet zich het bedoelde verschijnsel aan 't voorste stuk van den buitenrand der donkere mediaanbaan voor, die het voorvleugelvlak op zoo kenmerkende wijze in een binnen- en buitenveld breekt, en die zelf ter hoogte van de tweede cubitaalader volledig of bijna volledig in een grooter vóór- en een kleiner achterstuk is verdeeld, door een insnoering, die in plaats en karakter overeenkomt met het bovenvermelde witte zigzaglijntje van *nerïi*.

Van de gegrondheid der hier ontwikkelde opvatting der *nerïi*-voorvleugelteekening wordt men vooral overtuigd, wanneer men haar vergelijkt met verwante soorten, b.v. *hypothous* (Moore Lepidoptera Ceylon Pl. 83., Cramer Pap. Exot III. pl. 285 D., Seitz X 63a2), *layardi* (Moore Pl. 84, Seitz 63a[3]), *protrudens* (Novara Exp. Zool. II 2 Taf. LXXVI, 7, Seitz X 63.b.2), *angustans* (Nov. Exp. Zool. Bd. II 2), *placida* (Seitz X 63.a 4).

Het allermerkwaardigst schijnt mij in dit opzicht *omissa* en verwanten (*miskini*, *anceus*, *sericeus*, *cinerea*), waar de *nerïi*-teekening voor een deel als 't ware staat geprojecteerd op het patroon van *Smerinthus populi*, welke laatste er om zoo te zeggen doorheenschijnt.

Groningen, October 1919.

Natuurkunde. — De heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer P. EHRENFEST: *„Over de capillariteitstheorie van den kristalvorm".*

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

In eene mededeeling over de capillariteitstheorie van den kristalvorm [1]) heb ik onder anderen de interessante verhandeling van Prof. M. BRILLOUIN: „Tensions superficielles et formes cristallines. Domaine d'action moléculaire", [2]) aangehaald. De Heer BRILLOUIN heeft mij nu in een brief er terecht opmerkzaam op gemaakt, dat mijne citaten eene verkeerde opvatting omtrent de strekking en de resultaten van zijn onderzoek zouden veroorzaken.

Het zou namelijk kunnen schijnen, alsof de Heer BRILLOUIN de verklaring der kristalvormen volgens de theorie van CURIE (uit het principe van het minimum der totale oppervlakte-energie) voor juist zou aannemen. Ik haast mij om te verklaren, dat dit niet het geval is. Integendeel: de Heer BRILLOUIN ontwikkelt en beredeneert bij gelegenheid van de bovenaangehaalde onderzoekingen uitvoerig de bewering *dat de vaste lichamen in ongedeformeerden toestand een oppervlaktespanning nul bezitten, en dat bij hen oppervlaktespanningen eerst als gevolg van déformaties optreden.* (zie in 't bijzonder het einde van § 10). Dat zijn opvatting met die van CURIE en dus ook met de grondgedachten van mijne mededeeling principieel in strijd is, was mij ten tijde van de publicatie van mijne mededeeling nog niet zoo duidelijk als nu, dank zij den brief van den Heer BRILLOUIN. Ter nadere oriënteering van den lezer, die zich voor deze zaak interesseert, wil ik nog het volgende opmerken:

1. De Heer BRILLOUIN heeft, voor zoover mij bekend is, het eerst den mogelijken invloed van kanten en hoek-energieën op het gedrag van vaste lichamen nader besproken (zie § 11 tot 19 van zijne verhandeling, in 't bijzonder ook de veelbelovende bespreking van de vormen van diamantkrassen op glas en van instabiliteit van scherpe glaskanten) en het is in hoofdzaak daarvoor, dat ik die onderzoeking heb aangehaald.

2. De argumenten van den Heer BRILLOUIN tegen oppervlaktespanning bij afwezigheid van deformatie (zie § 10 van zijne verhandeling) zijn gelukkig niet van toepassing op mijn model, omdat dit laatste absoluut hard is, en daarom, niettegenstaande de aanwezigheid van oppervlaktespanning ongedeformeerd kan blijven en rechte kanten kan bezitten.

---

[1]) Akad. v. Wetensch. Versl. 29 Mei 1915 (XXIV, p. 158).

[2]) Ann. de chimie et de physique. VI (1895), p. 540.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer D. COSTER: „*Over ringen van bindingselectronen in* BRAGG's *kristalmodel van diamant*".

(Mede aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES).

Door de mooie onderzoekingen van de beide BRAGG's [1]) is de structuur van het diamant met groote zekerheid bekend geworden. Zooals men weet, kan men volgens deze onderzoekers den bouw van dit kristal door het volgende schema aangeven: 1° een stelsel van kubi, waar de C-atomen in de hoekpunten en de middens der zijvlakken liggen, 2° hierin een stelsel van identieke kubi, dat men uit het eerste verkrijgt door het parallel aan zichzelf in de richting van één der lichaamsdiagonalen van den grondkubus over een kwart van deze diagonaal te verschuiven. (Zie fig. 71, waarin alleen die atomen zijn aangegeven die liggen binnen een grondkubus). Indien men aanneemt, dat de waardigheid der atomen ook in het kristal een principieële rol speelt, is dit systeem van volmaakte symmetrie. Elk C-atoom vindt nl. in zijn omgeving 4 andere C-atomen op denzelfden afstand en volkomen symmetrisch gelegen. (De verbindingslijnen van een atoom met de 4 dichtstbijzijnde vormen de lichaamsdiagonalen van een kubus). Op deze wijze is aan de vierwaardigheid van het C-atoom voldaan. Het ligt nu voor de hand aan te nemen, dat de bindingen tusschen de atomen gevormd worden door electronenringen, zooals dit het geval is in het model van het waterstofmolecuul van BOHR. DEBIJE en SCHERRER [2]) doen bijv. een model aan de hand, waarbij elk koolstof-atoom 4 electronen zou afstaan, één voor elke binding, voor welke dus 2 electronen beschikbaar komen. Deze zouden wentelen om de verbindingsas van twee atoomkernen in een vlak loodrecht op deze as en halverwege den afstand tusschen de kernen. De kern zelf zou dus nog 2 electronen behouden en zich naar buiten gedragen als een viervoudige lading. Is men eenmaal bereid toe te geven, dat de bindingen door electronenringen gevormd worden, zoo is er uit een oogpunt van symmetrie a priori veel voor dit model te zeggen [3]). DEBIJE en SCHERRER [2]) komen evenwel tot de conclusie, dat een dusdanig model onvereenig-

[1]) Proc. Roy. Soc. Londen (1914) A 89, p. 277.
Zie ook: BRAGG. X-rays and crystalstructure.

[2]) Phys. Z. S. (1918) XIX, p. 476.

[3]) Er blijven natuurlijk nog vele moeilijkheden, bijv.: hoe is de draaiingsrichting der banen. Ook over vorm en grootte der banen laat zich weinig zeggen.

baar is met de experimenteele gegevens van de BRAGG's (en ook met de gegevens, die zij volgens hun methode van kristalfotografie verkregen hebben). M. i. echter zien zij in hun redeneering een belangrijk element over het hoofd en valt er op 't oogenblik op grond van gegevens omtrent verstrooiing van Röntgenstralen over het al of niet bestaan van dergelijke electronenringen nog niets te zeggen. Hetgeen ik in het volgende hoop aan te toonen. Hierbij zal ik aanvankelijk de aanschouwelijke methode door BRAGG aangegeven, volgen.

We beschouwen de octaëdervlakken (de vlakken (111) in de gebruikelijke notatie), waarin zich C-atomen bevinden. Dit is bijv. het vlak door de atomen A, B, C, F, G en H (zie fig. 1), een tweede kan men zich denken door D, een derde door E. Deze vlakken bevatten evenveel atomen, hun onderlinge afstand is afwisselend, $\frac{1}{4}\,d$ en $\frac{3}{4}\,d$ als aangegeven door fig. 2. Bij terugkaatsing alleen aan de vlakken a, krijgt men uitgaande van de bekende veronderstellingen een maximum intensiteit in den teruggekaatsten straal als $2d \sin \varphi = n\,\lambda$, hierin kan n de waarden hebben 1, 2, 3 enz. Werken ook de vlakken a' mee, dan verdwijnt het spectrum van de 2de orde ($n = 2$), omdat hiervoor a' een halve golflengte phaseverschil met a geeft. Om dezelfde reden zou bijv. ook het spectrum van de 6de orde verdwijnen, indien dit overigens nog waarneembaar zou zijn. De BRAGG's hebben met gebruikmaking van $Rh.$-K-stralen spectra tot en met de 5de orde waargenomen, van het spectrum van de 2de orde was geen spoor te bekennen. Dit gaf hun juist één van hun sterkste argumenten voor het door hen voorgeslagen kristalmodel. Bij het model van DEBIJE en SCHERRER staat de zaak anders. Zooals gebruikelijk gaan zij uit van de veronderstelling, dat de verstrooiing alleen door de electronen

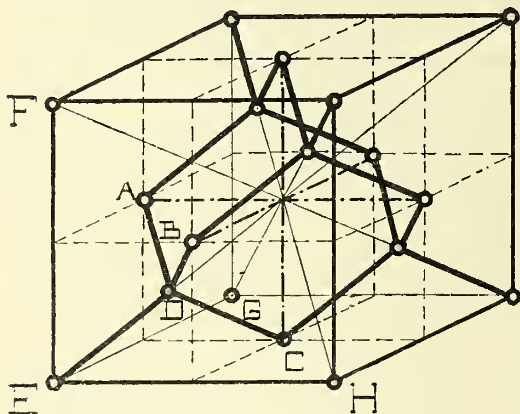
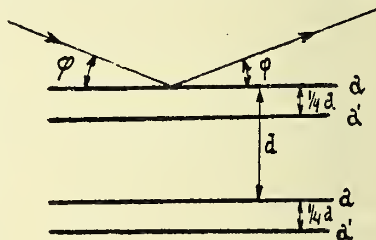


Fig. 1.



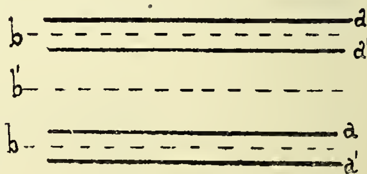


Fig. 2 en 3.

veroorzaakt wordt en dat men deze op de „klassieke" wijze kan berekenen. Zij nemen aan dat ze voor hun berekeningen de „bindingselectronen" mogen plaatsen in hun gemeenschappelijk zwaartepunt op de bindingsas. Schematisch voorgesteld liggen de octaëdervlakken hier als in fig. 3. In b en b' liggen nu de bindingselectronen en wel in b 3 maal zooveel als in b'. Voor het spectrum 2[de] orde leveren ook nu de kernelectronen (in a en a') niets op, de bindingselectronen zouden hier evenwel een intensief spectrum op moeten leveren, terwijl, zooals gezegd is, het experiment daarvan niet de geringste aanduiding geeft; weshalve Debije en Scherrer dit kristalmodel verwerpen.

Vat men evenwel een bepaald octaëdervlak in het oog (bijv. met *positieve* indices 111) dan vallen van de baanvlakken der bindingselectronen slechts $\frac{1}{4}$ gedeelte daarmee samen (het zijn die welke liggen in b' fig. 3). De andere maken met dit vlak hoeken van ongeveer 70° (hoek tusschen de lichaamsdiagonalen van een kubus). Het zal uit de volgende rekening blijken, dat men voor de laatste niet mag aannemen, zooals Debije en Scherrer feitelijk doen, dat de electronen steeds in het octaëdervlak blijven. Voor een eenvoudige rekening nemen we aan, dat de bindingselectronen zich gelijkmatig in cirkelbanen bewegen. Zij $b\,b$ (fig. 4) het beschouwde octaëdervlak, $c\,c$ het baanvlak, beide loodrecht op het vlak van teekening. Voor de phase van den volgens de gewone reflectieregels aan het vlak $b\,b$ teruggekaatsten straal is alleen van belang de loodrechte afstand h van het electron tot $b\,b$. Het is dus alsof de electronen loodrecht op $b\,b$ oscilleeren met amplitude l. Maken we de resultante op van de gereflecteerde stralen, dan moeten we die van elk electron vermenigvuldigen met den phasefactor $e^{-i\varkappa h}$ waarin $\varkappa = \dfrac{4\,\pi \sin \varphi}{\lambda}$

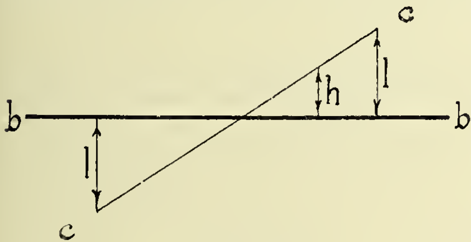


Fig. 4.

(φ is complement van den invalshoek). Nemen we de electronen op hun banen willekeurig verdeeld aan, dan is, zooals licht is in te zien, de waarschijnlijkheid, dat een electron zich bevindt op een afstand $h \rightarrow h + dh$

$$\frac{dh}{\pi \sqrt{l^2 - h^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De totale amplitude van den teruggekaatsten straal is dus te vermenigvuldigen met:

$$\int_{-l}^{+l} dh \frac{e^{-i\varkappa h}}{\pi \sqrt{l^2 - h^2}} = -\int_{-\pi}^{0} \frac{1}{\pi} e^{-il\varkappa \cos\omega} d\omega = J_0(l\varkappa) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hierin is J_0 de functie van Bessel van de orde nul.

Bedenken we, dat $\varkappa = \frac{4\pi \sin\varphi}{\lambda}$, dan is, voor het geval dat aan de relatie van Bragg

$$2d \sin\varphi = n\lambda$$

voldaan is,

$$\varkappa = \frac{2\pi n}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Zooals bekend is, is de functie J_0 reëel voor reëele waarden van het argument en oscilleert tusschen afnemende positieve en negatieve grenzen [1]) en gedraagt zich dus als „gedempte" sinusfunctie. Dit beteekent hier, dat de resulteerende straal in phase is of 180° in phase verschilt met den aan het vlak b teruggekaatsten straal. De absolute waarde van (2) is behalve voor het argument 0 steeds kleiner dan 1; de beweging der electronen houdt dus een verzwakking van het teruggekaatste Röntgenlicht in. Het experiment eischt, dat het spectrum van de 2de orde door terugkaatsing aan b en b' verdwijnt. Dit gebeurt strikt genomen als

$$3\, J_0(l\varkappa) + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

aangezien b 3 maal zooveel electronen bevat als b'.

De kleinste waarde van l, die aan (4) en (3) voor $n = 2$ voldoet is 0,258 d. Neemt men met Bragg $d = 2{,}03 \cdot 10^{-8}$ c.M. dan is $l = 0{,}524\ 10^{-8}$ cM., hetgeen voor den straal van den electronenring ongeveer $r = 0{,}56,\ 10^{-8}$ c.M. zou geven, welke waarde men *niet* als a priori onmogelijk kan uitsluiten [2]). Van belang is hierbij, dat (4) *onafhankelijk* is van de golflengte der gebruikte Röntgenstralen. Nu is het niet mijn bedoeling veel waarde te hechten aan de berekening van den straal van den electronenring. Ten eerste niet, omdat mijn veronderstelling (gelijkmatig doorloopen cirkelbaan) te schematisch is. Ten tweede is het niet waarschijnlijk, dat Debije en Scherrer een intensiteit zouden hebben kunnen constateeren, die beneden een 100ste van die van het spectrum 1e orde bleef. Dit geeft in het boven geschetste geval globaal genomen voor r o.a. alle waarden van 0,52 tot 0,62 10^{-8} c.M. en ook van 0,70 tot

[1]) Voor grafische voorstelling en tabellen van deze functie zie: Jahnke u. Emde, Funktiontafeln p. 110 e. v.

[2]) Als we alleen in rekening brengen de ladingen van de twee betreffende kernen (als viervoudige lading) en van alle storingen afzien, dan heeft volgens Bohr een éénquantige ring van 2 electronen een straal van ongeveer 0,75 10^{-8} c.M.

0,81 10^{-8} c.M. Grootere waarden van r zijn a priori onwaarschijnlijk.

De vraag rijst nu, of toch niet op de door DEBIJE en SCHERRER gedachte wijze, het experiment over het al of niet bestaan van ringen van bindingselectronen zou kunnen beslissen. De spectra van hoogere orde verkregen door terugkaatsing aan het octaëdervlak zijn m.i. daartoe niet geschikt. Zoo zou het spectrum van de 6de orde weer verschil geven tusschen het model mèt en dat zònder de bindingsringen. Ten eerste evenwel neemt in het algemeen de intensiteit sterk met de orde van het spectrum af[1]); ten tweede zou de hier volgens (2) verwachte intensiteit toch al gering zijn, daar $J_0(lx)$ voor de beschouwde waarde van r (ongeveer 0,55 10^{-8} cM.) weer negatief is voor $n = 6$ (vgl. 4).

Het is nu van belang de reflectie aan de andere kristalvlakken te beschouwen. We zullen daarbij de ook door DEBIJE en SCHERRER gebruikte methode volgen. Hebben we een regulair kristal, dan is de intensiteit van een volgens de relatie van BRAGG teruggekaatsten straal evenredig met het quadraat van de z.g. structuurfactor[2]) S, die gegeven is door:

$$S = n \, \Sigma \, A_n \, e^{i 2\pi (p_n h_1 + q_n h_2 + r_n h_3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hierin is A_n evenredig met de door het n^{de} stralingscentrum van den grondkubus uitgezonden amplitude, $p_n \, q_n \, r_n$ zijn de coördinaten van dit centrum in den grondkubus, waarvan de zijde 1 is, h_1, h_2, h_3 zijn de indices van het beschouwde kristalvlak. Deze laatste kunnen ook een gemeenschappelijken deeler hebben. Zijn zij bijv. 024, dan is bedoeld het spectrum van de 2de orde aan het vlak (012) in de gewone notatie.

Voor het kristalmodel van BRAGG is deze factor:

$$S_B = 6 \left(1 + e^{i \frac{\pi}{2} (h_1 + h_2 + h_3)}\right) \left\{1 + e^{i \pi (h_1 + h_2)} + e^{i \pi (h_2 + h_3)} + e^{i \pi (h_3 + h_1)}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

DEBIJE en SCHERRER nemen aan, dat de bindingsring op gelijke wijze verstrooit als de bij de kern gebleven electronen. Ook voor hun model zijn alle A_n's $= 1$ te stellen.

Zij krijgen dus:

$$\left. \begin{array}{l} S_D = 2\Big[\Big(1 + e^{i \frac{\pi}{2} (h_1 + h_2 + h_3)} + e^{i \frac{\pi}{2} (h_1 + h_2 + h_3)} \Big(1 + e^{i \frac{\pi}{2} (h_1 + h_2)} + \\ \qquad\qquad + e^{i \frac{\pi}{2} (h_2 + h_3)} + e^{i \frac{\pi}{2} (h_3 + h_1)}\Big)\Big] \\ \qquad \Big\{1 + e^{i \pi (h_1 + h_2)} + e^{i \pi (h_2 + h_3)} + c^{i \pi (h_3 + h_1)}\Big\} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

---

[1]) Zie bv. BRAGG. Proc. Roy. Soc. A. 89, p. 279, fig. 2.

[2]) Zie D. en SCH. Phys. Z. S. (1916), p. 279.

Voor de beteekenis van dezen factor zie: MARX Handb. d. Rad. Bd. V. p. 581 e.v.

Houdt men evenwel op de boven aangegeven wijze rekening met den stand van de banen van de ringelectronen, dan krijgt men voor structuurfactor:

$$S = 2\left[1 + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2+h_3)} + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2+h_3)}\left(J_0(l_1\varkappa) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + J_0(l_2\varkappa)e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2)} + J_0(l_3\varkappa)e^{i\frac{\pi}{2}(h_2+h_3)} + J_0(l_4\varkappa)e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_3)}\right)\right] \quad . \quad . \quad (8)$$
$$\left\{1 + e^{i\pi(h_1+h_2)} + e^{i\pi(h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_3+h_1)}\right\}$$

Hier hebben l en $\varkappa$ dezelfde beteekenis als in (2) en (3), de indices bij de verschillende grootheden l houden verband met de vier verschillende hoeken, die de electronenbanen in het algemeen met het beschouwde kristallografische vlak kunnen maken.

Bijgaande tabel geeft $\frac{|S^2|}{64}$ berekend [1]) voor de drie gevallen en wel voor het laatste geval éénmaal voor een waarde van $r = 0{,}56 . 10^{-8}$ c.m. en éénmaal $r = 0{,}81 . 10^{-8}$ c.m. (r is straal bindingsring). Van principieel gewicht zijn hierbij slechts de onderlinge verhouding van de in dezelfde

Indices.	Br.	D. en Sch.	$r = 0.56 . 10^{-8}$	$r = 0.81 . 10^{-8}$
(111)	18	11.6	2.9	5.8
(002)	0	0	0	0
(022)	36	4	0.61	7.8
(113)	18	0.34	1.64	3.55
(222)	0	16	0	0.038
(004)	36	4	11.1	9.0
(133)	18	2	2.1	2.42
(024)	0	0	0	0

kolom voorkomende getallen. Opgemerkt dient te worden, dat de spectra (002) en (024) verdwijnen onafhankelijk van de aangenomen waarde voor r. Slechts om ook het spectrum (222) te doen verdwijnen is men voor r aan zekere grenzen gebonden.

Met verschillende factoren [2]), die de intensiteit van de te verwachten spectra sterk beïnvloeden (het meest die van hoogere orde) is

[1]) De eerste twee kolommen zijn overgenomen uit het artikel van D. en SCH.

[2]) Bijv. z.g. LORENTZ- en DEBIJE-faktor, vgl. MARX Handbuch V, p. 581 e.v.

bij samenstelling van de tabel geen rekening gehouden. Aangezien alles nog zoo onzeker is en bovenstaande beschouwingen zeer schematisch zijn, is het m. i. onnoodig deze in de rekening te betrekken. Een blik op de tabel leert evenwel, dat met name de getallen van de vierde kolom niet in sterker tegenspraak zijn met de experimenteele gegevens [1]) dan die van de eerste. Waaruit wel volgt, dat het voorloopig niet mogelijk is uit experimenteele gegevens een conclusie te trekken omtrent het al of niet bestaan der bindingsringen. Misschien kan hier bestudeering van kristallen van chemisch homologe stoffen (*Si*, *Ge*) [2]) een beslissing brengen.

---

[1]) Zie hiervoor BRAGG l.c. en DEBIJE en SCHERRER l.c.

[2]) *Si* schijnt zich volkomen als diamant te gedragen, c.f. DEBIJE en SCH. Phys. Z. S. (1916) p. 282.

Bij *Ge* is het aantal „bindingselectronen" reeds klein t.o.v. de „kernelectronen".

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt, mede namens den heer F. HOGEWIND, eene mededeeling aan over: *„Verstuivingselectriciteit en Watervalelectriciteit".*

Het ontstaan van verstuivingselectriciteit en dat van watervalelectriciteit zijn ongetwijfeld verwante processen, doch zij zijn allerminst identiek.

Het heeft daarom zijn nut hun overeenkomsten en verschillen hier kort uiteen te zetten.

De verstuivingselectriciteit ontstaat, doordat lucht een uiteenspatten van waterdruppels tot stand brengt; de watervalelectriciteit doordat reeds bestaande waterdruppels op een grensvlak lucht-vloeistof of -vaste stof stooten. In verband hiermee is de verstuivingsnevel van het punt van zijn ontstaan af geladen, de waterval eerst op het oogenblik, dat hij den bodem bereikt. In beide gevallen vormen zich groote en kleine drupjes, tusschen welke zich een tegenstelling in lading openbaart. De lucht in de omgeving wordt zoowel bij de verstuiving, als bij den waterval naar alle zijden tot op grooten afstand doordrongen met die overal heenvliegende allerkleinste drupjes.

Bij de verstuiving blijven de groote druppels de eenmaal begonnen baan volgen, totdat zij op een hindernis stuiten. Deze hindernis ontmoeten de druppels eerst lang, nadat zij geladen zijn geworden. Bij den waterval echter, vormen zij zich pas, groote zoowel als kleine drupjes, op hetzelfde oogenblik, waarop de lading ontstaat, n.l. op het moment, dat de straal de hindernis treft.

In beide gevallen verhoogen de voorwaarden:

„druk"

„temperatuur"

het electrisch effect enorm. Twee atmospheren overdruk geven veel meer electriciteit dan één atmospheer. Men behoeft verder den nevel slechts te brengen in een ruimte, die 10° hooger in temperatuur is, om een groote versterking der verstuivingselectriciteit te verkrijgen. Evenzoo voert een verwarming van het reservoir, dat den waterval voortbrengt, tot aanzienlijke vergrooting van de watervalelectriciteit. De aanwezigheid van een electrisch veld doet beide sterk toenemen.

De afstand, waarop de schijf, die als hindernis dient, geplaatst is, oefent op beide invloed. De verstuivingselectriciteit kent een opti-

malen en een kritischen afstand. De watervalelectriciteit neemt, volgens LENARD,[1]) met den afstand der schijf toe.

Doch ook de grondvloeistof en de kleine chemische toevoegingen zijn van beteekenis. De meeste waarnemingen zijn met water als grondvloeistof gedaan, maar ook met paraffinum liquidum kan men verstuivingselectriciteit en met kwik watervalelectriciteit verkrijgen. Wij hebben voornamelijk den invloed van kleine toevoegingen van bekende chemische geaardheid nagegaan.

De verstuivingselectriciteit wordt sterk verhoogd door de bijmenging van stoffen, die de oppervlaktespanning verlagen en bovendien vluchtig zijn (reukstoffen, antipyretica, narcotica, alcaloiden) en kan daardoor bedragen bereiken, die de watervalelectriciteit verre en verre overtreffen.

Volmaakt zuiver water geeft geen, met een gewonen electroscoop waarneembare verstuivingselectriciteit. [2])

Sporen reukstof zijn voldoende om haar excessief te doen worden.

De verstuivingselectriciteit is daardoor een middel om de aanwezigheid van kleine hoeveelheden reukstof te ontdekken anders dan door den reukzin.

De watervalelectriciteit wordt reeds primair door zuiver water voortgebracht. De plaats, die den waterval stuit, laadt dezen positief op.

Kleine toevoegingen van reukstoffen, smaakstoffen, colloidale stoffen, wijzigen de lading van het water sterk. Deze wijziging heeft soms in positieven, soms in negatieven zin plaats.

Het was LENARD, die in 1892 het eerst het probleem onderzocht, en er al dadelijk eene theoretische verklaring voor gaf [3]), die hij in zijn latere publicaties eenigszins gewijzigd en uitgebreid heeft [4]).

Voor ons onderzoek maakten wij met geringe wijzigingen gebruik van het toestel, zooals het door LENARD [1]) reeds is aangegeven.

Aan een stevigen metalen cylinder van ± $2^1/_2$ Liter inhoud, waaraan het deksel door middel van 3 schroeven luchtdicht is bevestigd, is in den bodem een metalen buis met kraan aangebracht, die uitloopt in een glazen buis met fijne uitvoeropening (1 mm. diameter). In het deksel bevinden zich 2 openingen, waarvan de eene in verbinding staat met de aanvoerbuis van de luchtperspomp met gashouder van 2 cub. M., en de andere, afgesloten door een schroefdop, dient ter vulling van den cylinder.

In de aanvoerbuis van den gashouder is, ter isolatie, een barnsteenen buis, ter lengte van ± $2^1/_2$ cm. aangebracht, en bovendien

---

[1]) P. LENARD: „Ueber die Elektricität der Wasserfälle". Wied. Ann. 46 p. 584. 1892

[2]) Tenzij een electrisch veld voorhanden is.

[3]) P. LENARD: „Ueber die Elektricität der Wasserfälle". Wied. Ann. 46—1892.

[4]) Id. id. „Ueber Wasserfallelektricität". Ann. der Physik. Bd. 47—1915.

2 kranen: de een vlak bij den cylinder, de ander bij de hoofdbuis naar den gashouder.

De heele cylinder hangt in een drievoet en is daarvan geïsoleerd door middel van barnsteenen stiftjes.

De punt van de glazen uitvoerbuis bevindt zich op ± 1 M. boven een grooten glazen bak, het opvangreservoir, waarin, steunend op een paar blokken, een zinken plaat. Deze is geleidend verbonden met den metalen cylinder.

Het opvangreservoir is op zijn beurt weer van de omgeving geïsoleerd, doordat het staat op een paraffineplaat met 4 barnsteenen pootjes.

Het geheel is geleidend verbonden met een geaarden electroscoop. Op deze wijze zijn dus de cylinder, het opvangvat en de electroscoop onderling geleidend verbonden en tegelijkertijd alle drie van de omgeving geïsoleerd.

De druk in de luchtpomp en den gashouder, gecontroleerd door middel van een manometer, wordt op 2 atmospheren gebracht, de cylinder gevuld met 1 Liter der te onderzoeken vloeistof, en de beide kranen in de toevoerbuis geopend, waardoor de vloeistof in den cylinder onder 2 atmospheeren druk komt te staan. Wordt nu de onderste kraan geopend, dan stroomt de vloeistof onder krachtigen druk uit het glazen buisje en treft onder een hoek van 90° de daaronder gelegen zinken plaat. Hierbij ontstaat, al naar gelang van den aard der vloeistof, positieve of negatieve electriciteit en de electroscoop slaat uit.

De uitslag, dien de electroscoop na 1 minuut doorstroomen van de vloeistof vertoont, wordt als maat voor de watervalelectriciteit genomen.

Daar het heele toestel een tamelijk groote capaciteit bezit, begint de electroscoop pas uit te slaan, als deze capiciteit is opgeladen, wat bij de verschillende vloeistoffen verschillend lang duurt. Daarom wordt het aftikhorloge eerst in werking gesteld, als de electroscoop begint uit te slaan, en van dit oogenblik af een volle minuut doorstroomd.

Tijdens het onderzoek wordt de onderzoekkamer goed gelucht, daar de lucht in de kamer ook geladen wordt, en wel in tegengestelden zin, als de vloeistof. Deze luchtlading zou dus bij volgende proeven de vloeistofoplading kunnen tegenwerken.

Bovendien wordt het opvangvat bedekt met een kleinmazig ijzergaas, met een centrale opening, waardoor de straal heenvalt. Dit gaas dient, om de weggeslingerde vloeistofdrupjes en mogelijk ontstaand schuim tegen te houden, terwijl de uiterst fijne nevel ongehinderd zich in de omgevende lucht kan verspreiden.

Als standaardvloeistof werd zuiver leidingwater genomen, dat bij onze proeven een gemiddelden uitslag van 50 streepjes gaf. Het Utrechtsche leidingwater is zeer zuiver en bevat weinig zouten. Bovendien is de temperatuur vrij constant, wat, in aanmerking genomen den grooten invloed van de temperatuur op de watervalelectriciteit, van groot belang is.

Tusschen 2 proeven in werd steeds een controleproef met water ingeschoven, waardoor de goede functioneering van het toestel kon worden nagegaan.

Verder werd na iedere proef de cylinder met leidingwater onder druk doorgespoeld, daar kleine hoeveelheden in het vat achtergebleven ladende stoffen bij de volgende proeven onzuivere uitkomsten konden veroorzaken.

Wij vonden bij de watervalelectriciteit de reukstoffen niet alle in denzelfden zin werken. De meeste versterkten de positieve lading van het water, andere veranderden haar niet of nauwelijks, terwijl enkele haar zelfs verzwakten en een negatieve oplading bewerkten. En dit alles schijnbaar zonder dat van eenige regelmaat of lijn iets te bespeuren was.

Wel werd algemeen bij sterkere concentraties (die bij de bijna steeds zeer weinig oplosbare reukstoffen altijd gering blijven) grootere versterking of verzwakking geconstateerd. Bovendien vonden wij in de homologe reeksen een toenemenden uitslag, naar gelang wij van de lagere naar de hoogere termen overgingen.

Een regel aan te geven, volgens welken bepaalde reukstoffen zouden versterken of verzwakken, lijkt voorshands echter geheel onmogelijk.

Dat de watervalelectriciteit niet identiek is met de nevelelectriciteit kan b.v. blijken uit 't gedrag van indol, dat bij de eerste een zeer groote versterking van de waterlading geeft, bij de tweede daarentegen bijkans werkeloos is.

Omgekeerd geeft b.v. thymol zeer sterke nevellading en zoo goed als geen watervalelectriciteit.

Bovendien geeft *versch* gedistilleerd water hierbij een duidelijke versterking, terwijl het bij verstuiving volstrekt onwerkzaam is.

Wij laten hieronder eenige reukstoffen volgen met hunne ladingen in den teller van de breuk, terwijl in den noemer steeds de uitslag van leidingwater voorkomt, telkens onmiddellijk van te voren opgenomen. Het teeken van de lading is mede aangegeven.

Phenol $^{1}/_{1000}$ N. opl.: $+\ ^{100}/_{80}$
Cressol $^{1}/_{1000}$ N. opl.: $+\ ^{110}/_{80}$
Xylenol $^{1}/_{1000}$ N. opl.: $+\ ^{120}/_{80}$

Amylacetaat $^{1}/_{1000}$ N. opl.:	$+ {}^{180}/_{85}$
Thymol opl. (verzad).	$+ {}^{40}/_{85}$
Toluol (verd. opl.)	$+ {}^{100}/_{50}$
Kunstmuskus (verd.)	$+ {}^{65}/_{50}$
1 % Aethylalcohol	$+ {}^{100}/_{50}$
Indolopl. (verd.)	$+ {}^{100}/_{50}$
Eucalyptol (verzad.)	$+ {}^{120}/_{50}$
Safrol (verzad.)	$+ {}^{100}/_{50}$
Citral (verz.)	$+ {}^{90}/_{50}$

1 %	aethylacohol.	$+ {}^{100}/_{50}$
5 %	,,	$+ {}^{60}/_{50}$
10 %	,,	$+ {}^{20}/_{50}$
20 %	,,	$- {}^{20}/_{50}$

Kamferopl. (verzad.)	$- {}^{30}/_{50}$
Bornylacetaat (,,)	$+ {}^{40}/_{50}$
Capronzuur opl.	$+ {}^{10}/_{50}$
Azijnzuur $^{1}/_{8}$ % opl.	$+ {}^{50}/_{50}$
,, 1 % ,,	$- {}^{10}/_{50}$

Blijkbaar versterken dus de meeste reukstoffen de positieve waterlading. Slechts kamfer en bornylacetaat, twee in reuk zeer verwante stoffen, verlagen haar, resp. doen de lading omkeeren.

Bovendien verminderen de reukstoffen, die tot de zuren behooren, de lading van het water, evenals alle andere zuren.

En eindelijk doen zeer sterke concentraties van reukstoffen, zooals wij die bij aethylalcohol kunnen bereiken, de lading verzwakken (geven zelfs negatieve lading) juist zooals bij de verstuivings-electriciteit het geval is.

Overgaande tot de *smaakstoffen*, vonden wij, dat aan den eenen kant de zoetstoffen alle min of meer versterkten, ofschoon eerst in sterkere concentraties dan de reukstoffen.

Aan den anderen kant verzwakken alle zouten en zuren de waterlading, terwijl de bitterstoffen, voor zoover ze tot de electrolyten behooren, eveneens verzwakten.

Die bitterstoffen echter, welke tot de colloidale stoffen gerekend moeten worden, versterkten de positieve waterlading weer, evenals alle andere onderzochte colloidale stoffen.

Zoetstoffen.

Saccharose	1 %:	$+ {}^{70}/_{35}$
Laevulose	1 %:	$+ {}^{100}/_{50}$
Glucose	$^{1}/_{4}$ %:	$+ {}^{85}/_{50}$
,,	1 %:	$+ {}^{100}/_{50}$
Sach. lactis	1 %:	$+ {}^{120}/_{50}$
Glycocoll	$^{1}/_{4}$ %:	$+ {}^{120}/_{50}$
Glycerine	1 %:	$+ {}^{100}/_{50}$

Bitterstoffen.

Chinin. pur (verz. opl.).		$- {}^{30}/_{50}$
Bisulf. chin.	1 %	$- {}^{30}/_{65}$
Chloret. magnes.	1 %	$- {}^{15}/_{30}$
Sulfas natricus	1 %	$- {}^{15}/_{50}$
Chloret. plumb.	$^{1}/_{2}$ %	$- {}^{5}/_{50}$

Colloidale bitterstoffen.

Fel Tauri	$^{1}/_{1000}$:	$+ {}^{100}/_{50}$
Extr. guassiae sice	$^{1}/_{800}$:	$+ {}^{100}/_{75}$
Glycocholz. natr.	$^{1}/_{1000}$:	$+ {}^{80}/_{50}$.

Zouten.

Sulfas natric.	1 %:	— $^{15}/_{50}$
Sulf. kalic.	1 %:	— $^{25}/_{50}$
Sulf. ammon.	1 %:	— $^{30}/_{60}$
Chloret magn.	1 %:	— $^{15}/_{50}$
,, natr.	1 %:	— $^{12}/_{50}$
,, kal.	1 %:	— $^{32}/_{60}$
,, ammon.	1 %:	— $^{11}/_{60}$
,, plumbic.	1 %:	— $^{00}/_{60}$
,, calcic.	1 %:	— $^{40}/_{60}$
Nitras kalic.	1 %:	— $^{60}/_{60}$

Zuren.

Ac. lactic	$^{1}/_{8}$ %:	+ $^{20}/_{50}$
,, acet.	$^{1}/_{8}$ %:	+ $^{50}/_{60}$
,, ,,	1 %:	— $^{10}/_{60}$
,, hydrochl.	$^{1}/_{8}$ %:	— $^{30}/_{50}$
,, citric.	1 %:	— $^{20}/_{60}$
,, amygdal.	$^{1}/_{2}$ %:	— $^{40}/_{05}$
,, tartaric.	$^{1}/_{2}$ %:	— $^{70}/_{100}$

Basen

Sol. NaOH	1 % =	— $^{30}/_{60}$
,, KOH	1 %:	— $^{40}/_{60}$
,, NH_4OH	$^{1}/_{4}$ %:	+ $^{25}/_{30}$

De lyotrope reeks is ook hier weer in te herkennen, evenals bij de verstuivingselectriciteit, tenminste voor de anionenreeks:

Sulfas	Kalic.	$^{1}/_{2}$ N.:	—30
Phosph.	,,	$^{1}/_{2}$ N.:	—30
Citras	,,	$^{1}/_{2}$ N.:	—25
Chloret.	,,	$^{1}/_{2}$ N.:	—22
Nitras	,,	$^{1}/_{2}$ N.:	—15
Acetas	,,	$^{1}/_{2}$ N.:	—13
Rhodan.	,,	$^{1}/_{2}$ N.:	—12
Jodet.	,,	$^{1}/_{2}$ N.:	—10

Hierbij neemt alleen het acetaat een te lage plaats in, vergeleken bij de lyotrope reeks bij de verstuivingselectriciteit. Van de andere stoffen die werkzaam bleken bij verstuiving, onderzochten wij eenige glycosiden en saponinen, antipyretica en alcaloiden, die alle, mits niet als zout onderzocht, de waterlading bleken te versterken:

Glycosiden en Saponinen.

Aesculine	$^{1}/_{800}$:	+ $^{75}/_{60}$
Saponine	$^{1}/_{000}$:	+ $^{70}/_{60}$
Digitaline	opl.:	+ $^{65}/_{60}$

Alcaloiden.

Coffeine (verd.)	+ $^{100}/_{60}$
Theophyline (verd.)	+ $^{60}/_{50}$
Hydrochl. morphini	+ $^{50}/_{20}$

Antipyretica.

Pyramidon	+ $^{90}/_{60}$
Antipyrine	+ $/_{5}$ 0

Ten slotte bleken alle onderzochte colloidale stoffen de waterlading te versterken, zelfs een eiwitoplossing, die steeds zouten bevat, mits de oplossing voldoende gedialyseerd is.

Colloidale stoffen.

Gelatine $^1/_0$ % opl.:	+ $^{70}/_{50}$	Extr. quassiae $^1/_{800}$:	+ $^{100}/_{75}$
Tragacanth (zéér verdund):	+ $^{65}/_{50}$	Glycocholz. natr. $^1/_{1000}$	+ $^{80}/_{50}$
Tragacanth verd. opl.:	+ $^{70}/_{50}$	Albumen ov. sicc. $^1/_4$ %	+ $^{20}/_{30}$
Amyl. oryzae $^1/_8$ %:	+ $^{75}/_{50}$	,, ,, gedialyseerd	+ $^{25}/_{30}$
Dextrin $^1/_5$ %:	+ $^{75}/_{50}$		
Gummi arabic $^1/_{600}$:	+ $^{40}/_{25}$		
Fel Tauri $^1/_{1000}$:	+ $^{100}/_{40}$		

Het spreekt vanzelf dat bij sterkere concentraties door verhooging van de viscositeit de uitslag verminderen moet.

De invloed van de temperatuur op de watervalelectriciteit is, gelijk gezegd, groot.

Leidingwater van 8° : 40
,, ,, 35° : 100.

Temperatuursverhooging versterkt dus de positieve waterlading aanmerkelijk.

De invloed der toevoeging van zoutoplossing is eveneens onmiskenbaar. Het positief sterk opladende alcohol, dat zonder zout in water de positieve lading zeer verhoogt, verliest bij gelijktijdige aanwezigheid van keukenzout dit vermogen aanvankelijk voor een deel en moet het bij geconcentreerde zoutoplossing zelfs geheel afstaan. De negatieve oplading door het zout krijgt dan de overhand. Het zout aan het negatief opladende kamfer toegevoegd verhoogt deze negatieve lading. Kamfer en zout werken samen. Er heeft dus in het geval van de watervalelectriciteit naar het schijnt eenvoudige additie plaats van watereffect, zouteffect en het effect van het vluchtige toevoegsel [1]).

Om deze verschijnselen te verklaren, zou men zoowel de verstuivings- als de watervalelectriciteit kunnen opvatten als een vorm van wrijvingselectriciteit. In beide gevallen zou dan de wrijving, tusschen vloeistof en lucht tijdens het uitstroomen bij de verstuiving, tusschen vloeistof en zinken plaat bij den waterval, het loslaten van electronen veroorzaken, die in de omgevende lucht worden verspreid.

---

[1]) In het geval van de verstuivingselectriteit is de toedracht van zaken veel ingewikkelder, Zie E. L. Backman. Onderz. Physiol. Lab. Utrecht (5) XIX p. 210.

Echter zou dan de vloeistof noodzakelijkerwijze steeds positief opgeladen moeten worden, wat blijkens de proeven in een groot aantal gevallen niet uitkomt. Men moet dus een dieper werkend proces aannemen, waarbij grootere vormsels ontstaan als dragers van de electrische lading. Deze vormsels zouden kunnen ontstaan uit de z.g. ionen, en wel positief en negatief geladen ionen in gelijk aantal [1]), waaromheen de waterdamp zich tot druppeltjes kan condenseeren, en waarmee de zoutdrupjes zich later vereenigen kunnen.

LENARD [2]) veronderstelt, dat *in* de oppervlakkige lagen van iedere di-electrische vloeistof niet alleen een, door de moleculaire krachten der vloeistof zelf veroorzaakte, electrische dubbellaag aanwezig is, met de negatieve laag aan de buitenzijde, maar dat deze lagen ook materieel verschillend zijn. Deze materieele verschillen, die varieeren door in de vloeistof opgeloste stoffen (electrolyten, vluchtige stoffen, complexe moleculen) beinvloeden de dikte en de sterkte van de electrische dubbellaag.

Hij voert dus de waterval- èn de verstuivingselectriciteit terug tot den specifieken toestand, waarin de oppervlakte van iedere di-electrische vloeistof zich bevindt.

De eigenlijke oorzaak van de oplading zou dan zijn, niet een afgeven van electronen, maar een wegslingeren van uiterst fijne vloeistofdruppeltjes, de z.g. „dragers", die, al naar gelang van den oppervlakte-toestand der vloeistof, òf zéér klein, en dan negatief geladen zijn, doordat zij geheel ontstaan uit de uiterste, negatief geladen laag der vloeistof, òf iets grooter, en dan positief geladen kunnen zijn, doordat zij voor het grootste deel ontstaan uit de meer binnenwaarts gelegen positieve vloeistoflaag.

Voor bijzonderheden verwijzend naar het artikel van LENARD zelf, volstaan wij met te constateeren dat het meerendeel van de door ons verkregen uitkomsten bij de *watervalelectriciteit* door deze theorie voldoende verklaard worden.

Niet verklaard worden hiermee de versterkende invloed van temperatuursverhooging (LENARD zelf meende, op grond van theoretische overwegingen, dat een verzwakking zou moeten optreden).

Evenmin waarom kamfer en bornylacetaat de waterlading verzwakken. En eindelijk blijft de versterkende werking van de zoetstoffen en de colloidale stoffen ook door deze theorie onverklaard.

De uitkomsten bij de proeven, die reeds vroeger over de verstuivingselectriciteit in het Utrechtsche Physiologisch Laboratorium zijn

[1]) H. ZWAARDEMAKER. Le Phénomène de la charge des brouillards de substances odorantes. Arch. Neerl. de Phys. de l'homme et des animaux Tome I 1917 p. 347.

[2]) P. LENARD. Ueber Wasserfallelektricität. Ann. der Physik. Bd. 47—1915.

genomen [1]), laten zich veel minder goed verklaren met behulp van deze theorie.

In de eerste plaats geven zuiver leidingwater (Utrechtsch) en *versch* gedistilleerd water (oud gedistilleerd water is wèl werkzaam) bij verstuiving geen of zoo goed als geen lading.

Vervolgens is over het algemeen de versterking, die de lading ondergaat door toevoeging eener werkzame stof, zéér veel grooter bij verstuiving dan bij den waterval.

In de derde plaats geven zoutoplossingen, overeenkomstig LENARD's theorie, een duidelijke negatieve watervalelectriciteit; daarentegen gaven zij geen lading bij verstuiving [2]).

Eindelijk zijn, volgens LENARD's theorie, de grootere positieve dragers van een keukenzoutsolutie bij de watervalproef natriumhoudend, de kleinere negatieve dragers daarentegen bestaan uit zuivere watermoleculen, wat hij aantoonde, door de dragers tusschen de platen van een condensator te brengen. Hierbij gingen de grootere positieve Na-houdende dragers naar de negatief geladen condensatorplaat, alwaar hij het Natrium kon aantoonen. De kleinere, negatief geladen dragers gingen naar de positieve plaat, waarop hij geen Natrium kon aantoonen.

---

[1]) H. ZWAARDEMAKER. Het in overmaat geladen zijn van reukstofhoudende nevels. Verslagen K. A. v. Wetensch. Deel XIX N⁰. 1.

H. ZWAARDEMAKER. Specifieke reukkracht en odoroscopisch ladingsverschijnsel in homologe reeksen. Id. Deel XIX N⁰. 2.

H. ZWAARDEMAKER. Reukstofmengsels en hun laadvermogen door nevelelectriciteit Id. Deel XXV 30 Sept. 1916.

H. ZWAARDEMAKER. Le phenomène de la charge des brouillards des substances odorantes. Arch. Neerl. Physiol. T. 1, p. 347.

H. ZWAARDEMAKER. Le sens de l'adsorption des Subst. Volatiles Acta Oto-laryagologica.

H. ZWAARDEMAKER en H. ZEEHUISEN. Over het teeken v. h. ladingverschijnsel en de bij dit verschijnsel waargenomen invloed op de lyotrope reeksen. Verslagen K. A. v. Wetensch. deel XXVII 1918.

E. L. BACKMAN. De olfactologie der methylbenzolreeks. Id. Deel XXV 27 Jan. '17.

E. L. BACKMAN. Ueber die Verstäubungselektricität der Riechstoffe. Arch. f. d. ges. Phys. Bd. 168 S. 351.

C. HUYER. De olfactologie v. aniline en homologen. Diss. „Onderz." (5) Deel XVIII, p. 1, 89.

[2]) Het is ons later gelukt, ook bij verstuiving van een 1 % keukenzoutsolutie een geringe negatieve lading aan te toonen, door vermindering van de capaciteit van de opvangschijf. Doch deze lading is bij lange na niet zoo groot, als die bij den waterval ontwikkeld wordt en valt in het niet tegenover de verstuivingselectriciteit, welke ontstaat bij toevoegingen van vluchtige en oppervlak-actieve stoffen.

Herhaalt men deze proef bij *verstoven* zoutsolutie [1]), dan blijken zoowel de groote positieve als de kleine negatieve dragers Natriumhoudend te zijn.

Watervalelectriciteit en verstuivingselectriciteit mogen derhalve al onderling verwante processen zijn, volkomen identiek zijn ze klaarblijkelijk niet.

---

1) A. Stefanini en G. Gradenigo. Inhalazione di Nebbië Salina Secche. Lucca 1914, p. 22.

Geologie. — De Heer RUTTEN, correspondent der Afdeeling, biedt eene mededeeling aan: „*Foraminiferenhoudende gesteenten uit het stroomgebied der Lorentzrivier* (*Zuidwest Nieuw-Guinea*)".

De Nederlandsche Zuid Nieuw-Guinea-expedities van 1907 en 1909 brachten eene vrij groote gesteenteverzameling uit het stroomgebied der Lorentzrivier (Noordrivier) mede. Vele gesteentemonsters bevatten Foraminiferen van tertiairen ouderdom. Zij zullen in het onderstaande kort beschreven worden.

Na de laatste samenvatting der Foraminiferen-literatuur van Nieuw-Guinea [1]) is er slechts eene enkele publicatie van R. BULLEN NEWTON [2]) verschenen, waarin enkele Lepidocyclinenhoudende kalksteenen beschreven worden, die aan de sneeuwgrens op den Carstensz Top gevonden werden. Wat de literatuur betreft, kan dus naar de vroegere samenvatting verwezen worden.

De gesteenten der bovengenoemde expedities zijn afkomstig uit eene zone, waaruit K. MARTIN [3]) reeds in 1911 talrijke fossielen beschreef; het stroomgebied der Lorentzrivier neemt echter in deze zone, die zich van den 137sten tot den 141sten lengtegraad uitstrekt, slechts eene bescheiden plaats in. Men mocht dus a priori verwachten, dat de collectie — voorzooverre ze uit rolsteenen bestond — weinig nieuws zoude opleveren. Van meer belang waren natuurlijk de stukken, die van de vaste rots afgeslagen waren; zij zijn echter weinig talrijk.

Uit een geologisch oogpunt beschouwd bestond er dus geen aanleiding, om de collectie intensief te bespreken. Ook palaeontologische overwegingen maakten eene slechts korte beschrijving van het materiaal wenschelijk. Verreweg de meeste stukken zijn kalksteenen met Lepidocyclinen of Nummulieten als talrijkste fossielen. De fossielen kunnen niet uit het gesteente losgeprepareerd worden en moeten dus aan dunne slijpplaatjes onderzocht worden. Nu is wel is waar de systematiek der indische Lepidocyclinen eenigermate opgehelderd, maar de verschillende soorten zijn zelfs dan moeilijk

---

1) L. RUTTEN. In Nova Guinea, VI. 2. 1914, p. 22—25.

2) R. BULLEN NEWTON. Organic Limestones etc. from Dutch New Guinea. Reports on the collections made by the British Ornithological Union Expedition and the Wollaston Expedition in Dutch New Guinea, 1910—1913, Vol. II. Report 20, 1916. Voor Engelsch Nieuw-Guinea, zie nog R. BULLEN NEWTON, Geol. Mag. (6). V. 1918, p 203—212.

3) K. MARTIN. Samml. Geol. Reichsmus. Leiden (1). IX. 1911, p. 84 e.v.

van elkaar te onderscheiden, als men geïsoleerde individuen voor zich heeft. Gedetailleerde bestudeering van dunne slijpplaatjes geeft daarom meestal zeer weinig resultaat. Met de Nummulieten is het nog erger: men kent de specifieke verschillen der Indische soorten zeer slecht, zoodat zelfs de determinatie van geïsoleerde individuen vaak moeilijk is.

Zoowel geologische als palaeontologische overwegingen maken dus eene slechts korte beschrijving van het materiaal wenschelijk.

1). *De Lepidocyclinenkalksteenen.* Rolsteenen met Lepidocyclinen werden in de Lorentzrivier bij Sabang en Geitenkamp, in de Bibisrivier (Van der Sande-rivier), en aan de uitmonding der Koekoeksrivier in de Reigerrivier gevonden[1]). Vaste rots van Lepidocyclinenkalksteen werd in het Resigebergte, het Wentgebergte, aan den Permadiberg en bij het Peramelesbivak aangetroffen. De kalksteenen behooren tot verschillende types.

Het talrijkst zijn zuivere, grijze tot bruingrijze kalksteenen, die steeds door het voorkomen van groote Lepidocyclinen gekenmerkt worden. Daarnaast komen meestal Heterosteginen en vaak zeer kleine Nummulieten voor (Rolsteenen: Sabang no. 85. 1907, 111a. 1907, Geitenkamp no. 195. 1907, Bibisrivier no. 544. 1909, Koekoeksrivier no. 385, 1907; Vaste Rots: Wentgebergte no. 631, 1909 en Perameles Bivak nos. 629 en 930. 1909). De diameter der Lepidocyclinen bedraagt meest meer dan 15 m.m., in één stuk (544. 1909) zelfs meer dan 40 m.m. Ze zijn macrosfeer, en de eerste kamer wordt door de tweede geheel omvat. De fossielen zijn zwak lensvormig en bezitten geen duidelijken medianen tuberkel. Zuiltjes van tusschenskelet zijn soms afwezig; meestal echter komen zij voor en zijn dan regelloos over de geheele schaal verdeeld. Ze zijn duidelijk conisch; meest is hun diameter kleiner dan die der laterale kamers, soms echter worden ze grooter en omvatten dan in de tangentiale doorsnede de laterale kamers. Deze Lepidocyclinen behooren tot de groep der Lepidocyclina insulaenatalis J. a. Ch.

De Heterosteginen kunnen van de recente H. depressa d'Orb. nauwelijks onderscheiden worden; in één handstuk (544. 1909) is echter het nummuliforme deel sterk ontwikkeld, zoodat de fossielen gelijken op H. margaritata SCHLUMBERGER[2]).

De Nummulieten behooren tot de kleine tusschenvormen tusschen Nummulites en Operculina, van welke VERBEEK o.a. N. Niasi II en N. Doengbroeboesi beschreven heeft. Hun diameter bedraagt slechts

[1]) Zie voor topographische details de kaart in Bulletin N°. 64 der „Maatschappij ter bevordering van het Natuurkundig Onderzoek der Nederlandsche Koloniën", 1910.

[2]) C. SCHLUMBERGER. Samml. Geol. Reichsmus. Leiden (1). VI. 1902, p. 250—252.

2 mm.; het getal der omgangen is 3-4. Ze gelijken op Nummulites door de niet snelle hoogtetoename der omgangen, op Operculina door de geringe omvatting der omgangen en door de wandstructuur. Zij zijn zonder eenige stratigraphische waarde.

Naast de genoemde fossielen komen nog voor: kleine Lepidocyclinen (629. 1909), Cycloclypeus (85. 1907), ? Polystomella (85. 1907), Gypsina (630 en 631. 1909), Rotalidae (544. 1909) en ? Orbitolites (85. 1907). Merkwaardig is het voorkomen van Alveolinen met slechts 1 laag van kamers per omgang (85. 1907). Ook in West Nieuw-Guinea, bij Karas, werden in een Lepidocyclinenkalksteen sporen van dergelijke primitieve Alveolinen aangetroffen [1]).

Uit het talrijke voorkomen van groote Lepidocyclinen en van primitieve Alveolinen blijkt, dat de beschreven gesteenten tot het oudste Mioceen of tot het Oligoceen moeten behooren.

Een rolsteen van de helling van den Permadieberg (452 m.) (no. 353. 1907) verschilt van de boven beschreven gesteenten slechts daardoor, dat kleine Lepidocyclinen onder de fossielen de overhand hebben. Hierop gelijkt weer een grijze kalksteen uit het Went-Gebergte, die naast schaarsche groote Lepidocyclinen en talrijke Heterosteginen nog Gypsina, Alveolina s.str., Amphistegina, ?Calcarina, Rotalidae en Lithothamnium bevat (N°. 623, 1909).

Sterk verschillend van de tot nu toe beschreven gesteenten is een rolsteen van Sabang (N°. 84. 1907), die vol Koralen en Lithothamniën zit, maar slechts sporen van Lepidocyclinen bevat.

Een rolsteen uit de Koekoeksrivier (N°. 382, 1907) bevat Cycloclypeus annulatus Martin, kleine Lepidocyclinen met zeer dikke wratten, Globigerinen en Koralen.

Vier gesteenten uit het Resigebergte (N°. 310, 311, 312, 361. 1907) en een rolsteen van Geitenkamp (N°. 170. 1907) sluiten de rij der Lepidocyclinengesteenten. Het zijn alle grijswitte, vrij kristallijne kalksteenen, die zeker bij elkaar behooren, al bevatten niet alle karakteristieke fossielen. Kleine Lepidocyclinen komen in 170 en 310. 1907 voor, slecht bewaarde Nummuliniden in 310, 311, 361 1907, andere slecht bewaarde Foraminiferen in 170, 310, 311. 1907, Lithothamnium in 170 en 311. 1907, en slecht bewaarde Koralen in 170 310, 361. 1907.

We zagen dus, dat in het stroomgebied der Bibis- Lorentz- en Reigerrivier neogene, Lepidocyclinenhoudende gesteenten moeten voorkomen. Uit de beide eerste stroomgebieden is ook het vaste gesteente bekend: *in het gebied tusschen Resigebergte in het Zuiden*

---

[1]) L. Rutten. Nova Guinea, l. c., p. 38.

en Permadiberg in het Noorden moeten oudmiocene tot oligocene afzettingen groote verspreiding hebben.

Alle Lepidocyclinenkalksteenen zijn zeer zuiver.

2. *De Operculina- en Heterosteginakalksteenen.* Uit de omgeving van het Wentgebergte komen nog drie kalksteenen, die van de vorige niet onbelangrijk verschillen. Twee rolsteenen, beide 542. 1909 genummerd, werden in de Bibisrivier gevonden. De eene is een vrij kristallijne, roodgrijze kalksteen met schaarsche kwartssplinters. Hij bevat vele, niet goed bewaarde Heterosteginen. De andere is een glauconitische kalkzandsteen, waarin men naast talrijke kwartskorrels vele Operculinen en sporen van Heterosteginen ontwaart.

Een witgrijze, suikerkorrelige kalksteen van den Permadiberg (N°. 349. 1907) bevat naast zeldzame kwartskorrels, slecht bewaarde kleine Rotalidae, Textularidae, Miliolidae en andere kleine Foraminiferenresten talrijke kleine Operculinen.

Een glauconitische kwartsrijke kalksteen uit het Wentgebergte (N°. 616. 1909) bevat naast schaarsche Operculinen en Milioliden zeer talrijke, kleine Heterosteginen. Het zijn kleine (horizontale doorsnede 2—3 mm., verticale doorsnede 1 mm.), knoopvormige fossielen, die bijna geheel uit spiralen, die elkaar omvatten, opgebouwd zijn. De oppervlakte is bedekt met talrijke, dikke wratten, die het basale deel van conische zuiltjes van tusschenskelet zijn. Deze wratten worden met elkaar verbonden door dunne, onregelmatig verloopende ribben. In de dwarse doorsnede lijken deze fossielen sterk op kleine Nummulieten, in de mediane doorsnede ziet men echter, dat het kleine Heterosteginen zijn, die het periphere, evolute skeletdeel, dat anders bij dit genus meestal voorkomt, bijna steeds missen. Het zijn individuen van Heterostegina (Spiroclypeus) pleurocentralis Carter.

Over den ouderdom der besproken Operculina- en Heterosteginakalksteenen kan niets positiefs gezegd worden, maar het is zeer waarschijnlijk, dat zij tot dezelfde formatie als de Lepidocyclinenkalksteenen behooren. Merkwaardig is, dat de Operculina-Heterosteginakalksteenen alle kwartskorrels of kwartssplinters bevatten, ja, dat sommige echte kalkzandsteenen zijn.

3. *Kristallijne kalksteenen uit het Hellwiggebergte.* Zeer kristallijne, suikerkorrelige, grijze tot grijsroode kalksteenen zonder herkenbare fossielresten werden in het Hellwiggebergte (N°. 337, 1907; 650, 652, 666, 1909) en op den Kristalberg (N°. 342. 1907) verzameld. Hun ouderdom is volmaakt onbekend.

4. *De Alveolina- en Lacazinakalksteenen.* Een aantal eocene kalksteenen, waarin nu eens de Alveolinen, dan weer de Lacazinen de overhand hebben, werden deels als rolsteenen verzameld, deels als

vast gesteente aangetroffen. Steeds zijn het zwartgrijze gesteenten, waarin de fossielen als witte vlekjes te herkennen zijn.

Vijf rolsteenen (Sabang N°. 117. 1907, Alkmaar no. 286a. 1907, Bibisrivier N°. 527. 1907, zijrivier der Bibisrivier N°. 738. 1909 en Geitenkamp N°. 187a. 1907) behooren tot de Alveolinenkalksteenen. Alle zijn dichte, grijze kalksteenen met schaarsche kwartssplinters. Zij zitten vol met Alveolinen, die tot het primitieve type behooren. Voor een deel zijn ze spits spoelvormig, en behooren tot A. Wichmanni Rutten, voor een ander deel zijn ze meer ellipsoidaal en behooren dan wellicht tot A. Javana Verbeek. Daarnaast komen kleine Rotaliden en Milioliden voor. Talrijk zijn voorts kleine, meer dan 5 mm. metende Nummuliniden, die hetzij tot Operculina of tot Nummnlites behooren. Ze gelijken sterk op de tusschenvormen tusschen deze beide genera, die uit den eocenen Alveolinenkalksteen van Tandjoeng Seilor (Oost Borneo) bekend zijn. [1])

Een andere Alveolinakalksteen, waarschijnlijk ook een rolsteen, werd aan de noordelijke helling van den Geluksheuvel gevonden (no. 320. 1907). De kalksteen is zeer gebleekt; hij bevat dezelfde versteeningen als de boven beschreven rolsteenen. Merkwaardig is, dat vele Alveolinen in dit gesteente onregelmatige vormen vertoonen, die waarschijnlijk het gevolg van groeistremmingen tijdens het leven zijn.

Drie grijszwarte kalksteenen, die sterk op de vorige lijken, werden aan het vaste gesteente van den Wilhelminatop verzameld (N$^{os.}$ 707, 709, 712. 1909). Naast zeer talrijke individuen van Lacazina Wichmanni Schl. komen in het gesteente ook resten van Alveolina Wichmanni voor. Daarnaast Milioliden, Rotaliden en kleine Nummuliniden. Ofschoon de kalksteenen van den Wilhelminatop tot hetzelfde type behooren als de rolsteenen uit de Lorentz- en Bibisrivieren, moeten de laatste toch eene andere herkomst hebben, omdat de verdeeling der fossielen in de gesteenten verschillend is: in de rolsteenen zijn Lacazinen afwezig, terwijl zij aan den Wilhelminatop de overhand hebben.

De boven beschreven Alveolina en Lacazinakalksteenen behooren zeker tot het Oudtertiair.

Merkwaardig is de zuiverheid dezer kalksteenen, die slechts zelden splinters van kwarts bevatten.

5. *Nummulina-Alveolinakalksteen.* Een zwartgrijze kalksteen van eene rolsteenbank bij Sabang gelijkt op het eerste gezicht sterk op de beschreven Alveolinenkalksteenen (N°. 144. 1907). In de slijpplaatjes ziet men echter, dat de Alveolinen in het gesteente schaarsch zijn, en dat Nummulieten onder de fossielen verre de overhand hebben.

---

[1]) L. Rutten. Samml. Geol. Reichsmuseum Leiden (1). X. 1915, p. 10.

De Alveolinen zijn zeer merkwaardig. Ze behooren zeker tot het eenvoudige type. Hun vorm is absoluut onregelmatig: hij voegt zich geheel naar de tusschenruimten, die de Nummulieten in het gesteente laten; de Alveolinen vullen als het ware in „allotriomorphen" vorm de restruimten tusschen de „idiomorphe" Nummulieten (Fig. 1 en 2) op. Daar deze nooit sterke deformaties vertoonen, mag men ook niet aannemen, dat de deformaties der Alveolinen na hunnen dood door gebergtedruk ontstaan zijn. Waarschijnlijk zijn deze deformaties het gevolg van groeistremmingen: de Alveolinen groeiden op den bodem tusschen doode Nummulietenschalen en waren genoodzaakt, hunne vormen aan de omgeving aan te passen.

De Nummulieten schijnen tot verschillende soorten te behooren. Voor het grootste deel zijn het kleine vormen (horizontale doorsnede 4—5 mm., verticale doorsnede 1½—2 mm.), die slechts ongeveer 6 omgangen bezitten. Skeletzuiltjes zijn niet talrijk; waar zij aanwezig zijn, hebben zij steeds conische vorm. Soms is een centrale tuberkel aanwezig. De septaalbanden schijnen in zwakgegolfde lijnen radiair te verloopen. Wellicht behooren deze Nummulieten in de groep van N. Bagelensis Verbeek thuis. Daarnaast komen echter ook grootere



Fig. 1.

vormen voor (diameter meer dan 10 mm.), welker maeandriforme septalbanden met schaarsche wratten bezet zijn.

Deze kalksteen bevat slechts schaarsche kwartssplinters.

6. *Nummulietenkalksteenen.* Talrijke Nummulietenkalken werden als rolsteenen gevonden. Wellicht is van één vindplaats ook het vaste gesteente vertegenwoordigd. Aan de noordwest en zuidwest-

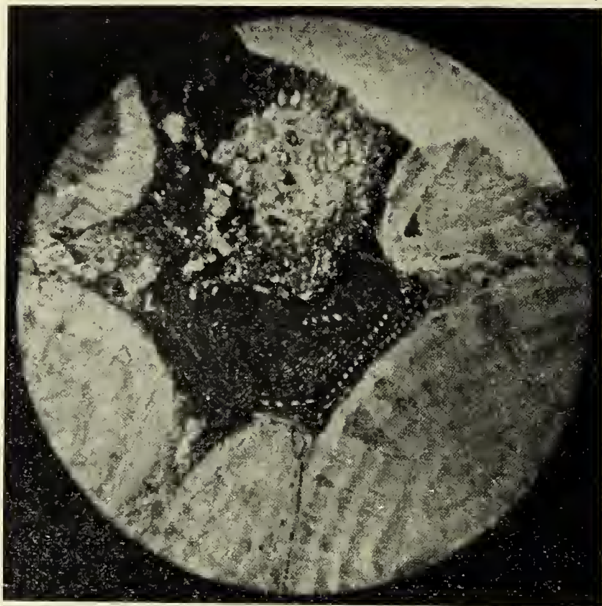


Fig. 2.

helling van den Permadiberg werden twee Nummulietenkalksteenen gevonden, van welke de eene waarschijnlijk een rolsteen is (N°. 350. 1907), terwijl de andere mogelijkerwijze uit het vaste gesteente komt (N°. 347. 1907). Beide zijn zeer fossielrijke kalksteenen met schaarsche kwartssplinters. Zij zijn zwak glauconitisch. Verreweg de talrijkste fossielen zijn Nummulieten, die zelden grooter dan 15 mm. worden; daarnaast komt Lithothamnium voor.

Een rolsteen van rooden Nummulietenkalk, die zeer veel kleine kwartssplinters bevat, werd in de Bibisrivier gevonden (N°. 559. 1909). Hij bevat vele kleine en groote Nummulieten met netvormige sep taalbanden en enkele Operculinen.

In de Lorentzrivier werden rolsteenen van Nummulietenkalk bij Sabang (N°. 111. 1907), Geitenkamp (N°. 196. 1907) en Alkmaar (N°. 243, 286. 1907) gevonden.

N°. 111. 1907 is een grijsbruine Nummulietenbreccië met iets glauconiet en sporen van kwarts. Naast groote en kleine Nummulieten komen zeer schaarsche Lithothamniën voor. Ook N°. 196. 1907 is eene Nummulietenbreccië met sporen van Alveolinen. De Nummulieten, met doorsneden van niet meer dan 15 mm., hebben maeandriforme

septaalbanden. Ook in N°. 243. 1907 komen Nummulieten met maeandriforme septaalbanden voor, die, met zeldzame Alveolinen, in een roode grondmassa van kalksteen liggen. De aan kwartssplinters rijke kalksteen N°. 286. 1907 bevat halfgroote Nummulieten en eenige Alveolinen.

Drie rolsteenen van Nummulietenkalksteen werden in de Schultzrivier, een oostelijke zijtak van de Lorentzrivier gevonden (Nos. 796, 797, 798. 1909). Het zijn alle grijze kalksteenen, rijk aan splinters en afgerolde korrels van kwarts, waarin vele groote en kleine Nummulieten voorkomen. De Nummulieten bezitten voor een deel netvormige septaalbanden. Naast Nummulina komt Miliola en wellicht Operculina voor.

Bij de uitmonding der Koekoeksrivier in de Reigerrivier werd ten laatste een kalksteen met schaarsche kwartssplinters gevonden (N°. 388. 1907), die naast dubieuse Heterosteginen talrijke, tot 15 mm. groote Nummulieten met netvormige septaalbanden bevat.

Terwijl de in den aanvang beschreven Lepidocyclinenkalksteenen en waarschijnlijk ook de Operculina-Heterosteginagesteenten tot het Neogeen behooren, zijn de Alveolina-Lacazinagesteenten en de Nummulietenkalken zeker eogeen. De afwezigheid van Assilinen en Orthophragminen en het veelvuldig voorkomen van Nummulieten met netvormige septaalbanden wijst er echter op, dat we met de jongere deelen van het Eogeen te doen hebben.

Enkele zeer jonge, slibbare, kleiige, Foraminiferenhoudende gesteenten werden zuidelijk van de gebergte-zone gevonden. In een klei van Kruisheuvel bij Sabang (N°. 107. 1907), welke de laatste gebergteplooiing nog heeft meegemaakt, werden talrijke Rotalidae aangetroffen. Vele Polystomellen komen voor in een klei, die als vast gesteente op den Zuilenheuvel, niet ver van Geitenkamp, voorkomt (N°. 177*a*. 1907). Een bij Alkmaar optredende klei is rijk aan verschillende, stratigraphisch onbelangrijke Textularidae en Miliolidae (N°. 258*a*. 1907). De drie genoemde kleien gelijken sterk op de jongtertiaire mergels, die van Timenâ in Noord Nieuw-Guinea bekend zijn [1]). Waarschijnlijk is ook hun onderdom ongeveer dezelfde.

Ten laatste moeten nog eenige ontypische Foraminiferenhoudende gesteenten vermeld worden. Een rolsteen van Alkmaar (N°. 224. 1907) is een glauconitische, donkergrijze kalk met Lithothamnium, Koralen, ? Bryozoen, ? Orbitolites en een zeer kleine Nummulinide

---

[1]) L. RUTTEN. Nova Guinea, l. c., p. 34.

waarschijnlijk Polystomella van beslist tertiairen ouderdom. In de Bibisrivier werd een vaste kalksteen gevonden, die naast talrijke Lamellibranchiatae en Koralen kleine Individuen van Polystomella cf. craticulata F. en M. bevat. Ook dit gesteente is tertiair.

Naast de tot nu toe beschreven gesteenten werden nog een aantal andere kalksteenen en kalkzandsteenen uit het stroomgebied der Lorentzrivier onderzocht, waarin echter geen Foraminiferen bleken voor te komen.

Merkwaardig is, dat in geen der onderzochte gesteenten, die voor een deel vrij grofklastisch waren, vulcanisch materiaal voorkomt. In dit opzicht bestaat er dus eene scherpe tegenstelling tusschen Noord- en Zuid-Nieuw-Guinea.

Buitenzorg, November 1916.

Physiologie. — De Heer HAMBURGER biedt een mededeeling aan van den Heer R. BRINKMAN en Mejuffr. E. VAN DAM, getiteld: „*Een methode voor de bepaling van ionenconcentraties in ultrafiltraten en andere eiwitvrije oplossingen*".

(Mede aangeboden door den Heer F. M. JAEGER.)

A. De bepaling van het gehalte aan vrije Calcium-ionen.

Voor de beteekenis der biologische zoutwerkingen komen in de eerste plaats de ionenwerkingen in aanmerking. Het is daarom wenschelijk, dat wij over een methode kunnen beschikken, waarmee inonenconcentraties gemeten worden.

Tot nu toe wordt alleen de concentratie der vrije H·-ionen direct gemeten; de concentraties van andere, eveneens physiologisch belangrijke ionen werden of niet, of alleen indirect door berekening bepaald.

De concentratieketen-methode kan, door de storende gasontwikkeling, zeer moeilijk voor de physiologisch belangrijke metalen worden toegepast. DRUCKER [1]) heeft een methode aangegeven, waarbij een Ba-amalgaam als electrode gebruikt werd; een analoge methode kan misschien uitgewerkt worden voor alkalimetalen. Dergelijke bepalingen zijn echter nog niet uitgevoerd.

Als voorbeeld van een geval waarbij het noodig is de ionenconcentratie te kennen, kunnen wij den toestand, waarin het calcium in het bloed voorkomt, noemen. Het komt daar nl. voor in 3 vormen. als $Ca^{\cdot\cdot}$ ion, als niet-gedissocieerd calciumzout ($Ca\,(HCo_3)_2$) en als kolloidale calcium-eiwitverbinding; in den laatsten vorm bevindt zich ongeveer 25 % van het totale calcium. Volgens *Rona* en *Takahashi* [2]) wordt de ionenconcentratie van het calcium in het serum bepaald door de evenwichtsvergelijking.

$$\frac{[Ca^{\cdot\cdot}].[HCO_3^1]}{[H^{\cdot}]} = k\,.\,(k \text{ is gemiddeld } 350).$$

Voor het serum, dat de physiologische $[H^{\cdot}]$ en koolzuurspanning heeft, beteekent dit een $[Ca^{\cdot\cdot}]$ van 20—25 mgr. per L. Van de ± 100 mgr. per L. calcium die in het serum voorkomen is dus slechts $^1/_5$ deel in ion-vorm aanwezig. Men ziet uit de vergelijking dat deze Ca-ionen concentratie niet direct afhankelijk is van de totale hoeveelheid

1) Zeitschr. für Elektrochemie 19, 804 (1913).

2) Biochem. Zeitschr. 49 p. 390.

calcium; de concentratie van het physiologisch belangrijkste deel van het plasma-calcium wordt dus niet beheerscht door de hoeveelheid aanwezige calciumzouten, maar door de waterstof en bicarbonaationen-concentratie.

Met behulp van de door ons aangegeven methode kan men nu op eenvoudige wijze deze $Ca^{\cdot\cdot}$ ionenconcentratie direct meten; de methode kan in principe evengoed voor andere ionen worden toegepast.

Wij zijn begonnen met de meting der $Ca^{\cdot\cdot}$ ionenconcentratie omdat de uitkomsten der meting hier gemakkelijk door berekening kunnen gecontroleerd worden.

I. *Algemeen beginsel der methode. Enkele technische opmerkingen.*

Indien van een opgelost binair electrolyt de concentratie van het anion $= C_A$, die van het kation $= C_k$ en die van het niet-gedissocieerde zout $= C_n$, dan bestaat volgens de massawerkingswet de betrekking:

$$c_A \cdot c_k = k \cdot c_n \text{, waarin } k \text{ een constante is.}$$

Is het electrolyt nu zeer weinig oplosbaar, dan is het zout practisch geheel gedissocieerd, en de concentratie van het niet-gedissocieerde deel kan verwaarloosd worden.

Indien nu de oplosbaarheid van het slecht-oplosbare zout $= A$ is, dan is dus $C_A = C_k = A$, en heeft het product $C_A \cdot C_k = A^2$ een constante waarde (oplosbaarheidsproduct).

Is dit product en de concentratie van één der ionen bekend, dan kan dus de concentratie van het tweede ion berekend worden.

Stel, dat een oplossing een concentratie aan $Ca^{\cdot\cdot}$ ionen heeft $= C_{Ca}$; dan is de concentratie der C_2O_4'' ionen, die vrij naast deze $Ca^{\cdot\cdot}$ ionen bestaan kunnen, maximaal $= \frac{P}{C_{Ca}}$, indien P het oplosbaarheidsproduct van CaC_2O_4 voorstelt. Voegt men dan nog meer C_2O_4'' ionen toe, dan zal CaC_2O_4 neerslaan of in oververzadigde oplossing blijven.

Kan men het ontstaan van een oververzadigde oplossing vermijden, dan kan men door geleidelijk meer en meer C_2O_4'' ionen aan een $Ca^{\cdot\cdot}$ ionen bevattende oplossing toe te voegen, waarnemen, dat op een zeker oogenblik een fijne troebeling van CaC_2O_4 ontstaat. Dan is de C_2O_4'' ionenconcentratie zoo groot geworden, dat het oplosbaarheidsproduct juist is overschreden. Dan zijn dus bekend het oplosbaarheidsproduct en de C_2O_4'' ionenconcentratie, de $Ca^{\cdot\cdot}$ ionenconcentratie kan dus berekend worden. Omgekeerd kan men, indien men van een bekende $[Ca^{\cdot\cdot}]$ uitgaat, zoo de grootte en de standvastigheid van het oplosbaarheidsproduct bepalen.

Bij deze methode moet men dus waarnemen, hoe groot de $[C_2O_4'']$ is, waarbij nog juist een CaC_2O_4 troebeling wordt bespeurd. In 't algemeen kan dit op de volgende wijze geschieden:

Bij een reeks buisjes, die alle 1 cM^3 eener bekende $CaCl_2$ oplossing bevatten, werden, telkens in het opvolgende buisje geleidelijk grooter wordende hoeveelheden oxalaat-oplossing gevoegd, met een capillair-pipet, die in tienduizendste kubieke centimeters verdeeld was. Dan werden de buisjes $^1/_2$ — 1 uur aan zichzelf overgelaten, en vervolgens werd bepaald in welk buisje de eerste fijne CaC_2O_4 troebeling was opgetreden.

Het is duidelijk dat het ontstaan van oververzadigde CaC_2O_4 oplossingen vermeden moet worden.

Bevatte de oplossing nog andere zouten, in eenigszins hoogere concentraties (bv. Ringersche oplossing, ultra-filtraat) dan hebben wij nooit oververzadiging bemerkt. Wel kwam oververzadiging voor in zuivere CaC_2O_4 oplossingen. Men kan dit vermijden door als volgt te werken:

Met een capillairpipet worden in de droge buisjes de noodige hoeveelheden eener bv. 0,05 N. sterke oxalaatoplossing gebracht. Op een waterbad worden de buisjes dan tot droog ingedampt. Daarna wordt de $Ca^{\cdot\cdot}$ ionen bevattende vloeistof in de buisjes gebracht. Op deze wijze wordt dus vermeden dat van te voren oververzadigde oplossingen ontstaan.

Voor het bepalen der calciumionenconcentratie is het bovendien noodig om buisjes te gebruiken die met een ingeslepen glazen stopje goed gesloten zijn; dit is noodig om het water koolzuurvrij te houden of om een bepaalde koolzuurspanning constant te kunnen houden.

Voor de beoordeeling van het al of niet ontstaan zijn van het CaC_2O_4 neerslag is het noodig, dat de buisjes zoo goed mogelijk gereinigd zijn. Dit kan op de gebruikelijke wijze geschieden (chroomzuur, uitstoomen volgens Abegg, etc.). Het best beschouwt men dan de buisjes in een kastje waarin licht door een spleet in den bodem door de oplossing valt. Men moet zorg dragen, dat het licht niet in de oogen van den onderzoeker valt. Door het Tyndall-phaenomeen ziet men de fijnste troebelingen. Bevat de oplossing van te voren al een lichte opaliseering (niet afkomstig van CaC_2O_4), zooals dit soms bij serum en ultrafiltraat het geval is, dan kan het doelmatig zijn de oplossingen in rood licht te beschouwen. Daar de golflengte van dit licht te groot is om hier buigingsverschijnselen te geven, wordt de opaliseering dan niet zichtbaar. Natuurlijk moet ook de temperatuur bij de proef constant zijn. Het best werkt men daarom in een waterbad van constante temperatuur.

Nog op een andere wijze kan men de resultaten, die met boven-

staande methode zijn verkregen, controleeren, n.l. door meting van het electrisch geleidingsvermogen der oplossingen.

Voegt men aan een oplossing, die $Ca^{\cdot\cdot}$ en Cl' ionen bevat, C_2O_4'' en Na' ionen toe, dan kan het product $Ca^{\cdot\cdot} \times C_2O_4''$ het kwadraat der oplosbaarheid van CaC_2O_4 niet overschrijden; zijn er te veel C_2O_4'' ionen toegevoegd, dan moet ongedissocieerd CaC_2O_4 ontstaan. Hoeveel CaC_2O_4 zal er ontstaan indien het product met een bepaalde hoeveelheid C_2O_4'' wordt overschreden?.

Er wordt aan een binair electrolyt met de oplosbaarheid A een zout toegevoegd dat het anion met het eerste gemeen heeft, in de concentratie x. Hierdoor wordt de oplosbaarheid van het eerste zout veranderd tot A'. De totale concentratie van het anion bedraagt dan $A' + x$, die van het kation A'. Het oplosbaarheidsproduct is dan dus $A'(A' + x)$, en daar dit constant is hebben we dus

$$A'(A' + x) = A^2$$

of

$$A' = \frac{-x \pm \sqrt{4A^2 + x^2}}{2}.$$

De hoeveelheid niet-gedissocieerd zout, die ontstaat wanneer x Mol zout, dat 1 ion met het eerste gemeen heeft, wordt toegevoegd is dus:

$$A - \frac{-x \pm \sqrt{4A^2 + x^2}}{2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

als A de oplosbaarheid van het eerste zout voorstelt.

Wij hebben nu bijvoorbeeld 5 cc. eener $CaCl_2$ 6 aq. oplossing in CO_2-vrij water, die per L. 0,56 millimol $Ca^{\cdot\cdot}$ en (2 Cl') bevat. Hieraan wordt eenige malen achter elkaar 0,0050 cc. van een 0,05 N. $Na_2C_2O_4$ oplossing toegevoegd. Na elke toevoeging wordt het geleidingsvermogen gemeten. Het $Na_2C_2O_4$ mag hier wel in oplossing toegevoegd worden, daar de oplossing hier wel oververzadigd mag worden.

Met behulp van de eerste methode is nu voor het oplosbaarheidsproduct gevonden 0,055. Hieruit volgt dat met de aanwezige 0,56 millimol $Ca^{\cdot\cdot}$ een C_2O_4'' concentratie groot 0,1 millimol overeenkomt. Bij elke toevoeging van 0,0050 cc. 0,05 N. $Na_2C_2O_4$ aan 5 cc. $CaCl_2$ 6 aq. oplossing stijgt de C_2O_4'' concentratie met 0,025 m.M. Na 4 toevoegingen is dus het oplosbaarheidsproduct bereikt. Hoe verhouden zich nu de totale ionenconcentraties bij deze toevoegingen?

Voor de eerste toevoeging is de totale ionenconcentratie

0,56 millimol $Ca^{\cdot\cdot}$ + 0,56 m.M. (2 Cl'') = 1,12 m.M.

Na de eerste toevoeging van 0,025 m.M. $Na_2C_2O_4$

0,56 $Ca^{\cdot\cdot}$ + 0,56 (2 Cl'') + 0,025 C_2O_4 + 0,025 (2 Na'') = 1,17 m.M.

Zoo is de totale ionenconcentratie na de 2e toevoeging 1,22 m.M., na de 3e 1,27 m.M. en na de 4e 1,32 m.M. Met de 5e toevoeging wordt het oplosbaarheidsproduct overschreden. Volgens de afgeleide formula (1) is de hoeveelheid ontstaan ongedissocieerd CaC_2O_4 =

$$\sqrt{0{,}055} - \frac{-0{,}025 \pm \sqrt{4 \times 0{,}055 + 0.025^2}}{2} = 0{,}0115 \text{ mM.}$$

De totale ionenconcentratie wordt dus na de 5e toevoeging
1,32 m.M. + 0,025 C_2O_4'' + 0,025 (2 Na'') — 0,0115 Ca$^{\cdot\cdot}$ — 0,0115 C_2O_4'' = 1,347 m.M.

Het totale ionengehalte neemt nu dus niet toe met 0,05 m.M. maar slechts met 0,027 m.M.

Met de zesde toevoeging krijgt men voor de hoeveelheid niet-gedissocieerd CaC_2O_4:

$$\sqrt{0,055} - \frac{0,050 + \sqrt{4 \times 0,55 + 0,05^2}}{2} = 0,024 \text{ mM.}$$

De totale ionenconcentratie is na de 6e toevoeging 1,372 m.M., de toename is 0,025 m.M.

Na de 7e toevoeging bedraagt, op dezelfde wijze berekend, de totale ionenconcentratie 1,402 m.M., de toename 0,03 m.M.

Met ziet dus, dat de totale ionen-concentratie bij de 4 eerste toevoegingen regelmatig met 0.05 m.M. toeneemt; vanaf de 5e toevoeging neemt zij echter slechts met 0,025 tot 0,030 m.M. toe. Onderzoekt men nu het electrisch geleidingsvermogen na elke toevoeging, dan moet dit analoog aan de vermeerdering der totale ionen-concentratie toenemen. Vindt men dan dat na de 4 eerste toevoegingen het geleidingsvermogen nog slechts met de helft der eerste waarden toeneemt, dan is dit een bewijs dat voor het oplosbaarheidsproduct de juiste waarde is gevonden.

II. *Bepaling van de Calciumionenconcentratie eener zuivere $CaCl_2$ 6aq. oplossing.*

In 8 buisjes met ingeslepen stop worden respectievelijk 0,0010, 0,0015, 0,0020, 0,0025, 0,0030, 0,0035, 0,0040, 0,0045 cc. eener 0,05 N. $Na_2C_2O_4$ oplossing gebracht. Daarna worden de buisjes eenigen tijd in 't waterbad gebracht, totdat de oxalaat-oplossingen geheel ingedampt zijn. Vervolgens wordt in elk buisje 1 cc. eener $CaCl_2$ 6 aq. oplossing gebracht die 125 mgr. per L. bevat. Na 1 uur wordt het resultaat afgelezen.

De $CaCl_2$ 6 aq. oplossing was bereid uit een zuiver preparaat (The British Drug Houses); de sterkte der oplossing werd door Chloorbepaling gecontroleerd. Het zout was opgelost in zorgvuldig uitgekookt gedistilleerd water; alle bepalingen geschiedden in kleine buisjes van 2 cc. inhoud met ingeslepen stop.

De $Na_2C_2O_4$ oplossing werd bereid uit zuiver $Na_2C_2O_4$ volgens Sörensen (Kahlbaum). Het bevat geen kristalwater, is niet hygroscopisch en verdraagt temperaturen tot 200°.

Het blijkt dat de eerste 6 buisjes geheel helder zijn gebleven maar dat de buisjes met 0,040 en 0,045 cc. oxalaat-oplossing een fijne troebeling bevatten.

Het oplosbaarheidsproduct was dus bereikt wanneer gemiddeld 0,0375 cc. $\frac{N}{20}$ $Na_2C_2O_4$ oplossing aan 1 cc. $CaCl_2$ 6 aq. oplossing was

toegevoegd; de $CaCl_2$ 6 aq. oplossing bevatte 125 mgr. $CaCl_2$ 6 aq. of 0,57 millimol $Ca^{\cdot\cdot}$ per L.

De oxalaatconcentratie was dan dus 0,095 m.M., het oplosbaarheidsproduct wordt gevonden $0{,}095 \times 0{,}57 = 0{,}054$ mM. per L. De temperatuur gedurende alle proeven was 20°. Tabel I vermeldt de uitkomsten van een reeks dergelijke proeven.

TABEL I.

Sterkte der $Ca^{\cdot\cdot}$ concentratie.	Sterkte der C_2O_4'' concentratie, die moest toegevoegd worden om juist een neerslag te krijgen.	Oplosbaarheidsproduct.
0.57 millimol.	0.095 m.m.	0.054
0.55 „	0.095 „	0.052
0.38 „	0.145 „	0.055
0.37 „	0.15 „	0.054
0.28 „	0.20 „	0.056
0.28 „	0.20 „	0.056
0.10 „	0.54 „	0.054
1.00 „	0.056 „	0.056

Uit deze tabel blijkt dus dat voor zuivere $CaCl_2$ 6aq. oplossingen van verschillende sterkte een constant oplosbaarheidsproduct van CaC_2O_4 gevonden wordt, groot 0,055 *m.M. per L.*

De controle van deze waarde geschiedde door meting van het electrisch geleidingsvermogen zooals dit hierboven werd beschreven.

Het geleidingsvermogen werd bepaald in een weerstandsvat volgens HAMBURGER. De methode vindt men beschreven in Osmot. Druck u. Ionenlehre. Bd. I, pag. 98. De temperatuur was constant 25°.

Bij 5 cc. eener $CaCl_2$ 6 aq. oplossing die 125 mgr. per L. bevatte werd telkens 0,0050 cc. eener 0,05 N. $Na_2C_2O_4$ oplossing gevoegd. Na elke toevoeging werd het constant geworden geleidingsvermogen gemeten.

De weerstand van de zuivere $CaCl_2$ 6 aq. opl. was

$8{,}709 \times 2000\ C$ Ohm ($C =$ capaciteit van het weerstandsvat).

Tabel II geeft de afname van weerstand na elke toevoeging van oxalaatoplossing.

TABEL II.

Samenstelling der oplossing.	Weerstand.	Weerstandsafname.
5 cc. $CaCl_2$ 6 aq.	8.709 × 2000 c. Ohm	—
5 cc. $CaCl_2$ 6 aq. + 0.0050 cc. $Na_2C_2O_4$	8.452 × 2000 c. Ohm	0.257 × 2000 c. Ohm
5 cc. $CaCl_2$ 6 aq. + 0.010 cc. $Na_2C_2O_4$	8.200 × 2000 c. Ohm	0.252 × 2000 c. Ohm
5 cc. $CaCl_2$ 6 aq. + 0.015 cc. $Na_2C_2O_4$	7.929 × 2000 c. Ohm	0.271 × 2000 c. Ohm
5 cc. $CaCl_2$ 6 aq. + 0.020 cc. $Na_2C_2O_4$	7.696 × 2000 c. Ohm	0.233 × 2000 c. Ohm
5 cc. $CaCl_2$ 6 aq. + 0.025 cc. $Na_2C_2O_4$	7.600 × 2000 c. Ohm	0.096 × 2000 c. Ohm
5 cc. $CaCl_2$ 6 aq. + 0.025 cc. $Na_2C_2O_4$	7.500 × 2000 c. Ohm	0.100 × 2000 c. Ohm
5 cc. $CaCl_2$ 6 aq. + 0.030 cc. $Na_2C_2O_4$	7.410 × 2000 c. Ohm	0.090 × 2000 c. Ohm

Men ziet, dat na de 4e oxalaattoevoeging de afname van den weerstand op minder dan de helft verkleind wordt. Met de 4e toevoeging was dus het oplosbaarheidsproduct bereikt; toen was de C_2O_4'' concentratie 0,1 milimol, de $Ca^{\cdot\cdot}$ concentratie 0,56 millimol, het product dus 0,056 *millimol.*

Wij hebben nu meerdere dergelijke bepalingen gedaan, die altijd tot resultaat hadden een oplosbaarheidsproduct van 0,053—0,058; gemiddeld 0,055.

Hierbij moet nog opgemerkt worden, dat men niet verwachten kan, dat het oplosbaarheidsproduct juist aan het einde van een toevoeging bereikt zal zijn; men moet dus de gemiddelde waarde nemen.

Men zou nog kunnen vermoeden, dat de vermindering der weerstandsafname ontstond, doordat het in groote concentratie toegevoegde oxalaat practisch niet meer compleet dissocieerde; de wijze van vermindering zou dan echter niet plotseling zijn. Om dit na te gaan zijn de zelfde hoeveelheden oxalaat aan 5 cc. gedistilleerd water toegevoegd; het geleidingsvermogen bleef evenredig aan de toegevoegde hoeveelheden toenemen.

Met 2 van elkaar onafhankelijke methoden hebben wij dus nu voor het constante oplosbaarheidsproduct de waarde 0,055 m.M. gevonden; wanneer $Ca^{\cdot\cdot}$ en C_2O_4'' ionen bij elkaar gevoegd worden.

De oplosbaarheid van CaC_2O_4 is door KOHLRAUSCH bepaald op $4.35. 10^{-5}$ Mol per L. (18°); het oplosbaarheidsproduct hieruit berekend bedraagt 0,0019 m.M. per L. Dit is dan veel kleiner dan het door ons gevondene.

KOHLRAUSCH heeft het geleidingsvermogen van een verzadigde

CaC_2O_4 oplossing gemeten; hij is dus niet van de afzonderlijke ionen uitgegaan.

Herz u. Muhs[1]) hebben, door bijeenvoeging der ionen voor de oplosbaarheid van CaC_2O_4 aq. gevonden 0,034 gram per L., waaruit een oplosbaarheidsproduct van **0,054** volgt. Dit product komt dus geheel met het onze overeen.

De bepalingen van Herz u. Muhs *en onze eigen bepalingen met* **2** *methoden wijzen met voldoende zekerheid uit, dat wij met een constant oplosbaarheidsproduct van* 0.055 *hebben rekening te houden.*

III. *Bepaling der* $Ca^{\cdot\cdot}$ *ionenconcentratie in oplossingen die meer zouten bevatten.*

1. De $Ca^{\cdot\cdot}$ ionen concentratie van 0,02 % $CaCl_2$ 6aq. in 0,5 % NaCl

Voor het systeem $CaCl_2 \rightleftarrows Ca^{\cdot\cdot} + 2\,Cl'$ geldt: $CaCl_2 \rightleftarrows K\,Ca^{\cdot\cdot}\,Cl'^2$. K kan gevonden worden, indien de ionisatiegraad α van een bepaalde $CaCl_2$ oplossing bekend is. Voor $Ca(NO_3)_2$ 0,1 % (= 6 m.M. per L.) is $\alpha = 0,67$ [2]).

Wij hebben dus

$$[Ca(NO_3)_2] - \alpha\,[Ca(NO_3)_2] = K\,\alpha\,Ca^{\cdot\cdot}\,\alpha^2\,(NO_3)^2$$

of daar

$$[CaNO_3] = [Ca^{\cdot\cdot}] = [NO_3] = 6 \text{ m.M. per L.}$$
$$1 - 0,67 = K \times 0,67^3\,(NO_3)^2$$
$$1 - 0,67 = K \times 0,67^3 \times 0,036$$
$$K = 30.$$

Dit is dus de dissociatieconstante voor $Ca(NO_3)_2$; die voor $CaCl_2$ zal hier weinig van afwijken.

Voor 0,02 % $CaCl_2$ 6 aq. of 0,91 millimol per L., in 0,5 % NaCl geldt nu weer

$$[CaCl_2] = K\,Ca^{\cdot\cdot}\,Cl'^2.$$

De conc. van Cl' wordt gegeven door de dissociatie van 0,5 % NaCl. Hiervoor is $\alpha = 0,82$ (Osmot. Druck u Ionenlehre, p. 53); $[Cl']$ wordt dus 7 m.M. Hierbij komt nog de $[Cl']$ van 0,91 m.M. $CaCl_2$, wat we voor $\pm$ de helft gedissocieerd kunnen rekenen, zonder groote fout te maken. De totale $[Cl']$ wordt dan $\pm$ 8 m.M.

Dus

$$CaCl_2 = K\,(0,91 - CaCl_2)\,0,064. \quad K = 30. \quad CaCl_2 = 0,60 \text{ m.M.}$$

Van 0,91 m.M. $CaCl_2$ is dus 0,60 m.M. niet gesplitst en 0,31 m.M. wel gedissocieerd. De oplossing bevat dus 12,4 mgr. vrije $Ca^{\cdot\cdot}$ per L.

Experimenteel blijkt, dat 0,18 mM oxalaatconcentratie noodig is, voordat in de oplossing NaCl 0.5 % + $CaCl_2$ 6 aq. 0,02 % een troebeling ontstaat. Hieruit volgt een $[Ca^{\cdot\cdot}]$ van — 0,055 : 0,18 = = 0,30 mM. of 12 *mgr.* per L. Deze bepaling komt dus goed overeen met de berekening.

---

1) Ber. 36. 4, p. 3717.

2) Osmot. Druck u. Ionenlehre. I, p. 53.

2. *Bepaling van de calciumionen-concentratie in physiologische zoutoplossingen.*

In een oplossing van de samenstelling: NaCl 0,7 %₀, $NaHCO_3$ ± 0,18 %₀, KCl 0,02 %₀ en $CaCl_2$ 6 aq. 0,040 %₀, die een zekere, niet precies bekende koolzuurspanning bevatte, was de waterstof ionenconcentratie $0,3 . 10^{-7}$ (bepaald met neutraal rood volgens SÖRENSEN) en de bicarbonaat ionenconcentratie 0,02 N (bepaald door titratie met 0,01 N. HCl en methyloranje.

Hieruit volgt voor de Calcium ionenconcentratie

$$[Ca^{\cdot\cdot}] = 350 \frac{0,3 . 10^{-7}}{0,02} = \mathbf{20\ mg.\ per\ L.}$$

Experimenteel ontstond een $Ca\,C_2\,O_4$ troebeling bij een oxalaatconcentratie van 0,1 millimol. Hieruit volgt een

$[Ca^{\cdot\cdot}]$ van 0,055 : 0,1 = 0,55 m.M. = **22 mgr. per L.**

In een soortgelijke vloeistof, waarin de [H] echter $0,45 . 10^{-7}$ en de $[HCO_3] = 0,02$ N. was, werd de $Ca\,C_2\,O_4$ nevel gevonden bij $[C_2O_4^{\cdot\cdot}] = 0,07$ mM. Dus:

$[Ca^{\cdot\cdot}]$ = 0.055 : 0.07 = 0,8 mM. = **32 mgr. per L.**

Berekend wordt $[Ca^{\cdot\cdot}] = 350 \frac{0,45 . 10^{-7}}{0,02}$ mM. = 0,75 mM. = = **30 mgr.** per L.

Bepaling van de calciumionen-concentratie in ultrafiltraat.

Menschenserum werd gedurende 2 uur in ultrafilters volgens DE WAARD [1]) gecentrifugeerd. Door het ultrafiltraat werd CO_2 geleid tot $[H] = 0,3 . 10^{-7}$ was. (Dit werd vastgesteld door de kleur van neutraalrood in het ultrafiltraat te vergelijken met neutraalrood in een phosfaatmengsel volgens SÖRENSEN, dat een $[H^{\cdot}] = 0,3 . 10^{-7}$ had).

Er ontstond een CaC_2O_4 neerslag bij een $[C_2O_4'']$ van 0.1 m.M. per L. Hieruit volgt een $[Ca^{\cdot\cdot}]$ van 0.55 m.M. of 22 mgr. $[Ca^{\cdot\cdot}]$ ionen per L., zooals dit ook door RONA en TAKAHASHI is waarschijnlijk gemaakt.

Tracht men deze metingen direct in serum toe te passen, dan gelukt dit lang niet altijd, doordat de CaC_2O_4 troebeling in serum veel minder duidelijk is en men gehinderd wordt door de normaal vaak voorkomende serumopalescentie.

De enkele malen dat wij in serum een duidelijk omslag punt

[1]) Arch. Néérl. de phys. 2 530 (1918).

kregen, werden dezelfde $Ca^{\cdot\cdot}$ ionen concentraties gevonden als die in ultrafiltraat. In het algemeen is het echter voor serumbepalingen noodig om ultrafiltraat te maken, wat met ultrafilters volgens De Waard zeer eenvoudig is.

Samenvatting.

Er wordt een eenvoudige methode beschreven, waarmede het mogelijk is de concentratie der $Ca^{\cdot\cdot}$ ionen te meten in een oplossing van een mengsel van zouten, b.v. in ultrafiltraat.

De methode berust op het volgende principe: Aan de $Ca^{\cdot\cdot}$ bevattende oplossing worden zooveel C_2O_4'' ionen toegevoegd dat het oplosbaarheidsproduct van $Ca_1C_2O_4$ juist bereikt is. Het oogenblik, waarop zooveel C_2O_4'' ionen zijn toegevoegd dat dit product juist is overschreden constateert men door het optreden van een fijnen nevel van CaC_2O_4. Het is onverschilling of in het zoutmengsel nog andere ionen voorkomen die met het oxalaat een neerslag kunnen geven. Het is alleen noodig dat het CaC_2O_4 de meest onoplosbare stof is die in de oplossing ontstaan kan.

De methode is nauwkeurig tot op 2—3 mgr. $Ca^{\cdot\cdot}$ per L. De waarde van het oplosbaarheidsproduct werd gecontroleerd door meting van het electrisch geleidingsvermogen der oplossing.

Het beginsel der methode kan eveneens voor andere ionen worden aangewend. De eenige eisch is, dat men beschikt over een reagens dat met het ion, waarvan de concentratie gemeten moet worden een zeer moeilijk oplosbaar zout geeft.

Physiologisch Laboratorium der
Rijksuniversiteit te Groningen.

September 1919.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN biedt een mededeeling aan van den Heer N. G. W. H. BEEGER over: „*Bepaling van het aantal klassen der idealen van alle deellichamen van het cirkellichaam der m-de-machts-wortels uit de eenheid, waarbij het getal m door meer dan één priemgetal deelbaar is*". II [1]).

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

Bewijs: We moeten van 't rechterlid weer twee dingen bewijzen: 1°. dat het symbool, dat er in voorkomt, een $\frac{f_1}{d'_1}$-de-machts-wortel uit de eenheid is en 2°. dat, in 't product, ieder zoo'n wortel uit de eenheid $\frac{e_1 d_1 d'_1}{r}$ malen voorkomt. Want als dit bewezen is, volgt er uit dat 't rechterlid gelijk is aan

$$\left(1 - \frac{1}{l_1^{\frac{f_1}{d'_1}s}}\right)^{\frac{e_1 d_1 d'_1}{r}}$$

welke uitdrukking, volgens theorema 7, gelijk is aan 't linkerlid der te bewijzen gelijkheid. De getallen e_1, f_1 enz. hebben hier dezelfde beteekenis als in genoemd theorema.

Volgens § 4, volgt datgene wat hier onder 1°. genoemd is, uit hetgeen in 't vorige theorema onder 1°. bewezen is.

Om de rest te bewijzen diene het volgende:

Nemen we aan dat:

$$\left[\frac{l_1}{b_{01}, b_{*1}, 0, b_{21} \ldots}\right] = \left[\frac{l_1}{b_{02}, b_{*2}, 0, b_{22} \ldots}\right],$$

Door de waarden der symbolen in te voeren, vindt men, omdat de verschillen der overeenkomstige elementen van twee stellen b's, weer een stel b's opleveren, dat dit laatste stel b's voldoet aan de congruenties:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)a_0 b_0 + 2\varphi\left(\frac{m}{2^{h_*} l_1^{h_1}}\right)a_* b_* + \varphi\left(\frac{m}{l_2^{h_2} l_1^{h_1}}\right)a_2 b_2 + \ldots \\ \equiv 0 \; mod \; \varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)\end{array}\right\} \quad (8)$$

[1]) Vervolg van „Verslagen" Deel XXVIII, blz. 293.

waarin $a_0, a_*, \ldots$ de exponenten voorstellen die in § 4 zijn bepaald. We moeten nu weten hoeveel stellen b's aan deze congruentie voldoen. Daartoe gaan we eerst na hoeveel der gegeven stelsels b's (§ 1, (1)) een b_{1n} bezitten die $= 0$ is. Alle b_{1n} zijn deelbaar door hun grootste gemeene deeler d_1. Er zijn dus $\frac{\varphi_1}{d_1}$ verschillende getallen b_{1n}, waarvan er maar één $= 0$ is. Daar er in 't geheel $\frac{\varphi}{r}$ stelsels zijn, zijn er $\frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi_1}{d_1}$ die een $b_{1n} = 0$ hebben.

Alle stelsels der getallen a, die de groep g vormen, voldoen, als we a_1 weglaten, aan alle congruenties (3) als men daarin $b_{1n} = 0$ stelt. De modulus van deze congruentie wordt dan $\frac{\varphi}{\varphi_1}$. Volgens de opmerking aan 't einde van hoofdstuk II § 3, is 't aantal verschillende stellen a's, wanneer men niet op a_1 let, dus gelijk aan

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} : \left(\frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi_1}{d_1}\right) = \frac{r}{d_1}.$$

We merken nu verder op dat de gezochte stellen b's die aan (8) voldoen, ook voldoen aan de $\frac{r}{d_1}$ congruenties, die men verkrijgt door $a_0, a_*, \ldots$ te vervangen door de verschillende stelsels a's waarvan 't aantal zoo juist is berekend. Bovendien voldoen de gezochte stelsels b's ook nog aan de $\frac{f_1}{d'_1}$ congruenties die men uit (8) verkrijgt door de daarin voorkomende a's te vervangen door hun 2-voud, 3-voud, ... $\frac{f_1}{d'_1}$-voud. Want volgens hoofdstuk II § 4, behooren deze stelsels niet tot de vorige stelsels omdat de $\frac{f_1}{d'_1}$ eerste machten van 't getal $l_1 + n\frac{m}{l_1^{h_1}}$ niet tot g behooren.

Door de groepen der beide genoemde stelsels van a's met elkaar te vermenigvuldigen, krijgt men een groep van $\frac{rf_1}{d_1 d'_1}$ stelsels die evenveel congruenties (8) geven waaraan de gezochte stelsels b's voldoen. Er zijn, volgens de opmerking aan 't einde van hoofdstuk 2 § 3, dus

$$\varphi\left(\frac{m}{l_1^{h_1}}\right) : \frac{rf_1}{d_1 d'_1} = \frac{e_1 d_1 d'_1}{r}$$

gezochte stelsels b's.

Hiermede is nu aangetoond, dat iedere $\frac{f_1}{d'_1}$-de-machts-wortel uit de eenheid, die in 't product van 't rechterlid der te bewijzen gelijkheid voorkomt, daarin $\frac{e_1 d_1 d'_1}{r}$ malen voorkomt.

Het aantal factoren van genoemd product is, zooals reeds berekend is, gelijk aan $\frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi_1}{d_1}$. En omdat nu $\frac{f_1}{d_1} \cdot \frac{e_1 d_1 d'_1}{r} = \frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi}{d_1}$, zal ook *iedere* $\frac{f_1}{d'_1}$-de-machts-wortel uit de eenheid $\frac{e_1 d_1 d'^1}{r}$ malen voorkomen. Hiermede is 't bewijs geleverd.

Theorema 11. Als m even is, is

$$\Pi_{\mathfrak{l}}\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l})^s}\right) = \Pi_n \left\{1 - \left[\frac{2}{\underbrace{b_{1n}, b_{2n}, \ldots}}\right] \frac{1}{2^s}\right\}$$

als in 't eerste product $\mathfrak{l}$ alle priemidealen doorloopt die in 2 opgaan in k. Het tweede product loopt over alle stellen der b's waarin $b_{0n} = b_{*n} = 0$ is.

Het bewijs is geheel in overeenstemming met de beide voorafgaande. Men toont eerst aan dat 't symbool een $\frac{f_*}{d'_*}$-de-machtswortel uit de eenheid is. Bij 't verdere gedeelte van 't bewijs is 't noodig 3 gevallen te onderscheiden: $h_* \geqslant 3$ en $b_{0n} + b_{*n}$ niet voor alle waarden van n even; $h_* \geqslant 3$ en $b_{0n} + b_{*n}$ wel voor alle waarden van n even; $h_* = 2$.

IV. *Berekening van 't aantal klassen der idealen van 't deellichaam k.*

§ 8. *Hulptheorema* [1]) *en afleiding voorloopige formule.*

1. $\sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n}{\sim}\right] = 0.$

Bewijs: Zij a relatief priem met m dan is $\left[\frac{a}{\sim}\right] \neq 0$ en $\neq 1$, dus

$$\left[\frac{a}{\sim}\right] \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n}{\sim}\right] = \sum_{u=1}^{m} \left[\frac{n\,a}{\sim}\right].$$

Omdat $n\,a$ tegelijk met n een volledig restsysteem (*mod m*) doorloopt,

[1]) Ter bekorting laat ik verder de getallen b in 't symbool weg.

is de laatste som weer gelijk aan $\sum_{n=1}^{m}\left[\underbrace{n}\right]$. Hieruit volgt gemakkelijk het bewijs.

Voor het aantal klassen H gebruiken we nu de bekende uitdrukking: [1]).

$$H = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{p})^{-s}}$$

waarbij $\mathfrak{p}$ alle priemidealen van 't deellichaam k doorloopt. Wanneer we nu de theorema's toepassen die in 't vorige hoofdstuk bewezen zijn en de factoren die betrekking hebben op 't stelsel waarbij alle b's $= 0$ zijn, afscheiden van de andere dan vinden we:

$$H = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} (s-1) \prod_{n=2}^{\varphi/r} \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p} \left\{ 1 - \left[\underbrace{\qquad p \qquad}_{b_{0n}, b_{*n}, b_{1n} \ldots}\right] \frac{1}{p^s} \right\}^{-1}.$$

Hierbij is aangenomen dat $b_{01} = b_{*1} = b_{11} = b_{21} = \ldots . = 0$.

Het tweede en derde product loopt over alle priemgetallen p. We weten dat

$$\lim_{s=1} (s-1) \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} = 1.$$

Verder ontwikkelen we iederen factor van het derde product op de bekende wijze in een reeks van Dirichlet en vermenigvuldigen al deze reeksen. Het resultaat is dan

$$H = \frac{1}{\varkappa} \lim_{s=1} \prod_{i=2}^{\varphi/r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\qquad n \qquad}_{b_{0i}, b_{*i}, b_{1i}, \ldots}\right] \frac{1}{n^s}$$

Wanneer men hierin substitueert

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-nx} . x^{s-1}\, dx$$

en men stelt

$$\sum_{t=1}^{m} \left[\underbrace{\quad t \quad}\right] x^t = F(x)$$

zoo vindt men, door gebruik te maken van de vergelijking $\left[\underbrace{\quad n \quad}\right] = \left[\underbrace{\quad n' \quad}\right]$ als $n \equiv n' \,(mod\, m)$:

$$H = \frac{1}{\varkappa} \prod_{n=2}^{\varphi/r} \int_0^1 \frac{F(x)}{x\,(1-x^m)}\, dx$$

als men zich bovendien bedient van 't, in 't begin dezer § bewezen

[1]) „H". Satz 55 en § 27.

hulptheorema. De integrand wordt gesplitst in rationale gebrokens. Als men daarna de integratie uitvoert, is 't resultaat

$$H = \frac{1}{\varkappa}\prod_{n=2}^{\varphi/r} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right)\left\{\log\frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{\frac{-k\pi i}{m}}}{i} + \tfrac{1}{2}\pi i - \frac{k\pi i}{m}\right\}.$$

Nu is nog

$$\sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{n}{\sim}\right] e^{\frac{2\pi kni}{m}} = \sum_{n=1}^{m}\left[\frac{n}{\sim}\right]\sum_{k=1}^{m} e^{\frac{2\pi nki}{m}} = 0$$

zoodat we krijgen:

$$H = \frac{1}{\varkappa}\prod_{n=2}^{\varphi/r} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)\left\{\log\frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{\frac{-k\pi i}{m}}}{i} - k\pi i\right\} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

Om dezen vorm verder te kunnen herleiden moeten we gebruik maken van vier hulptheorema's die ik thans eerst zal afleiden.

§ 9. *Hulptheorema's voor het herleiden van* (9) [1]).

Voor alle volgende hulptheorema's is het stelsel, waarbij alle b's $= 0$ zijn, uitgesloten.

1. $$F\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right) = (-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots} F\left(e^{-\frac{2k\pi i}{m}}\right).$$

Het bewijs komt op 't zelfde neer als dat van 't overeenkomstige theorema in mijn verhandeling Verslagen XXVII, blz. 561.

2. Zij $2^{h'_*}$ de hoogste macht van 2 die op b_{*n} deelbaar is, waarbij we $h'_* = h_* - 2$ nemen als $b_{*n} = 0$. Is echter ook $b_{0n} = 0$ dan nemen we $h'_* = h_*$. Als $h_* = 2$ is, dan is $h'_* = 0$ als $b_{0n} = 1$ is en $= 2$ als $b_{0n} = 0$.

Zij verder $l_1^{h'_1}$ de hoogste macht van l_1 die op b_{1n} deelbaar is, waarbij we $h'_1 = h_1$ nemen als $b_{1n} = 0$ is. Enz.

Zij $d = 2^{h_*'} l_1^{h_1'} \dots$ dan is $\left[\frac{n + m/d}{\sim}\right] = \left[\frac{n}{\sim}\right]$.

Bewijs:

Beschouwen we eerst

$$\left[\frac{n + m/d}{2^2}\right]^{b_{0n}} \quad \text{en} \quad \left[\frac{n}{2^2}\right]^{b_{0n}}.$$

Is $b_{0n} = 0$ dan zijn deze symbolen beide $= 1$, dus gelijk. Is $b_{0n} \neq 0$ en n even, dan is ook $n + \frac{m}{d}$ even, omdat dan m/d deelbaar

[1]) Deze hulptheorema's moeten, in anderen vorm, ook door Kummer gebruikt zijn. De bewijzen vindt men echter nergens.

is door 4. De symbolen zijn dan beide $=0$ en weer gelijk. Is, ten slotte, $b_{0n} \neq 0$ en n oneven, dan is ook $n + m/d$ oneven en

$$\left[\frac{n + m/d}{2^2}\right]^{b_{0n}} = (-1)^{\left(n + \frac{m}{d} - 1\right) b_{0n} : 2} = (-1)^{\frac{n-1}{2} b_{0n}} = \left[\frac{n}{2^2}\right]^{b_{0n}}$$

Wanneer men nu voor de andere symbolen op analoge wijze te werk gaat vindt men ook voor deze de gelijkheid.

3. Als d dezelfde beteekenis heeft als boven, dan is $F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right) = 0$ als de grootste gemeene deeler van k en $m \neq d$ is en

$$= \left[\underset{\sim}{k/d}\right]^{-1} F\left(e^{\frac{2\pi di}{m}}\right)$$

als die grootste gemeene deeler wel $= d$ is.

Bewijs:

$$F = \sum_{n=1}^{m} \left[\underset{\sim}{n}\right] e^{\frac{2\pi_n ki}{m}} = \sum_{n=1}^{m} \left[\underset{\sim}{n + m/d}\right] e^{\frac{2\pi nki}{m}} =$$

$$= e^{-\frac{2k\pi i}{d}} \sum_{n=1}^{m} \left[\underset{\sim}{n + m/d}\right] e^{\frac{2\pi(n+m/d)ki}{m}}$$

$n + m/d$ doorloopt tegelijk met n alle getallen waarvoor het symbool $\neq 0$ is, omdat door de definitie van d het getal m/d relatief priem is met de getallen die n doorloopt. Dus gaat 't bovenstaande over in

$$F = e^{\frac{2k\pi i}{d}} F$$

Als k niet door d deelbaar is, volgt hieruit $F = 0$.

Onderstellen we nu verder dat k wel door d deelbaar is, maar dat $k = dtv$, $m = dtm'$ zoodat dt de grootste gemeene deeler is van k en m, $t > 1$. Dan is

$$F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right) = F\left(e^{\frac{2\pi vi}{m'}}\right) = \sum_{n=1}^{m} \left[\underset{\sim}{n}\right] e^{\frac{2\pi vni}{m'}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{m'} e^{\frac{2\pi vni}{m'}} \sum_{s=1}^{dt} \left[\underset{\sim}{n + sm'}\right] \text{ en volgens 2}$$

$$= d \sum_{n=1}^{m'} e^{\frac{2\pi vni}{m'}} \sum_{s=0}^{t-1} \left[\underset{\sim}{n + sm'}\right].$$

We zullen nu aantoonen dat de laatste som $= 0$ is.

Zij x een getal van den vorm $1 + \frac{m'}{g} y$ (waarbij g de grootste gemeene deeler is van n en m') dat relatief priem is met m. Zoo'n getal bestaat want we weten dat bovengenoemde vorm oneindig veel priemgetallen bevat, als we y laten varieeren.

Nu is $nx = n\left(1 + \frac{m'}{g}y\right) = n + \frac{n}{g}ym'$ en als we een getal $n+sm'$ vermenigvuldigen met x dan komt er weer een getal van dezen vorm, zooals gemakkelijk is na te gaan. Stel dat verder

$$x\,(n+sm') \equiv x\,(n+s'm') \left(mod\,\frac{m}{d}\right); \quad s, s' < t$$

dan zou

$$x\,s\,m' \equiv x\,s'\,m'$$

$$x\,(s \quad s')\,m' \equiv 0 \quad \text{dus} \quad s - s' \equiv (mod\; t)$$

Dat kan niet, omdat s en $s' < t$ zijn. Hiermede is nu aangetoond dat de getallen $n + sm'$ waarbij $s = 0,1, \ldots . t-1$, na vermenigvuldiging met x $\left(mod\,\frac{m}{d}\right)$ weer diezelfde getallen opleveren.

Hieruit volgt:

$$\left[\frac{n}{\sim}\right] \sum_{s=0}^{t-1} \left[\frac{n+sm'}{\sim}\right] = \sum_{s=1}^{t=1} \left[\frac{x\,(n+sm')}{\sim}\right] = \sum_{s=1}^{t-1} \left[\frac{n+sm'}{\sim}\right]$$

Hieruit volgt gemakkelijk: $\sum_{s=1}^{t-1} \left[\frac{n+sm'}{\sim}\right] = 0.$

Om het tweede deel van 't theorema te bewijzen merken we op dat

$$F = \left[\frac{k/d}{\sim}\right]^{-1} \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n\,k/d}{\sim}\right] e^{\frac{2\pi nki}{m}}$$

als k en m het getal d tot grootste gemeene deeler hebben.

Het getal $\frac{k}{d}$ kan met m slechts die priemfactoren gemeen hebben, waarvan de bijbehoorende b's $= 0$ zijn. Want was bijv. $b_{1n} \neq 0$ dan is d deelbaar door een macht van l_1 die $< l_1^{h_1}$. Er volgt uit, dat $n\,k/d$ en n tegelijk alle getallen doorloopen waarvoor $\left[\frac{n\,k/d}{\sim}\right] \neq 0$ is. Zoodat

$$F = \left[\frac{k/d}{\sim}\right]^{-1} \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n}{\sim}\right] e^{\frac{2\pi ndi}{m}} = \left[\frac{k/d}{\sim}\right]^{-1} F\left(e^{\frac{2\pi di}{m}}\right)$$

4. In dezelfde onderstelling omtrent d is

$$F'\left(e^{\frac{2\pi di}{m}}\right) F\left(e^{\frac{2\pi di}{m}}\right) = (-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots} dm$$

waarbij F' beteekent dat in de functie F de getallen b resp. vervangen zijn door $2-b_{0n}$, $\frac{1}{2}\varphi_* - b_{*n}$, $\varphi_1 - b_{1n}$, ...

Bewijs: We beschouwen eerst het geval dat geen der getallen b gelijk is aan nul.

$$F = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n\,k}{\quad}\right] e^{\frac{2\pi nkdi}{m}}$$

als k onderling ondeelbaar is met m want dan doorloopt nk tegelijk met n een volledig restsysteem $(mod\, m)$. Er volgt uit:

$$\left[\frac{k}{\quad}\right]^{-1} F = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n}{\quad}\right] e^{\frac{2\pi nkdi}{m}}$$

Beide leden vermenigvuldigen we met $e^{\frac{2\pi kdi}{m}}$ en sommeeren dan over alle waarden van k die $< m$ en relatief priem met m zijn. Omdat geen der getallen $b = 0$ is, vindt men dan

$$F\ F' = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{n}{\quad}\right] \sum_{k} e^{\frac{2\pi(n+1)kdi}{m}} = d \sum_{n=1}^{m/d} \left[\frac{n}{\quad}\right] \sum_{k} e^{\frac{2\pi(n+1)kdi}{m}}$$

Zij t de grootste gemeene deeler van $n+1$ en m.

Men kan alle getallen k die $< m$ en relatief priem met m zijn, $(mod\, m/d)$ verdeelen in $\dfrac{\varphi(m)}{\varphi\left(\dfrac{m}{dt}\right)}$ maal de groep der getallen die $< \dfrac{m}{dt}$ en relatief priem met $\dfrac{m}{dt}$ zijn. Zoo vindt men

$$F . F' = d \sum_{n=1}^{m/d} \left[\frac{n}{\quad}\right] \frac{\varphi(m)}{\varphi\left(\dfrac{m}{dt}\right)} \sum_{k} e^{\frac{2\pi(n+1)ki}{m/d}}$$

waarbij k nu alle getallen doorloopt, die $< \dfrac{m}{dt}$ en onderling ondeelbaar met dat getal zijn. De laatste som is dus de som der primitieve $\dfrac{m}{dt}$-de-machts-wortels uit de eenheid, zoodat we krijgen:

$$F\ F' = d\,\varphi(m) \sum_{n} \left[\frac{n}{\quad}\right] \frac{\mu\left(\dfrac{m}{dt}\right)}{\varphi\left(\dfrac{m}{dt}\right)} .$$

Daar $\mu\left(\dfrac{m}{dt}\right)$ slechts dan $\neq 0$ is als $\dfrac{m}{dt}$ door geen kwadraat deelbaar is, behoeven we slechts met die waarden van n rekening te houden waarvoor $\dfrac{m}{dt}$ gelijk is aan een deeler van $2\, l_1\, l_2 \ldots .$ Die getallen n zijn van den vorm $-1 + st$ waarbij s alle getallen doorloopt, die $< \dfrac{m}{dt}$ en relatief priem ermee, voorzoover deze getallen

$-1+st$ tenminste onderling ondeelbaar zijn met m. Stellen we daarom

$$\frac{m}{dt}=2^a\, l_1^{a_1}\ldots\,;\quad a, a_1, \ldots = 0 \quad \text{of} \quad 1$$

dan is

$$t=2^{h_*-h_*'-a}\, l_1^{h_1-h_1'-a_1}\ldots$$

We maken voorloopig de volgende onderstelling: t is door alle priemfactoren van m deelbaar en ook door 8. Dan zijn dus de exponenten, die in bovenstaanden vorm voor t, voorkomen, grooter dan nul.

Alle getallen $-1+st$ waarbij s bovengenoemde waarden doorloopt, zijn nu ook relatief priem met m. In bovenstaande som komen dus $\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)$ termen voor die $\neq 0$ zijn. We schrijven die som in den volgenden vorm:

$$F\,F'=(-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots}\, d\varphi(m) \sum_t \frac{\mu\left(\frac{m}{dt}\right)}{\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)} \sum_s \left[\frac{1-st}{\sim\!\sim}\right].$$

Nu is $\left[\frac{1-st}{2^2}\right]=1$ omdat $t=8$-voud.

$$\left[\frac{1-st}{2^{h_*}}\right]^{b_{*n}}=e^{\frac{2\pi\, b_*' v_* i}{2^a}} \qquad \text{want} \quad 1-st\equiv\pm 5^{s'}\ (mod\ 2^{h_*})$$

dus

$$1\equiv\pm 5^{s'}\ (mod\ 2^{h_*-h_*'-a})$$

en daar de macht van 2, die in den modulus voorkomt, $>2^2$ is, volgt er uit: $s'=2^{h_*-h'_*-a-2}\, v_*$. Het getal v_* is oneven want anders zou s deelbaar zijn door 2 en dat kan niet omdat t de grootste gemeene deeler van $n+1$ en m is, en m even is. Verder is

$$\left[\frac{1-st}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}=e^{\frac{2\pi b'_{1n} v_1}{l_1^{a_1}}}$$

enz. Uit dit alles volgt nu dat $\left[\frac{1-st}{\sim\!\sim}\right]=$ primitieve $\frac{m}{dt}$-de-machts-wortel uit de eenheid. Dus $\sum_s \left[\frac{1-st}{\sim\!\sim}\right]=$ de som der primitieve $\frac{m}{dt}$-de-machts-wortels uit de eenheid $=\mu\left(\frac{m}{dt}\right)$. We krijgen nu dus

$$F\,F'=(-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots}\, d\varphi(m) \sum_t \frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{dt}\right)}$$

waarbij t alle deelers van $2 l_1 l_2 \ldots$ doorloopt. Men vindt gemakkelijk dat φ maal de laatste som gelijk is aan m, waarmede dan in ons bijzondere geval 't theorema bewezen is.

Om aan te geven hoe 't bewijs wordt, voor 't geval dat niet aan alle der laatst gemaakte onderstellingen voldaan is, nemen we het geval dat $h_1 - h'_1 - a_1 = 0$ en $a_1 = 1$, terwijl aan alle andere der vroeger gemaakte onderstellingen wel voldaan is. We krijgen dus $h'_1 = h_1 - 1$. In de som $\Sigma \left[\frac{1-st}{}\right]$ moet nu s niet meer alle getallen doorloopen die $< \frac{m}{dt}$ zijn en relatief priem daarmee, want omdat t niet door l_1 deelbaar is, kan $1-st$ wel voor sommige waarden van s, door l_1 deelbaar zijn. Is $1 - zt \equiv 0 \ (mod\, l_1)$ dan voldoen de getallen z, $z + l_1, \ldots z + \left(\frac{m}{dt l_1} - 1\right) l_1$ aan deze congruentie. Van deze getallen zijn er $\varphi\left(\frac{m}{dt l_1}\right)$ onderling ondeelbaar met $\frac{m}{dt}$. Er blijven dus in de som nog

$$\varphi\left(\frac{m}{dt}\right) - \varphi\left(\frac{m}{dt l_1}\right) = (l_1 - 2)\, \varphi\left(\frac{m}{dt l_1}\right)$$

getallen $1-st$ over, die symbolen opleveren welke $\neq 0$ zijn.

Voor die waarden van s is evenals vroeger

$$\left[\frac{1-st}{2^2}\right]^{b_{0n}} = 1\, ; \left[\frac{1-st}{2^{h_*}}\right]^{b_{*n}} = e^{\frac{2\pi b'_{*n} v_*}{2^{a}}}\, ; \left[\frac{1-st}{l_2^{h_2}}\right] = e^{\frac{2\pi b'_{2n} v_2}{l_2^{a_2}}} \ldots$$

Maar verder is $\left[\frac{1-st}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}} = \left[\frac{1-st+l_1}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}$

De getallen $1-st$, die in de som voorkomen, kunnen we $(mod\, l_1)$ verdeelen in $\varphi\left(\frac{m}{dt l_1}\right)$ maal een groep getallen die $< l_1$ zijn. Deze laatste groep bevat $l_1 - 2$ termen. Onder deze komt het getal 0 niet voor, evenmin als 1, want geen der getallen $1-st$ is door l_1 deelbaar en t is niet door l_1 deelbaar en ook s niet omdat s relatief priem is met $\frac{m}{dt}$ en dit getal is wel door l_1 deelbaar. We nemen nu de termen, die gelijke waarden van $\left[\frac{1-st}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}$ opleveren, bij elkaar. Volgens het voorgaande wordt deze waarde dan vermenigvuldigd met de som der primitieve $\frac{m}{dt l_1}$-de-machts-wortels uit 1. Dus

$$\Sigma\left[\frac{1-st}{\sim\!\sim}\right]=\mu\left(\frac{m}{dt\,l_1}\right)\times\sum_{u=2}^{l_1}\left[\frac{n}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}.$$

Volgens 't eerste hulptheorema van dit hoofdstuk is de laatste som $= -1$, want we krijgen:

$$0=\sum_{u=1}^{l_1^{h_1}}\left[\frac{n}{\sim\!\sim}\right]=(l_1^{h_1-1}-1)\sum_{n=1}^{l_1}\left[\frac{n}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}$$

omdat, daar b_{1n} door $l_1^{h_1-1}$ deelbaar is:

$$\left[\frac{n}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}=\left[\frac{n'}{l_1^{h_1}}\right]^{b_{1n}}\quad \text{als}\quad n\equiv n'\ (mod\ l_1)$$

Ten slotte is nu $\Sigma\left[\frac{1-st}{\sim\!\sim}\right]=-1\,.\,\mu\left(\frac{m}{dt\,l_1}\right)=\mu\left(\frac{m}{dt}\right)$.

Verder wordt het bewijs weer als in 't vorige geval. Hiermede is voldoende aangegeven hoe 't bewijs worden zal als men nog meer der vroeger gemaakte beperkingen opheft. Maar we zullen nog nagaan hoe 't bewijs wordt wanneer één of meer der getallen $b=0$ zijn.

Nemen we weer als voorbeeld $b_{1n}=0$. In de som F zijn nu alle termen waarvoor n onderling ondeelbaar is met $\frac{m}{l_1^{h_1}}$, ongelijk nul. En verder is $\left[\frac{n}{\sim\!\sim}\right]=\left[\frac{n'}{\sim\!\sim}\right]$ als $n\equiv n'\left(mod\ \frac{m}{l_1^{h_1}}\right)$. Bovendien kan men alle getallen die $<m$ zijn en relatief priem daarmee, $\left(mod\ \frac{m}{l_1^{h_1}}\right)$ verdeelen in $l_1^{h_1}\times$ de groep der getallen die $<\frac{m}{l_1^{h_1}}$ en relatief priem met $\frac{m}{l_1^{h_1}}$. Dus

$$F=\sum_n\left[\frac{n}{\sim\!\sim}\right]\left(e^{\frac{2\pi n di}{m}}+e^{\frac{2\pi\left(n+\frac{m}{l_1^{h_1}}\right)di}{m}}+\dots\right)$$

Omdat d deelbaar is door $l_1^{h_1}$, volgt hieruit

$$F=l_1^{h_1}\sum_n\left[\frac{n}{\sim\!\sim}\right]e^{\frac{2\pi n di}{m}}=l_1^{h_1}F_1\left(e^{\frac{2\pi n di}{m}}\right)$$

als F_1 dezelfde functie is als F wanneer men in plaats van m het getal $\frac{m}{l_1^{h_1}}$ neemt. Voor deze functie F_1 is reeds bewezen:

$$F\,F'=l_1^{h_1}F_1\,.\,l_1^{h_1}F_1'=l_1^{2h_1}F_1\,F_1'=$$

$$=(-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots}\,l_1^{2h_1}\frac{d}{l_1^{h_1}}\cdot\frac{m}{l_1^{h_1}}=(-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots}dm.$$

§ 10. *Theorema's over de realiteit van 't deellichaam k en bepaling van 't getal $\varkappa$.*

Als voor al de waarden van n de som $b_{0n} + b_{1n} + \ldots.$ even is, dan is 't deellichaam k reëel en anders imaginair.

Bewijs: Het voortbrengend getal van k is

$$\eta = Z^{A^{(1)}} + Z^{A^{(2)}} + \ldots. + Z^{A^{(r)}} \text{ [1]}$$

als $A^{(i)}$ ieder getal van de ondergroep g beteekent.

Nu is

$$A^{(i)} \equiv A_0^{a_{0i}} A_*^{a_{*i}} A_1^{a_{1i}} \ldots. (mod\, m)$$

waarbij de exponenten aan alle congruenties (3) voldoen. Omdat alle sommen $b_{0n} + b_{1n} + \ldots.$ even zijn, wordt aan die congruenties ook voldaan door $a_0 = 1$; $a_* = 0$; $a_1 = \frac{1}{2}\varphi_1$; ....

Maar dan is ook

$$a_{0i} + 1, a_{*i}, a_{1i} + \tfrac{1}{2}\varphi_1, \ldots.$$

een oplossing der congruenties (3). Verder is

$$A_0^{a_{0i}+1} A_*^{a_{*i}} A_1^{a_{1i}+\frac{1}{2}\varphi_1} \ldots. \equiv - A^{(i)} \, (mod\, m)$$

De getallen $A^{(i)}$ en $-A^{(i)}$ zijn $(mod\, m)$ verschillend, want was

$$A^{(i)} \equiv - A^{(i)} \, (mod\, m)$$

dan zou

$$2\, A^{(i)} \equiv 0 \, (mod\, m)$$

zijn. Dat kan niet want $A^{(i)}$ is, als getal van g, relatief priem met m.

Hiermede is nu aangetoond dat de getallen $A^{(i)}$ van g in paren kunnen worden gerangschikt. Voor zoo'n paar is $Z^{A^{(i)}} + Z^{-A^{(i)}} =$ reëel getal. Hieruit volgt dat η reëel is.

Het bewijs van 't tweede deel is als volgt: Alle reëele getallen van 't cirkellichaam K blijven onveranderd voor de substitutie $(Z : Z^{-1}) = s$. Want zij zoo'n getal

$$\Omega = a_0 + a_1 Z + \ldots.$$

dan is

$$a_1 \sin \frac{2\pi}{m} + a_2 \frac{\sin 4\pi}{m} + \ldots. = 0$$

en

$$s\,\Omega = a_0 + a_1 Z^{-1} + \ldots. \quad = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{m} + \ldots.$$

zoodat

$$\Omega - s\,\Omega = 0.$$

Omgekeerd: Als een getal onveranderd blijft voor de substitutie s dan is 't een reëel getal.

Hieruit volgt nu dat ieder reëel deellichaam van K een deellichaam

[1] „W.", p. 85.

is van 't deellichaam dat bij de groep s, s' behoort en dat een lichaam, dat bij een groep behoort, die niet de substitutie s bevat, imaginair is. Als nu niet alle sommen $b_{0n}+b_{1n}+\ldots$ even zijn, dan voldoet het stelsel $a_0=1$; $a_*=0$; $a_1=\frac{1}{2}\varphi_1\ldots\ldots$ niet aan de congruenties (3), waaruit volgt dat de groep g niet de substitutie s bevat. 't Lichaam is dus imaginair.

Theorema: Als niet alle stellen b's een even som $b_{0n}+b_{1n}+\ldots\ldots$ hebben, dan is 't aantal stellen waarbij deze som oneven is, gelijk aan $\frac{\varphi}{2r}$.

Bewijs: Alle stellen b's waarbij de genoemde som even is, vormen blijkbaar een groep, omdat de moduli $2, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ even zijn. Om uit deze groep de groep van alle stellen b's te krijgen, moet de eerstgenoemde groep vermenigvuldigd worden met een groep die op de identieke substitutie $b_{01}=0$, $b_{*1}=0, \ldots\ldots$ na, alleen uit stelsels b's bestaat, waarvoor de som oneven is. Waren er in deze laatste groep twee stellen met oneven som dan zou er ook in voorkomen het stelsel dat door optelling dezer twee verkregen wordt en dat weer een even som zou hebben. Dat kan dus niet. Hieruit volgt dat de bedoelde groep slechts één stel b's bevatten kan met oneven som $b_{0n}+b_{1n}+\ldots\ldots$ Deze groep is dus van den graad 2. Daaruit volgt dat er $\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi}{r}$ stelsels b's zijn met even en dus evenveel met oneven som.

Bepaling van 't getal $\varkappa$ [1]).

1°. Als 't lichaam reëel is, dan is $w=2$ want de eenige reëele wortels uit de eenheid zijn ± 1. Omdat 't lichaam een lichaam van Galois is, zoodat de geconjugeerden weer met 't lichaam zelf identiek zijn, is $r_2=0$ en $r_1=\frac{\varphi}{r}$.

2°. Is 't lichaam imaginair dan is, om dezelfde reden als boven: $r_1=0$ $r_2=\frac{\varphi}{2r}$. Nu moet nog het getal w bepaald worden.

Zij $w_0=1$ als alle getallen $a_0=0$ zijn en anders $w_0=0$.

Zij 2^{w_*} de hoogste macht van 2 die op alle getallen a_* deelbaar is en $w_*=h_*-2$ als alle getallen $a_*=0$ zijn. $u_*=0$ als niet alle getallen a_* door 2 deelbaar zijn en ook $=0$ als niet alle $a_0=0$ zijn; $u_*=1$ als alle $a_0=0$ zijn en alle a_* deelbaar door 2.

Zij $l_1^{w_1}$ de hoogste macht van l_1 die op alle getallen a_1 deelbaar

---

[1]) „H.", p. 229.

is terwijl $w_1 = h_1 - 1$ als alle $a_1 = 0$ zijn. $u_1 = 0$ als niet alle getallen a_1 door $l_1 - 1$ deelbaar zijn en $u_1 = 1$ als wel alle getallen a_1 door $l_1 - 1$ deelbaar zijn enz.

Dan is

$$\text{als } h_* \geqq 3 \text{ is} : w = 2^{w_0 + w_* u_* + 1} l_1^{u_1(w_1+1)} \ldots .$$

$$\text{als } h_* = 2 \text{ is} : w = 2^{w_0+1} l_1^{u_1(w_1+1)} \ldots .$$

$$\text{als } h_* = 0 \text{ is} : w = 2 l_1^{u_1(w_1+1)} \ldots$$

Bewijs: Het deellichaam k kan slechts die wortels uit de eenheid bevatten, die machten van Z zijn, omdat K slechts deze bevat. Alleen als m oneven is, bevat K ook de machten van Z met het negatieve teeken voorzien. Stel nu dat Z^a in k voorkomt, dan blijft dit getal onveranderd voor alle substituties van g. Dus als we alle getallen van g $A^{(i)}$ noemen, dan is

$$Z^{aA^{(i)}} = Z^a$$

waaruit volgt:

$$a\,(A^{(i)} - 1) \equiv (mod\ m) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Omgekeerd: als aan deze congruentie voldaan is, voor alle getallen $A^{(i)}$ van g dan bevat 't lichaam k de wortel uit de eenheid Z^a.

Als nu alle getallen $a_0 = 0$ zijn, dan bevat 't lichaam de getallen $\pm i$.

Bewijs: Voor ieder getal $A^{(i)}$ geldt nu

$$A^{(i)} \equiv 5^{a_*} \,(mod\ 2^{h_*}) \quad \text{dus} \quad A^{(i)} \equiv 1 \,(mod\ 4).$$

Volgens voorgaande komt in 't lichaam dus voor, 't getal $Z^{\frac{m}{4}} = i$. Dus ook $-i$.

Als alle getallen $a_* = 0$ zijn en ook alle $a_0 = 0$ dan bevat 't lichaam $e^{\frac{2\pi i}{2^{h_*}}}$. Bewijs dito. Als alle getallen $a_0 = 0$ zijn en alle getallen a_* hoogstens deelbaar zijn door 2^{w_*} dan bevat 't lichaam 't getal $e^{\frac{2\pi i}{2^{h_* + 2}}}$. Enz.

Men bewijst dit alles met behulp van (10).

Wanneer men nu nog bedenkt dat, als in 't lichaam voorkomt $e^{\frac{2\pi i}{l_1^{w_1+1}}}$, er ook de $l_1^{w_1+1}$ eerste machten hiervan in 't lichaam voorkomen, dan vindt men de opgegeven formules.

§ 11. *Afleiding van de definitieve uitdrukking van het klassenaantal.*

Theorema: Als voor ieder stel b's de som $b_{0n} + b_{1n} + \ldots$ even is, dus als 't lichaam k reëel is, dan geldt voor het aantal klassen H de uitdrukking:

$$H = \frac{\prod\limits_{n=2}^{\varphi/r} \sum\limits_{s=1}^{<\frac{m}{2}} \left[\overbrace{b_{0n}, b_{*n}, b_{1n} \ldots}^{s} \right] \log A_s}{R}$$

waarbij $A_s = \sqrt{(1-Z^s)(1-Z^{-s})}$

R = de regulator,

terwijl is ondersteld dat $b_{01} = b_{*1} = b_{11} = \ldots = 0$.

Is $h_* = 2$ dan is b_{*n} er niet en is $h_* = 0$ dan is ook b_{0n} er niet.

Als niet voor ieder stel b's de som $b_{0n} + b_{1n} + \ldots$ even is, dus als 't lichaam k imaginair is, dan geldt voor het aantal klassen de uitdrukking:

$$H = \frac{w \prod\limits_{n} \sum\limits_{s=1}^{m} \left[\overbrace{b_{0n}, b_{*n}, b_{1n}, \ldots}^{s} \right] s}{(2m)^{\varphi/2r}} \cdot \frac{\prod\limits_{n} \sum\limits_{s=1}^{<\frac{m}{2}} \left[\overbrace{b_{0n}, b_{*n}, b_{1n}, \ldots}^{s} \right] \log A_s}{R'}$$

Hierbij is w het in § 10 bepaalde getal. 't Eerste product loopt over alle waarden van n waarvoor $b_{0n} + b_{1n} + \ldots$ oneven is; 't tweede product over alle waarden van n waarvoor $b_{0n} + b_{1n} + \ldots$ even is.

$A_s = \sqrt{(1-Z^s)(1-Z^{-s})}$ en R' is de determinant van de logarithmen van een stelsel reëele fundamentale eenheden. Is $h_* = 2$ dan is b_{*n} er niet en is $h_* = 0$ dan is ook b_{0n} er niet.

Bewijs: We leiden eerst de eerste uitdrukking af en gebruiken daartoe (9).

Vervangt men in de som, welke in (9) voorkomt, de letter k door $m-k$ en gebruikt het eerste hulptheorema van § 9 dan vindt men $\Sigma F . \frac{k\pi i}{m} = 0$.

Er blijft dus over:

$$H = \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=2}^{\varphi/r} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right) \log A_k$$

als

$$A_k = \frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{-\frac{k\pi i}{m}}}{i} = ie^{-\frac{k\pi i}{m}}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right) =$$

$$= -ie^{\frac{k\pi i}{m}}\left(1 - e^{-\frac{2k\pi i}{m}}\right) = \sqrt{\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2k\pi i}{m}}\right)}$$

De nu verkregen uitkomst voor H herleiden we met behulp van het 3de en 4de hulptheorema van § 9. Volgens 't derde blijven van de som alleen die termen over, voor welke het getal k met m tot

grootste gemeene deeler heeft het getal d dat we verder door d_n zullen aanduiden. We krijgen dus, voor de som:

$$F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right)\sum_k\left[\frac{k/d}{\sim\sim}\right]^{-1}\log A_k$$

Zij nu $k = k'd_n$ dan is

$$A_k = A_{k'} \cdot A_{k'+\frac{m}{d_n}} \ldots\ldots A_{k'+(d_n-1)\frac{m}{d_n}}$$

zooals gemakkelijk is na te gaan. De som gaat over in:

$$F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right)\sum_k\left[\frac{k/d_n}{\sim\sim}\right]^{-1}(\log A_{k'} + \log A_{k'+\frac{m}{d_n}} + \ldots.)$$

Gebruiken we nu 't 2[de] hulptheorema van § 9 dan gaat deze som over in

$$F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right)\sum_{s=1}^{m}\left[\frac{s}{\sim\sim}\right]^{-1}\log A_s \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

want omdat k' en m/d_n relatief priem zijn en in de voorlaatste uitdrukking k alle getallen doorloopt die met m het getal d_n tot grootste gemeene deeler hebben, krijgt men een som waarin s alle getallen doorloopt $< m$ en die met m relatief priem zijn of nog deelbaar door die priemfactoren van m waarvan de betreffende b's gelijk aan nul zijn. Dus s doorloopt dan alle getallen waarvoor $\left[\frac{s}{\sim\sim}\right] \neq 0$ is.

In de formule voor H komt nu het product

$$\prod_{n=2}^{\varphi/r} F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

te voorschijn, waarvan de waarde wordt berekend met 't vierde hulptheorema van § 9. Omdat in een groep, bij iedere substitutie, ook de reciproke substitutie voorkomt, zal hier bij ieder stel $b_{0n}, b_{*n}, \ldots$ ook voorkomen 't stel $2-b_{0n}, \frac{1}{2}\varphi_*-b_{*n}, \ldots$ Zijn deze twee stellen verschillend dan is volgens 't vierde hulptheorema het product der bijbehoorende F en $F' = d_n m$. Zijn ze echter gelijk, dan is, eveneens volgens dat theorema, de bijbehoorende F gelijk aan $\pm\sqrt{d_n m}$. Hieruit volgt dat het product (12) gelijk is aan

$$m^{\frac{\varphi}{2r}-1}\prod_{n=2}^{m}\sqrt{d_n}$$

op het teeken na.

Alvorens dit product nader te bepalen, herleiden we eerst de som die in (11) voorkomt. Ten eerste kunnen we de exponent -1

weglaten, omdat, zooals reeds is opgemerkt, bij ieder stel b's ook voorkomt $2-b_{0n}$ enz. Verder is

$$\sum_{s=1}^{m}\left[\frac{s}{\sim\sim}\right] log\, A_s = \sum_{s=1}^{<\frac{m}{2}} + \sum_{s=1}^{<\frac{m}{2}}\left[\frac{m-s}{\sim\sim}\right] log\, A_{m-s}$$

Want als m oneven is, is dit duidelijk omdat $\left[\frac{m}{\sim\sim}\right]=0$ is. Is echter m even dan is steeds $\left[\frac{m/2}{\sim\sim}\right]=0$ omdat m door 4 deelbaar is. Als we nu gebruik maken van de betrekking

$$\left[\frac{-s}{\sim\sim}\right]=(-1)^{b_{0n}+b_{1n}+\cdots}\left[\frac{s}{\sim\sim}\right]$$

en opmerken dat $A_{m-s}=A_s$, dan vinden we voor de som die herleid is:

$$2\sum_{s=1}^{<m:2}\left[\frac{s}{\sim\sim}\right] log\, A_s$$

Als we dit nu invoeren en ook de waarde van $\varkappa$ invoeren dan blijft nog het product van alle getallen d_n te berekenen. Daar dit voor 't tweede deel van 't theorema ook moet geschieden zullen we het uitstellen totdat we zoover gekomen zijn. Door voor 't grondgetal de waarde te gebruiken die in § 6 is gevonden, krijgt men dan na eenige herleiding de verlangde uitkomst.

Afleiding van de tweede uitdrukking.

Het product dat in (9) voorkomt, ontbinden we in twee producten, waarvan het eerste loopt over de waarden van n waarvoor de som $b_{0n}+b_{1n}+\ldots\ldots$ oneven is, terwijl het tweede loopt over alle waarden van n waarvoor deze som even is. Het laatste product wordt op dezelfde manier herleid als in 't eerste deel van 't bewijs. In 't eerste product krijgen we, door toepassing van 't eerste hulptheorema van § 9, als we het getal k in (9) vervangen door $m-k$:

$$\sum_{k=1}^{m} F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right) log\, A_k = 0.$$

Er blijft van de som die in (9) voorkomt, dus over:

$$-\frac{\pi i}{m}\sum_{k=1}^{m} k\, F\left(e^{\frac{2\pi ki}{m}}\right).$$

Volgens 't 3[de] hulptheorema wordt dit:

$$=-\frac{\pi i}{m}F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right)\sum_k k\left[\frac{k/d}{\sim\sim}\right]^{-1} = -\frac{\pi\, di}{m}F\,.\sum_k \frac{k}{d}\left[\frac{k/d}{\sim\sim}\right]^{-1}$$

waarbij k alle getallen doorloopt, die met m het getal d_n tot grootste gemeene deeler hebben.

Verder is, als $k = k'd_n$; $d = d_n$;:

$$d_n \sum_k \frac{k}{d}\left[\frac{k/d}{\smile}\right]^{-1} = \sum_k k'\left[\frac{k'}{\smile}\right]^{-1} + \sum_{k'}(k' + m/d)\left[\frac{k' + m/d}{\smile}\right]^{-1} + \ldots \sum(k' + (d-1)\,m/d)\left[\frac{k' + (d-1)\,m/d}{\smile}\right]^{-1}$$

omdat

$$\sum\left[\frac{k'}{\smile}\right]^{-1} + \sum\left[\frac{k' + m/d}{\smile}\right]^{-1} + \ldots = \sum_s\left[\frac{s}{\smile}\right] = 0$$

volgens 1ste hulptheorema van § 8. We vinden dus de uitkomst

$$-\frac{\pi i}{m} F\left(e^{\frac{2\pi d_n i}{m}}\right)\sum_{s=1}^{m}\left[\frac{s}{\smile}\right]^{-1} s$$

waarbij de exponent —1 mag worden weggelaten omdat, als de som der b's oneven is, ook die van $2-b_{0n}$ enz. oneven is.

't Blijkt nu dat in (9) weer te voorschijn komt het product $\sqrt{\Pi_{n=2} d_n}$ als we de factoren F in paren bijeen nemen, en ze volgens 't 4de hulpth. van § 9 herleiden. Hierbij treden dan machten van i op, die ook bij de verdere herleiding nog te voorschijn komen, maar we kunnen deze buiten beschouwing laten omdat het getal H natuurlijk een positief geheel getal is.

§ 12. *Bepaling van 't product* $\prod_{n=2}^{\varphi/r} d_n$.

We berekenen daartoe afzonderlijk de macht van 2 die in dit product voorkomt en de macht van l_1. Er zijn $\frac{1}{2}\varphi_*$ verschillende getallen b_{*n}, omdat de groep primair is. Ieder dezer getallen komt dus in alle stellen b's $\frac{\varphi}{r} : \frac{1}{2}\varphi_*$ malen voor. Nu zijn van de verschillende getallen b_{*n}

2^{h_*-4} getallen juist door 2 deelbaar
2^{h_*-5} „ „ „ 2^2 „
. . . .
2^0 „ „ „ 2^{h_*-3} „
1 „ „ „ 2^{h_*-2} „

Een eenvoudige berekening geeft voor de macht van 2:

$$2^{(2^{h_*-2}-1)\frac{2\varphi}{\varphi_* r}-(h_*-2)}$$

als men bedenkt dat het stelsel $b_{0n} = b_{*n} = \ldots\ldots = 0$ niet moet worden meegeteld.

Nu moet echter nog rekening gehouden worden met de gevallen waarin b_{0n} en b_{*n} beide $= 0$ zijn. Voor ieder zoo'n geval moet bovenstaande macht van 2 nog met 2^2 worden vermenigvuldigd. Er zijn $\frac{\varphi}{2r}$ stelsels waarin $b_{0n} = 0$. De stelsels waarin $b_{0n} = b_{*n} = 0$ vormen een ondergroep van de groep van alle stelsels. De stelsels b's waarvan $b_* = 0$ vormen ook een groep. Het is duidelijk dat de eerstgenoemde groep weer een ondergroep is van de laatste of aan de laatste gelijk is. Is zij een ondergroep dan verkrijgt men daaruit de groep van de stelsels waarin $b_{*n} = 0$, door deze ondergroep te vermenigvuldigen met de groep die bestaat uit de stelsels

$$0,\ 0,\ 0, \ldots .$$
$$1,\ 0,\ 0, \ldots .$$

Hiernit volgt dat juist de helft van alle stelsels waarbij $b_{*n} = 0$, stelsels zijn waarin $b_{0n} = 0$ en $b_{*n} = 0$. Dit is dus zoo, als niet steeds tegelijk $b_{0n} = b_{*n} = 0$. Als echter $b_{0n} + b_{*n}$ voor alle waarden van n even is, dan is steeds $b_{0n} = b_{*n} = 0$.

Men vindt nu gemakkelijk dat bovenstaande macht van 2 nog moet vermenigvuldigd worden met

$$2^{2\left(\frac{(t+1)\varphi}{\varphi_* r} - 1\right)}$$

waarbij het getal t dezelfde beteekenis heeft als in § 6 theorema 8.

Bepalen we nu de macht van l_1 die in het product opgaat.

Als d_1 de grootste gemeene deeler is van alle getallen b_{1n} dan zijn er $\frac{\varphi_1}{d_1}$ verschillende getallen b_{1n}. Ieder dezer komt in alle stellen b's dus $\frac{\varphi}{r} : \frac{\varphi_1}{d_1}$ malen voor. Omdat de groep primair is, is d_1 niet door l_1 deelbaar en, als $h_1 = 1$ is, niet door $l_1 - 1$. De getallen b_{1n} die door l_1 deelbaar zijn, zijn dus

$$d_1 l_1\,,\ 2\, d_1 l_1\,, \ldots .\ \frac{l_1 - 1}{d_1} .\ d_1 l_1^{h_1 - 1}$$

Hiervan zijn

$\frac{(l_1 - 1)^2}{d_1} l_1^{h_1 - 3}$ getallen juist door l_1 deelbaar.

$\frac{(l_1 - 1)^2}{d_1} l_1^{h_1 - 4}$ „ „ „ l_1^2 „

. . . .

$\frac{l_1 - 1}{d_1} - 1$ getallen juist door $l_1^{h_1 - 1}$ deelbaar.

Denkt men om de combinatie waarbij alle b's $= 0$ zijn, niet mede te tellen dan vindt men in 't product van alle d_n een macht van l_1 die gelijk is aan

$$l_1^{\left(\frac{l^{h_1-1}-1}{d_1}\right)\frac{\varphi d_1}{\varphi_1 r}-h_1}$$

Is nu D het grondgetal dat in § 6 bepaald is, dan vindt men, na een eenvoudige berekening voor alle gevallen:

$$\sqrt{D}\,.\prod_{n=2}^{\varphi/r} d_n = m^{\frac{\varphi}{2r}-\frac{1}{2}}.$$

In den noemer staat nu nog de regulator R. Als we een stel reëele grondeenheden nemen, dan is

$$\log \eta_i^{(k)} = \tfrac{1}{2}\, l_k(\eta_i) \quad [1]$$

omdat de geconjugeerde lichamen reëel zijn. Als we dit in R invoeren en de factoren 2 uit den determinant verwijderen, ontstaat het gewenschte resultaat.

---

[1] „H." p. 215. In de formule boven aan bl. 376 noemt Hilbert het getal R den regulator. Dat is niet in overeenstemming met zijn definitie op blz. 221.

Plantkunde. — De Heer WENT biedt een mededeeling aan van den Heer H. W. BERINSOHN: „*De invloed van licht op de vermenigvuldiging der wortelcellen van Allium Cepa*".

(Mede aangeboden door den Heer VAN RIJNBERK).

Door Mevr. DROOGLEVER FORTUYN—VAN LEYDEN [1]) is gevonden dat bij jonge katten een periodiciteit in de vermenigvuldiging der cellen bestaat dusdanig, dat 's nachts een maximum aantal kerndeelingen bereikt wordt en des daags een minimum. Evenzoo is door KARSTEN [2]) geconstateerd dat in de groeikegels van Zeamais een periodieke kerndeeling optreedt, waarbij het maximum ook in den nacht valt. In de wortels van Vicia Faba echter vond hij geen periodiciteit, zoodat hij besluit: „Das Wurzelwachstum entbehrt der Periodizität." Bij deze proeven bleven de planten steeds in het duister. Nu trachtte hij door belichting invloed uit te oefenen op de periodiciteit in de jonge spruiten, hetgeen hem gelukte. Daarentegen heeft hij niet nagegaan den invloed van licht en duister op de celvermeerdering in de wortels. Daar de wortelgroei toch blijkbaar geen periodieke is, zal hier de invloed van licht en duisternis het duidelijkst op den voorgrond moeten treden.

Als studiemateriaal koos ik Allium Cepa omdat de Alliumcellen zich goed fixeeren en kleuren laten; omdat men in de worteltopjes zeer veel kerndeelingen aantreft en omdat het aantal worteltjes groot is, zoodat men dan onderzoekt deelen van éénzelfde individu.

Aan een kiemenden ui, welke in daglicht stond, werden 's ochtends om 8 uur, om 11 uur en 's middags om 3 uur eenige worteltopjes ontnomen. Daarna plaatste ik denzelfden ui in het donker en liet hem staan tot den volgenden dag, waarna ik, terwijl de ui in het donker bleef, om 6 uur 's ochtends en om 12 uur en $6^1/_2$ uur 's middags eenige topjes nam. Gedurende deze beide dagen verschilde de temperatuur $^1/_2$° C. (opgenomen met maximum en minimum thermometer.)

Ik droeg zorg steeds worteltopjes te nemen kleiner dan 25 mM. en van ongeveer gelijke lengte. De worteltopjes werden gefixeerd

[1]) Mevr. DROOGLEVER FORTUYN—VAN LEYDEN. Verslagen Konink. Akad. Amst. 1915—1916, blz. 1658.

[2]) KARSTEN. Zeitschr. f. Botanik 1915, bldz. 1.

in sublimaat keukenzout, dan tot paraffine gebracht, ingesloten en in seriën gesneden ter dikte van 10μ en de coupes werden gekleurd volgens HEIDENHAIN's ijzerhaematoxyline methode. Van deze coupes werd van eenige, over een lengte van 1 mM. van het topje af, het aantal kernen geteld en vastgesteld het aantal kerndeelingsfiguren. Ik telde steeds centrale coupes. Tabel I en II geven mijn resultaten.

TABEL I (bij daglicht).

Tijd.	Tot. aant. getelde kernen.	Tot. aant. mitosen.	Spireem en losse chrom.	Monaster.	Diaster.	Twee kernen.
8 v.m.	4000	—	—	—	—	—
11 v.m.	4345	139	53	53	17	16
3 n.m.	2290	47	26	14	5	2

TABEL II (in het donker).

Tijd.	Tot. aant. getelde kernen.	Tot. aant. mitosen.	Spireem en losse chrom.	Monaster.	Diaster.	Twee kernen.
6 v.m.	4702	210	125	66	19	0
12 n.m.	4204	180	147	21	20	4
6½ n.m.	4043	124	65	29	10	20

Ten einde deze resultaten te kunnen vergelijken heb ik in onderstaande tabellen de uitkomsten uitgedrukt in procenten. KARSTEN neemt het gemiddelde uit zijn tellingen. Het schijnt mij echter nauwkeuriger deze feiten in procenten uit te drukken, zooals ook Mevr. DROOGLEVER FORTUYN—VAN LEYDEN doet, daar toch KARSTEN naar alle waarschijnlijkheid niet steeds hetzelfde aantal cellen heeft onderzocht.

TABEL III (bij daglicht).

Tijd.	Tot. aant. getelde kernen.	Tot. aant. mitosen.	Spireem en losse chrom.	Monaster.	Diaster.	Twee kernen.
8 v.m.	4000	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %
11 v.m.	4345	3.19 „	1.01 „	1.01 „	0.38 „	0.37 „
3 n.m.	2290	2.05 „	1.13 „	0.61 „	0,21 „	0.08 „

TABEL IV (in het donker).

Tijd.	Tot. aant. getelde kernen.	Tot. aant. mitosen.	Spireem en losse chrom.	Monaster.	Diaster.	Twee jonge kernen.
6 v.m.	4702	4.46 %	3.19 %	1.4 %	0.4 %	0.00 %
12 n.m.	4204	4.28 „	3.49 „	0.49 „	0.48 „	0.09 „
6½ n.m.	4043	3.06 „	1.60 „	0.71 „	0.24 „	0.49 „

Zooals men ziet bereikt overdag het aantal kerndeelingen zijn maximum tusschen 8 en 11 uur (zonnetijd), hetgeen overeenkomt met het bekende feit dat men goede kerndeelingen bij Hyacinth en Allium ziet tusschen 10 en 11 uur voormiddags. Vanaf elf uur daalt het aantal kerndeelingen tot 2.05 % 's middags om 3 uur.

Bij den ui in het donker vond ik 's ochtends om 6 uur het grootste aantal kerndeelingen, 4.46 %. Dit was om 12 uur 's middags slechts weinig gedaald 4.28 % en om 6½ uur 's avonds was de daling nog iets grooter. Het totaal aantal kerndeelingen overtrof echter om 6 uur 's ochtends en om 12 uur 's middags het maximaal aantal kerndeelingen geconstateerd bij daglicht, terwijl het minimum in het donker slechts weinig minder was dan het maximum bij daglicht, zoodat de conclusie wel gerechtvaardigd schijnt: In het donker neemt bij Allium in den wortel het aantal kerndeelingen toe, hetgeen KARSTEN [1]) ook bij Spirogyra en andere planten geconstateerd heeft.

Vergelijken wij in beide tabellen III en IV het aantal spireem, losse chromosomen stadia met het aantal monaster stadia, dan zien wij in de eerste tabel van elf op drie uur een toename van het aantal spireem en losse chromosoom stadia en een afname van de monaster stadia. Dit zou wijzen op een toename in het aantal kerndeelingen en niettemin is het totaal aantal mitosen verminderd. Doen wij ditzelfde voor tabel IV dan zien wij van 6 op 12 uur iets dergelijks gebeuren. Beschouwen wij nu spireem, losse chromosomen en monaster als één stadium (prophase) dan blijkt in de derde tabel om 11 uur 2.02 % en om 3 uur 1.74 % in dit stadium te verkeeren, hetgeen dus op een vermindering wijst. Ditzelfde geldt voor tabel IV. Om 6 uur verkeert 4.59 %, om 12 uur 3.98 % en om 6½ uur 2.31 % in prophase, dus er is een totaal afname. Dit feit lijkt mij een bevestiging van de algemeene opvatting spireem, losse chromosomen en monaster als een stadium op te vatten [2]).

[1]) KARSTEN. Zeitschr. f. Botanik 1918.

[2]) PEKELHARING. Weefselleer, bldz. 67.

Het lijkt mij ook mogelijk om uit dergelijke gegevens als in tabel III en IV vervat zijn, iets naders te weten te komen betreffende de overgangssnelheid van prophase naar anaphase en van anaphase naar telophase. Beschouwen wij daartoe tabel III. Om 11 uur verkeerden 2.02 °/₀ in prophase en 0.38 °/₀ in anaphase. Het aantal kerndeelingsfiguren in prophase is om drie uur verminderd met 13.8 °/₀ en het aantal kerndeelingen in anaphase is verminderd met 44.7 °/₀, dus sterker verminderd; dat wil dus zeggen de overgang van anaphase naar telophase geschiedt sneller dan de overgang van prophase naar anaphase. Dit geldt ook voor den ui in het donker voor heel den dag, maar gedurende den dag heeft er een omkeering plaats dusdanig dat van 6 tot 12 uur de overgang van prophase naar anaphase sneller gaat dan van anaphase naar telophase.

Natuurlijk zijn deze gegevens te weinig talrijk om dergelijke verstrekkende conclusies te trekken, maar doel van deze berekening was alleen maar te doen zien dat het mogelijk is de relatieve snelheden te leeren kennen. Wil men dergelijke onderzoekingen doen dan is het in de eerste plaats noodzakelijk de waarnemingstijden veel korter te kiezen, bijvoorbeeld één of anderhalf uur. Het is ook mogelijk uit dergelijke tabellen den duur van een kerndeeling te bepalen. Beschouwen wij tabel 1 dan vinden wij om 8 uur geen kerndeelingen en om 11 uur vonden wij 16 kernen in telophase. De kerndeeling zou dus bij Allium Cepa ongeveer drie à vier uur duren. JOLLY vond bij Triton den duur van de kerndeeling in de roode bloedlichaampjes bij 20° C. ongeveer 2½ uur. Uit de tabel van Mevr. DROOGLEVER FORTUYN—VAN LEYDEN meen ik den duur van een kerndeeling bij de kat te mogen schatten op twaalf uur, daar om 2½ n.m. ± 0.23 °/₀ kernen in prophase verkeerden en geen telophasen geconstateerd werden. Eerst te 2½ v.m. werd voor het eerst 0.20 °/₀ kernen in telophase gezien.

Vatten wij nu onze resultaten te zamen, dan zien wij dus; dat in het donker de worteltoppen van den ui meer kerndeelingen vertoonen dan in het licht. Blijkbaar oefent licht een remmende werking uit. Verder is het waarschijnlijk dat de overgang van prophase naar anaphase langzamer plaats heeft dan de overgang van anaphase naar telophase.

Door gebrek aan tijd kon ik deze feiten niet nader controleeren. Hiervoor zou toch noodig zijn een onderzoek naar de dagelijksche schommelingen in het aantal kerndeelingen bij den ui, waarbij zoo mogelijk de waarnemingstijden zoo lang mogelijk (drie à vier dagen) moeten zijn. Tegelijkertijd zou men bovenstaand onderzoek moeten herhalen. Voor deze beide onderzoekingen kan men met één ui volstaan. Men snijdt dan den bol in tweeën en gebruikt een helft

voor de eerste proefreeks en de andere helft voor de tweede proef. De twee proefreeksen zijn dan uitgevoerd met deelen van éénzelfde individu. Dit laatste heeft noch Mevr. DROOGLEVER FORTUYN—VAN LEYDEN noch KARSTEN gedaan, waardoor de resultaten veel aan zuiverheid verliezen.

Niettegenstaande de onvolledigheid van mijn onderzoek schijnen mij de gevonden feiten belangrijk genoeg om nader onderzocht te worden, waarom ik dan ook deze mededeeling doe. Tevens zij het mij vergund hier den heer M. W. WOERDEMAN te danken zoowel voor de aansporing tot dit onderzoek als voor de vriendelijke hulp mij hierbij verleend.

Histologisch Laboratorium, Amsterdam.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. A. SCHOUTEN en D. J. STRUIK: „*Over n-voudig orthogonale stelsels van n—1-dimensionale uitgebreidheden in een algemeene uitgebreidheid van n afmetingen.*"

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

II.

7. *De stelling van* DUPIN *en een omkeering*. Uit het theorema I volgt, dat de stelling van DUPIN ook voor een algemeene uitgebreidheid geldig is:

De V_{n-1} van een n-voudig orthogonaal stelsel snijden elkaar volgens de kromtelijnen.

Deze stelling laat de volgende omkeering toe:

Wanneer $n-1$ onderling orthogonale V_{n-1}-stelsels, bepaald door de daarop loodrechte congruenties $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{n-1}$, elkaar snijden volgens een congruentie $\mathbf{i}_n$, en de volgorde der eerstgenoemde congruenties zoodanig kan worden gekozen, dat de congruentie $\mathbf{i}_n$ in iedere $V_{n-k+1} \perp \mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{k-1}$ een congruentie is van kromtelijnen voor de V_{n-k}, die doorsnede is van deze V_{n-k+1} met de $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, dan is $\mathbf{i}_n$ loodrecht op een V_{n-1}-stelsel, orthogonaal op de $n-1$ gegeven stelsels en $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ zijn de congruenties der kromtelijnen voor elk der n stelsels.

Bewijs. Indien de fundamentaaltensor $'\mathbf{g}$ van de V_n geschreven wordt:

$$'\mathbf{g} = \mathbf{a}\,\mathbf{a} = \mathbf{b}\,\mathbf{b} = \ldots, \qquad (72)$$

dan is de ideale factor $\mathbf{a}$ als volgt te splitsen:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}'', \qquad (73)$$

waarin $\mathbf{a}'$ alleen $\mathbf{i}_k, \ldots, \mathbf{i}_n$, $\mathbf{a}''$ alleen $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{k-1}$ bevat.

$'\mathbf{g}' = \mathbf{a}'\mathbf{a}' = \mathbf{b}'\mathbf{b}' = \ldots$ is de fundamentaaltensor der $V_{n-k+1} \perp \mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{k-1}$ en de geodetische differentiatie van een vektor $\mathbf{v}$, geheel in die V_{n-k+1} gelegen, is bepaald door de vergelijking:

$$\nabla' \mathrm{v} = {'\mathbf{g}'} \overset{1}{\cdot} \nabla (\mathrm{a}' \,.\, \mathrm{v})\, \mathrm{a}' \qquad (74)$$

Voor $\mathbf{i}_k$ geldt dus:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla \mathrm{i}_k = \mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla (\mathrm{i}_k \cdot \mathrm{a})\, \mathrm{a} = \mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla (\mathrm{i}_k \cdot \mathrm{a}')\, \mathrm{a}' + \mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla (\mathrm{i}_k \cdot \mathrm{a}')\, \mathrm{a}'' = \\ = \mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla' \mathrm{i}_k + \mathrm{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla (\mathrm{i}_k \cdot \mathrm{a}')\, \mathrm{a}''. \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Volgens onderstelling is nu $\mathbf{i}_n$ een congruentie van kromtelijnen voor de V_{n-k}, die in de beschouwde $V_{n-k+1} \perp \mathrm{i}_k$ zijn, zoodat volgens (38):

$$\varkappa\, \mathrm{i}_n \overset{1}{.}\, \nabla' \mathrm{i}_k = \varrho_k\, \mathrm{i}_n\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

waarin ϱ_k een nog onbekende coefficient is. Uit (77) volgt dus:

$$\varkappa\, \mathrm{i}_n \overset{1}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_k = \varrho_k\, \mathrm{i}_n + \sum_j^{1,\ldots,k-1} \mu_{kj}\, \mathrm{i}_j\,, \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

waarin μ_{kj} nog onbekende coefficienten zijn. Ondersteld wordt dus, dat het mogelijk moet zijn $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{n-1}$ aldus te rangschikken, dat tegelijkertijd voldaan wordt aan (77) voor alle waarden $k = 1, \ldots, n-1$. Daar

$$\mathrm{i}_k \cdot \mathrm{i}_l = 0, \qquad k, l = 1, \ldots, n, \qquad k \neq l \quad \ldots \quad (78)$$

volgt door toepassing van $\mathbf{i}_n \,.\, \nabla$:

$$\mathrm{i}_l\, \mathrm{i}_n \overset{2}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_k = -\, \mathrm{i}_k\, \mathrm{i}_n \overset{2}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Voor $k < l$ volgt dus uit (77), (78) en (79):

$$\mathrm{i}_k\, \mathrm{i}_n \overset{1}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_l = 0, \qquad l = 1, \ldots, n-1 \quad \ldots \quad (80)$$

zoodat

$$\mu_{kj} = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} k = 1, \ldots, n-1 \\ j = 1, \ldots, n-2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

De vergelijkingen (77) gaan daardoor over in:

$$\varkappa\, \mathrm{i}_n \overset{1}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_k = \varrho_k\, \mathrm{i}_n\,, \qquad k = 1, \ldots, n-1 \quad \ldots \quad (82)$$

hetgeen meetkundig wil zeggen, dat $\mathbf{i}_n$ in elk der $n-1$ gegeven V_{n-1}-stelsels een congruentie van kromtelijnen is. Door toepassing van $\mathbf{i}_k \,.\, \nabla$ volgt uit (78):

$$\mathrm{i}_l\, \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_n = -\, \mathrm{i}_n\, \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_l, \quad k, l = 1, \ldots, n-1. \quad . \quad (83)$$

Nu is $\mathbf{i}_l$ V_{n-1}-normaal, dus $\nabla \mathbf{i}_l$ symmetrisch in k en n, zoodat uit (80) en (83) volgt:

$$\mathrm{i}_l\, \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_n = 0, \qquad k, l = 1, \ldots, n-1, \quad \ldots \quad (84)$$

$\mathbf{i}_n$ is dus V_{n-1}-normaal en $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{n-1}$ zijn de congruenties der kromtelijnen der $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$.

Daar $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{n-1}$ V_{n-1}-normaal zijn en onderling loodrecht, is bovendien volgens (67):

$$\mathrm{i}_j\, \mathrm{i}_k \overset{2}{.}\, \nabla\, \mathrm{i}_l = 0 \qquad j, k, l = 1, \ldots, n-1. \quad \ldots \quad (85)$$

zoodat $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ de congruenties der kromtelijnen zijn voor elk der n stelsels $\perp \mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$.

Voor een V_3 luidt de bewezen stelling:

Wanneer twee onderling orthogonale oppervlakkenstelsels elkaar snijden volgens een congruentie van krommen, die de kromtelijnen zijn van een der oppervlakkenstelsels, dan bestaat er een oppervlakkenstelsel,

orthogonaal op de twee gegeven stelsels en de drie stelsels snijden elkaar volgens hunne kromtelijnen.

Voor de R_3 is deze stelling het eerst afgeleid door DARBOUX [1]).

8. *De voorwaarden van* LILIENTHAL. De bedoeling is thans, verband te leggen tusschen verschillende vormen, waarin in het geval, dat $\mathbf{i}_n$ V_{n-1}-normaal is, de voorwaarden in de literatuur voorkomen, en te onderzoeken, in hoeverre zij geldig blijven, wanneer men algemeenere uitgebreidheden ten grondslag legt.

Evenals ${}^2\mathbf{h}$ krijgt de tensor ${}^2\mathbf{p}$, zoo $\mathbf{i}_n$ V_{n-1}-normaal wordt, een eenvoudige beteekenis. Daar volgens (19) en (42):

$$\nabla \smile \mathbf{i}_n = -\frac{\varkappa}{2} \sum_{\lambda\mu} \{(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, g^{\lambda\mu}\}\, \mathbf{e}'_\lambda\, \mathbf{e}'_\mu + \mathbf{i}_n \smile \mathbf{u}_n, \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

is het kontravariante $\alpha\beta$-kental van $\varkappa(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, \nabla \smile \mathbf{i}_n$:

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa\, \mathbf{e}_\beta\, \mathbf{e}_\alpha \overset{2}{\cdot} (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)(\nabla \smile \mathbf{i}_n) = -\tfrac{1}{2}\, \mathbf{e}_\beta\, \mathbf{e}_\alpha \overset{2}{\cdot} \sum_{\lambda\mu} [\mathbf{e}'_\lambda\, \mathbf{e}'_\mu\, (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{\lambda\mu} + \\
&\qquad + \{(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, \mathbf{e}'_\lambda\, \mathbf{e}'_\mu\}\, (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, g^{\lambda\mu}] + \mathbf{e}_\beta\, \mathbf{e}_\alpha \overset{2}{\cdot} \mathbf{u}_n\, \mathbf{u}_n = \\
&= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{\alpha\beta} + \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha \overset{2}{\cdot} \sum_{\lambda\mu} \{(\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{2}{\cdot} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu\, (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, \mathbf{e}'_\lambda \mathbf{e}'_\mu\} + \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha \overset{2}{\cdot} \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n = \\
&= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{\alpha\beta} - \sum_{\lambda\mu} (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{2}{\cdot} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu \{\mathbf{e}'_\lambda \mathbf{e}'_\mu \overset{2}{\cdot} (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha\} + \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha \overset{2}{\cdot} \mathbf{u}_u \mathbf{u}_n = \\
&= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2 g^{\alpha\beta} + \sum_{\lambda\mu} (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{2}{\cdot} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu \{\mathbf{e}'_\lambda \mathbf{e}'_\mu \overset{2}{\cdot} ((\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta (\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{e}_\alpha)\} + \\
&\qquad + \mathbf{e}_\beta\, \mathbf{e}_\alpha \overset{2}{\cdot} \mathbf{u}_n\, \mathbf{u}_n = \\
&= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{\alpha\beta} + \sum_{\mu} \mathbf{e}_\alpha \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{e}_\mu\, \mathbf{e}'_\mu \overset{1}{\cdot} (\nabla\, \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{e}_\beta + \\
&\qquad + \sum_{\lambda} \mathbf{e}_\beta \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{e}_\lambda\, \mathbf{e}'_\lambda \overset{1}{\cdot} (\nabla\, \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{e}_\alpha + \\
&+ \mathbf{e}_\alpha \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n\, \mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} (\nabla\, \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\beta \overset{1}{\cdot} (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} (\nabla\, \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{e}_\alpha = \\
&\qquad = -\tfrac{1}{2}(\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{\alpha\beta} + 2\, \mathbf{e}_\alpha\, \mathbf{e}_\beta \overset{2}{\cdot} T(\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{i}_n,
\end{aligned}\right\} . (87)$$

waaruit in verband met (59) volgt:

$${}^2\mathbf{p} = -\frac{\varkappa}{2}\, \mathbf{e}'_\alpha\, \mathbf{e}'_\beta\, (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{\alpha\beta} = \mathbf{e}'_\alpha\, \mathbf{e}'_\beta\, (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, h^{\alpha\beta} \quad . \quad . \quad (88)$$

Voor $n=3$ kan men dus de voorwaarde, dat ${}^2\mathbf{h}$ en ${}^2\mathbf{p}$ dezelfde hoofdrichtingen hebben, in coördinaten schrijven:

$$\begin{vmatrix} g^{aa} & g^{ab} & g^{bb} \\ (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, g^{aa} & (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, g^{ab} & (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)\, g^{bb} \\ (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{aa} & (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{ab} & (\mathbf{i}_n \,.\, \nabla)^2\, g^{bb} \end{vmatrix} = 0, \qquad (C_2)$$

[1]) G. DARBOUX, Sur les surfaces orthogonales. Annales sc. de l'Ecole Normale 3 (66) 97—141, bldz. 110.

en dit is juist de vergelijking, die het eerst voor de R_3 is aangegeven door LILIENTHAL [1]), en waarop voor kort nog eens, eveneens voor de R_3, de aandacht werd gevestigd door WIERINGA [2]). Deze voorwaarde is dus een speciaal geval van de eerste van RICCI. Verder geldt zij voor een willekeurig lijnelement, en ook, hoewel niet meer als eenige voorwaarde, voor $n > 3$.

7. *De voorwaarden van* RICCI. Is $\mathbf{i}_n$ weer V_{n-1}-normaal, dan kan men een grondvariabele y^n invoeren en vektoren $\mathbf{s}_n$ en $\mathbf{s}'_n$, zoodat

$$\mathbf{i}_n = \sigma_n \mathbf{s}_n = \frac{1}{\sigma_n} \mathbf{s}_n' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (89)$$

Uit (C) en (D) (blz. 210) kan dan $\mathbf{i}_n$ verwijderd worden en vervangen door $\mathbf{s}_n$.

Daar:

$$(\mathbf{i}_n . \nabla)(\nabla \smile \mathbf{i}_n) = (\mathbf{i}_n . \nabla)\{\sigma_n \nabla \mathbf{s}_n + \tfrac{1}{2}(\nabla \sigma_n)\mathbf{s}_n + \tfrac{1}{2}\mathbf{s}_n \nabla \sigma_n\}, . \quad (90)$$

is:

$$\left.\begin{aligned} \overset{4}{\mathbf{g}}_n \overset{2}{\cdot} (\mathbf{i}_n . \nabla)(\nabla \smile \mathbf{i}_n) = \overset{4}{\mathbf{g}}_n \overset{2}{\cdot} \{(\mathbf{i}_n . \nabla \sigma_n)\nabla \mathbf{s}_n + \sigma_n \mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla\nabla \mathbf{s}_n + \\ + \tfrac{1}{2}(\nabla \sigma_n)\mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{s}_n + \tfrac{1}{2}(\mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{s}_n)\nabla \sigma_n\}, \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

of daar:

$$\nabla \sigma_n = \nabla (\varkappa \mathbf{s}_n . \mathbf{s}_n)^{-\frac{1}{2}} = -\varkappa \sigma_n^3 (\nabla \mathbf{s}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{s}_n = -\sigma_n \mathbf{u}_n + \varkappa \sigma_n \mathbf{s}_n \overset{1}{\cdot} (\nabla \sigma_n) \mathbf{s}_n, \quad (92)$$

ook:

$$\overset{4}{\mathbf{g}}_n \overset{2}{\cdot} (\mathbf{i}_n . \nabla)(\nabla \smile \mathbf{i}_n) = \overset{4}{\mathbf{g}}_n \overset{2}{\cdot} \{(\mathbf{i}_n . \nabla \sigma_n)\nabla \mathbf{s}_n + \sigma_n^2 \mathbf{s}_n \overset{1}{\cdot} \nabla\nabla \mathbf{s}_n - \varkappa \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n\}. \quad (93)$$

Daar uit (31) en (69) volgt:

$$\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \{2 \varkappa T (\nabla \smile \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_n\} = \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n, \quad . \; . \; . \quad (94)$$

verkrijgt voorwaarde (C^1) (blz. 209) den vorm:

$$(C_3) \quad \boxed{\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \{\varkappa \sigma_n^2 \mathbf{s}_n \overset{1}{\cdot} \nabla\nabla \mathbf{s}_n - 2\, \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n\} = 0}\;^{3)}, \quad \begin{matrix} j \neq k \\ j, k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{matrix}$$

Daar:

$$\nabla \mathbf{s}_n = \frac{1}{\sigma_n} \nabla \mathbf{i}_n + \left(\nabla \frac{1}{\sigma_n}\right) \mathbf{i}_n, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (95)$$

is verder, in verband met (30) en (33):

$$\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{s}_n = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (96)$$

waaruit door toepassing van $(\mathbf{i} . \nabla)$ volgt:

$$\frac{1}{\sigma_n}(\mathbf{i}_l \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_j) \overset{1}{\cdot} (\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_k + \frac{1}{\sigma_n}(\mathbf{i}_l \overset{1}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_k) \overset{1}{\cdot} (\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_j + \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} \nabla\nabla \mathbf{s}_n = 0. \quad (97)$$

---

[1]) R. v. LILIENTHAL, Ueber die Bedingung, unter der eine Flächenschar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört. Math. Annalen 44 (94), 449–457.

[2]) W. G. L. WIERINGA, Over drievoudig orthogonale oppervlakkensystemen. Diss. Groningen, (18) 59 bldz., zie bldz. 13.

[3]) Zie noot [1]) op de volgende bladzijde.

Daar $(\nabla \mathbf{i}_n) \cdot \mathbf{i}_k$ volgens (38) alleen $\mathbf{i}_k$ en $\mathbf{i}_n$ bevat, volgt hieruit in verband met (67):

$$(D_1) \quad \boxed{\mathbf{i}_j \, \mathbf{i}_k \, \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} \nabla\nabla \, \mathbf{s}_n = 0}, \; j \neq k, \; j \neq l, \; k \neq l, \; j, k, l = 1, 2, \ldots, n-1. \text{[1]}$$

De vergelijking (D_1) kan gesplitst worden in:

$$\boxed{\mathbf{i}_j \, \mathbf{i}_k \, \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} (\nabla \smile \nabla) \, \mathbf{s}_n = 0}, \quad \ldots \ldots \quad (D'_1)$$

of:

$$\mathbf{i}_j \, \mathbf{i}_k \, \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} (\nabla \smile \nabla) \, \nabla y^n = 0, \quad \ldots \ldots \quad (98)$$

en:

$$\mathbf{i}_j \, \mathbf{i}_k \, \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} (\nabla \frown \nabla) \, \mathbf{s}_n = 0. \quad \ldots \ldots \quad (99)$$

Zoo $\overset{4}{\mathbf{K}}$ de RIEMANN-CHRISTOFFEL'sche affinor van V_n is, kan men (99) schrijven: [2])

$$\mathbf{i}_j \, \mathbf{i}_k \, \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{1}{\cdot} \nabla y^n = 0, \quad \ldots \ldots \quad (100)$$

of

$$\boxed{\mathbf{i}_j \, \mathbf{i}_k \, \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n = 0.} \quad \ldots \ldots \quad (D_1'')$$

De vergelijkingen (C_3), (D_1), (D'_1) en (100) komen bij RICCI voor. [3])
Het aantal vergelijkingen (D'_1) is $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, het aantal vergelijkingen (D'') is $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$, omdat behalve j en k ook k en l verwisseld mogen worden [4]). (D'_1) bevat derde, (D''_1) slechts eerste differentiaalquotienten van y^n.

De voorwaarden (D''_1) verdwijnen identiek, wanneer de $lkjn$-kentallen van $\overset{4}{\mathbf{K}}$ verdwijnen. Daar in een ruimte van konstante RIEMANN'sche kromming K_0:

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = 2\, K_0 \, (\mathbf{a} \frown \mathbf{b}) \, (\mathbf{a} \frown \mathbf{b}) \text{ [5])} \quad \ldots \ldots \quad (101)$$

is:

$$\mathbf{i}_n \, \mathbf{i}_l \, \mathbf{i}_k \, \mathbf{i}_j \overset{4}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (102)$$

zoodat in een ruimte van konstante RIEMANN'sche kromming, in het bijzonder in een euklidische ruimte, de voorwaarde (D''_1) identiek

---

[1]) (C_3) kan ook op analoge wijze als (D_1) uit (84) worden afgeleid.

[2]) Verg. A. R. bldz. 59.

[3]) G. RICCI, Dei sistemi etc., bldz. 314. De vergelijkingen (C_3) en (D_1) komen hier voor als (A_1) en (B_1). G. RICCI, Sui sistemi, bldz. 151.

[4]) Vergelijk de opmerkingen van RICCI naar aanleiding van een verhandeling van DRACH, Comptes Rendus 125 (97) 598—601 en 810—811.

[5]) Verg. bijv. BIANCHI-LUKAT, 1e druk, bldz. 574.

vervuld is. Hier reduceert (D_1) zich dus tot (D'_1). Voor de euklidische ruimte is de voorwaarde (D'_1) gegeven door Darboux [1] [2]). De $lkjn$-kentallen van $\overset{4}{\mathbf{K}}$ verdwijnen oòk, wanneer de $V_{n-1} \perp \mathrm{i}_n$ geodetisch zijn.

8. *De voorwaarden van* Lévy, Cayley en Darboux. Door differentieeren van de betrekking:

$$\mathrm{i}_n = \sigma_n \mathrm{s}_n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (103)$$

ontstaat:

$$\nabla \mathrm{i}_n = (\nabla \sigma_n) \mathrm{s}_n + \sigma_n \nabla \mathrm{s}_n \quad \ldots \ldots \quad (104)$$

Nogmaals differentiëeren geeft:

$$\nabla\nabla \mathrm{i}_n = (\nabla\nabla \sigma_n) \mathrm{s}_n + (\nabla \mathrm{s}_n) \overset{1}{.} \mathrm{a} (\nabla \sigma_n) \mathrm{a} + (\nabla \sigma_n) \nabla \mathrm{s}_n + \sigma_n \nabla\nabla \mathrm{s}_n, \quad (105)$$

en hieruit en uit (104) volgt voor $\nabla\nabla \sigma_n$:

$$\varkappa \nabla\nabla \sigma_n = \sigma_n (\nabla\nabla \mathrm{i}_n) \overset{1}{.} \mathrm{i}_n - \sigma_n^2 (\nabla\nabla \mathrm{s}_n) \overset{1}{.} \mathrm{i}_n + \frac{2\varkappa}{\sigma_n} (\nabla \sigma_n)(\nabla \sigma_n). \quad (106)$$

Daar nu:

$$(\nabla\nabla \mathrm{i}_n) \overset{1}{.} \mathrm{i}_n = \nabla \{(\nabla \mathrm{i}_n) \overset{1}{.} \mathrm{i}_n\} - (\nabla \mathrm{i}_n) \overset{1}{.} \mathrm{a} (\nabla \mathrm{i}_n) \overset{1}{.} \mathrm{a} = -{}^2\mathrm{h} \overset{1}{.} {}^2\mathrm{h} - (\mathrm{u}_n . \mathrm{u}_n) \mathrm{i}_n \mathrm{i}_n, (107)$$

is, in verband met (92):

$$\overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{.} \nabla\nabla \sigma_n = -\varkappa\sigma_n {}^2\mathrm{h} \overset{1}{.} {}^2\mathrm{h} - \varkappa\sigma_n^3 \overset{4}{\mathrm{g}}_n \overset{2}{.} (\nabla\nabla \mathrm{s}_n) \overset{1}{.} \mathrm{s}_n + 2 \sigma_n \mathrm{u}_n \mathrm{u}_n. \quad (108)$$

In verband met (C_3) geeft dit een nieuwen vorm voor de eerste voorwaarde:

---

[1]) G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coördinées curvilignes I (98), bldz. 130, form. (35).

[2]) Als een eenvoudig voorbeeld van de toepassing van (C_2) en (D'_1) voor een euklidische ruimte, kan men nemen het stelsel $u = Y_1(y^1) + \ldots + Y_n(y^n)$, waarin $y^1, \ldots, y^n$ Cartesische coördinaten zijn. Om $g^{\alpha_1\alpha_2}$ etc. uit te rekenen, is het noodig een stelsel van $n-1$ V_{n-1} te vinden, dat in de V_{n-1} $u = \text{const.}$ een stelsel coördinaten $\mathrm{e}_{\alpha_1} \ldots$ bepaalt. Dan is $\varkappa \mathrm{e}_{\alpha_1} . \mathrm{e}_{\alpha_1} = g^{\alpha_1\alpha_1}$, etc. Daarvoor moet men zoeken $n-1$ onafhankelijke oplossingen van de diff.vgl.

$$\sum_i^{1,\ldots,n} \frac{\partial u}{\partial y^i} \frac{\partial \psi}{\partial y^i} = 0, \quad \text{of} \quad \sum_i^{1,\ldots,n} Y_i\,(y^i) \frac{\partial \psi}{\partial y^i} = 0.$$

Voor de berekening vergelijke men bijv. Wieringa, Diss. bldz. 21 en volgende. Men ziet dan, dat de voorwaarde (D'_1) identiek is vervuld, zoodat alleen de voorwaarde van Lilienthal (C_2) overblijft die in dit geval geschreven kan worden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y_i'' & Y_l'' & Y_k'' \\ Y_i' Y_i''' - 2\, Y_i''^2 & Y_l' Y_l''' - 2\, Y_l''^2 & Y_k' Y_k''' - 2\, Y_k''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

of $Y_i' Y_i''' - 2\, Y_i''^2 = A Y_i'' + B$, waarin A en B konstanten zijn.

Dit resultaat is voor $n = 3$ door Serret afgeleid, en voor algemeene n door Darboux op een andere wijze dan hier. Vergelijk Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux etc., bldz. 140 en 141.

$$\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \nabla\nabla\,\sigma_n = 2\,\varkappa\sigma_n{}^{2} \quad \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \{\mathbf{s}_n \overset{1}{\cdot} (\nabla \frown \nabla)\,\mathbf{s}_n\} = \varkappa\sigma_n\,\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} (\mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n) \quad (109)$$

of

$$\boxed{\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \nabla\nabla\,\sigma_n = \varkappa\sigma_n\,\mathbf{i}_n\,\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k\,\mathbf{i}_n \overset{4}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}}.} \qquad (C_4)$$

Voor een V_n, waarvoor de $(n\,k\,j\,n)$ kentallen van $\overset{4}{K}$ verdwijnen, kan dus de eerste voorwaarde worden geschreven:

$$\boxed{\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \nabla\nabla\,\sigma_n = 0.} \qquad (C'_4)$$

Deze vergelijking drukt uit, dat de tensor $\nabla\nabla\sigma_n$ *dezelfde hoofdrichtingen heeft als* $^2\mathbf{h}$. De meetkundige beteekenis van σ_n is, dat deze grootheid evenredig is met den langs $\mathbf{i}_n$ gemeten infinitesimalen afstand van opvolgende $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$.

In een ruimte met konstante RIEMANN'sche kromming K_0 is, in verband met (101):

$$\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \{\mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n\} = -K_0\,\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} (\varkappa^2\mathbf{g} - \mathbf{i}_n\,\mathbf{i}_n) = 0, \quad . \quad . \quad (110)$$

waaruit volgt, dat in deze ruimte de eerste voorwaarde den vorm (C_4') heeft, in het bijzonder is dit dus het geval in een euklidische ruimte. In dit laatste geval is ze voor $n = 3$ afgeleid door LEVY [1]), CAYLEY [2]) en DARBOUX [3]), en voor algemeene waarden van n door DARBOUX [4]). De noodzakelijk en voldoende voorwaarden voor ruimten van konstante kromming zijn dus (C_4') en (D_1').

9. *De voorwaarde van* WEINGARTEN. We zoeken een vorm der voorwaarden, waarin alleen $\mathbf{i}_n$ voorkomt, en niet meer de $\mathbf{i}_j, j=1, 2, \ldots, n-1$. Wordt een tensor, wiens hoofdrichtingen niet met die van $^2\mathbf{h}$ samenvallen, eenmaal met $^2\mathbf{h}$ overschoven, dan ontstaat een affinor, waarvan het alterneerende deel zeker niet nul is. Als voorwaarde voor het samenvallen der hoofdrichtingen kan dus gesteld worden, dat het alterneerende deel van de eerste overschuiving met $^2\mathbf{h}$ verdwijnt. (109) is dus aequivalent met:

$$B\,\overset{4}{\mathbf{g}} \overset{2}{\cdot} \{(\nabla\,\mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} (\nabla\nabla\,\sigma_n) - \sigma_n\,(\nabla\,\mathbf{i}_n)\,\mathbf{i}_n \overset{2}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n\} = 0, \quad . \quad . \quad (111)$$

waarin B aanduidt, dat het biviektordeel genomen moet worden.

---

1) M. LÉVY, Mémoire etc., bldz. 170.

2) A. CAYLEY, Sur la condition pour qu'une famille de surfaces fasse partie d'un système orthogonal, Comptes Rendus 75 (72), een reeks van verhandelingen.

3) G. DARBOUX, Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales. Comptes Rendus 76 (73) 41—45, 83—86.

4) G. DARBOUX, Leçons sur les systèmes orthogonaux etc., bldz. 128. De formule (32) daar is onze formule (C'_4).

Daar nu:

$$\nabla \{(\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} (\nabla \sigma_n)\} = (\nabla\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla \sigma_n + \mathbf{a} (\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \nabla \sigma_n, \quad (112)$$

is:

$$\nabla \frown \{(\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla \sigma_n\} = B\nabla \{(\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla \sigma_n\} = {}^1/_2 \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{2}{\cdot} \mathbf{i}_n \nabla \sigma_n - B(\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla\nabla \sigma_n, (113)$$

zoodat (111) aequivalent is met:

$$\overset{4}{\mathbf{g}} \overset{2}{\cdot} \left[-\nabla \frown \{(\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla \sigma_n\} + \frac{1}{2} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{2}{\cdot} \mathbf{i}_n \nabla \sigma_n - \sigma_n B(\nabla \mathbf{i}_n) \mathbf{i}_n \overset{2}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{1}{\cdot} \mathbf{i}_n \right] = 0. \quad (114)$$

Daar in een ruimte van konstante kromming tengevolge van (92) en (101):

$$\overset{4}{\mathbf{g}} \overset{2}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{2}{\cdot} \mathbf{i}_n \nabla \sigma_n = -\sigma_n \overset{4}{\mathbf{g}} \overset{2}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} \overset{2}{\cdot} \mathbf{i}_n \mathbf{u}_n = -2 \sigma_n K_0 \overset{4}{\mathbf{g}} \overset{2}{\cdot} \mathbf{i}_n \frown \mathbf{u}_n = 0, \quad (115)$$

luidt de voorwaarde voor een dergelijke ruimte, in verband met (110), dat de komponente van $\nabla \frown \{(\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla \sigma_n\}$ in het gebied $\perp \mathbf{i}_u$ verdwijnt. Daar echter wegens de wet van Stokes [1]) voor iederen vektor $\mathbf{v}$ geldt:

$$\int_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = -2\varkappa \int_\sigma {}_2\mathbf{f} \overset{2}{\cdot} (\nabla \frown \mathbf{v})\, d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

waarin s een gesloten kromme is en ${}_2\mathbf{f}d\sigma$ de bivektor van het oppervlakte-element van eenig door die kromme begrensd oppervlak σ, *volgt hieruit, dat in een ruimte van constante* Riemann'*sche kromming als eerste voorwaarde ook gesteld kan worden het verdwijnen van de lijnintegraal van den vektor* $(\nabla \mathbf{i}_n) \overset{1}{\cdot} \nabla \sigma_n$ *over iedere gesloten kromme in een* $V_{n-1} \perp \mathbf{i}_n$. Deze voorwaarde is voor een V_3 de eenige. Voor een R_3 is zij het eerst aangegeven door Weingarten [2]) en Ricci heeft naar aanleiding van Weingarten's werk opgemerkt, dat de voorwaarde ook geldt in een V_3 van konstante kromming. [3]) Uit het bovenstaande blijkt, dat de voorwaarde, doch niet meer als eenige, ook geldt voor uitgebreidheden van konstante kromming, waarvoor $n > 3$.

10. *Onderling orthogonale V_{n-1}-stelsels door een gegeven kongruentie*

---

[1]) Verg. A. R., bldz. 37 en 61.

[2]) Weingarten, Ueber die Bedingung, unter welcher eine Flächenfamilie einem orthogonalen Flächensystem angehört. Crelle 83 (77), 1–12.

[3]) G. Ricci, Della equazione di condizione pei parametri dei sistemi di superficie, che appartengono ad un sistema triplo ortogonale. Rendiconti Acc. Lincei Ser. V, III_2 (94) 93—96.

Ricci merkt voor het geval $n = 3$ op, dat de stelling van Weingarten ook geldt, zoo $\overset{4}{\mathbf{K}}$ den vorm heeft:

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = \mu (\mathbf{a} \frown \mathbf{b})(\mathbf{a} \frown \mathbf{b}) + \nu (\mathbf{i}_1 \frown \mathbf{i}_2)(\mathbf{i}_1 \frown \mathbf{i}_2)$$

zoo ν een willekeurige coëfficient is. Dit geldt echter ook voor algemeene waarden van n.

bij niet-eenduidig bepaalde kanonische kongruenties. Zijn de wortels van (24) niet alle enkelvoudig, dan worden door die wortels in het algemeen q onderling loodrechte gebieden $R_{p_1}, \ldots, R_{p_q}$ bepaald. Binnen het gebied R_{p_α} voldoen p_α onderling loodrechte, maar overigens willekeurige, richtingen aan de kanonische voorwaarden. De vergelijkingen (47—51) leeren, dat de kanonische richtingen in elk der gebieden R_{p_α} zoo gekozen moeten kunnen worden, dat zij V_{n-1}-normaal zijn, opdat er door $\mathbf{i}_n$ $n-1$ onderling loodrechte V_{n-1}-stelsels zullen gaan. Het is echter volstrekt niet noodig, dat de kanonische kongruenties voor iedere mogelijke keuze V_{n-1}-normaal zijn. De voorwaarden (C') en (D) zullen dus niet meer zonder meer gelden, daar zij berusten op (55), resp. (67), d.w.z. op het V_{n-1}-normaal zijn van *alle* kanonische kongruenties.

Zijn ${}_{p_1}\mathbf{i}, \ldots, {}_{p_q}\mathbf{i}$ de eenheids-p-vektoren, behoorende bij de gebieden $R_{p_1}, \ldots, R_{p_q}$, dan zullen de vergelijkingen:

$$\mathbf{i}_n \overset{1}{\cdot} \nabla y^z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

$$_{p_\alpha}\mathbf{i} \overset{1}{\cdot} \nabla y^z = 0 \quad \alpha = 1, \ldots, \beta-1, \beta+1, \ldots, q$$

p_β onafhankelijke oplossingen moeten toelaten. Volgens (B) is dus:

$$(\mathbf{i}_n\, {}_{p_1}\mathbf{i} \ldots {}_{p_{\beta-1}}\widehat{\mathbf{i}\, {}_{p_{\beta+1}}}\mathbf{i} \ldots {}_{p_q}\mathbf{i}) \overset{2}{\cdot} \nabla \frown {}_{p_\beta}\mathbf{i} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

en hieruit volgt:

$$\mathbf{i}_k \frown \mathbf{i}_n \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_j = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

$$\mathbf{i}_k \frown \mathbf{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_j = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

waarin $\mathbf{i}_j$ tot een ander gebied behoort dan $\mathbf{i}_k$ en $\mathbf{i}_l$, en de keuze overigens vrij is, mits $k \neq l$.

(119) heeft geheel denzelfden vorm als (55) en uit (120) volgt voor het speciale geval, dat $\mathbf{i}_j$, $\mathbf{i}_k$, $\mathbf{i}_l$ alle drie tot verschillende gebieden behooren:

$$\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_j = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

een vergelijking van denzelfden vorm en op dezelfde wijze afgeleid als (67).

De vergelijkingen (C') en (D) gelden dus nu alleen nog onder de genoemde beperkende voorwaarden. Bovendien zijn zij niet meer voldoende. Een aanvullende voorwaarde wordt als volgt verkregen.

Vergelijking (65) leert:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_k - \lambda_j)\, \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_j + \varkappa \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \overset{3}{\cdot} \nabla\, {}^2\mathbf{h} = 0,\\ (\lambda_l - \lambda_j)\, \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k \overset{2}{\cdot} \nabla \mathbf{i}_j + \varkappa \mathbf{i}_j \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k \overset{3}{\cdot} \nabla\, {}^2\mathbf{h} = 0.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

geldende voor het geval, dat $\mathbf{i}_k$ en $\mathbf{i}_l$ tot hetzelfde gebied behooren en $\mathbf{i}_j$ tot een ander gebied. Dan resulteert uit (122), in verband met (121), zoo beide vergelijkingen van elkaar worden afgetrokken:

$\mathbf{i}_j(\mathbf{i}_k \frown \mathbf{i}_l)^3 \nabla^2\mathbf{h} = 0$ [1] $j \neq k,\ j \neq l,\ k \neq l,\ j,\ k = 1, 2, \ldots, n-1.$	(E)

De vergelijkingen (C'), (D) en (E) zijn onder de genoemde voorwaarden, behalve noodzakelijk, ook voldoende. Want uit (E) volgt in verband met (122), daar $\lambda_k = \lambda_l$, dat ∇i_j symmetrisch is in l en k, indien l en k tot hetzelfde gebied behooren, doch j en l niet. Uit (D) volgt, op een analoge wijze als dit is uitgewerkt in het eerste deel dezer verhandeling, dat $\nabla \mathbf{i}_j$ symmetrisch is in l en k, indien l en k tot verschillende, van j verschillende gebieden behooren. (C') zegt, dat $\nabla \mathbf{i}_j$ symmetrisch is in n en k, indien k verschilt van j. Deze drie voorwaarden volstaan dus juist, om aan te toonen, dat $\nabla \mathbf{i}_j$ symmetrisch is in het gebied $\perp \mathbf{i}_j$, dus dat $\mathbf{i}_j$ V_{n-1}-normaal is.

Noemen wij [2]) $p_1, p_2, \ldots, p_q$ de multipliciteit der wortels van de algebraïsche karakteristieke vergelijking (24), dan is het aantal der vergelijkingen (C') de som van de produkten der getallen $p_1, p_2, \ldots, p_q$, twee aan twee genomen, en dat der vergelijkingen (D) driemaal de som der produkten dezer getallen, drie aan drie genomen. De vergelijkingen (E) zijn in aantal gelijk aan de som van de produkten van den vorm $p_k\, p_h \left(\frac{p_h + p_k}{2} - 1\right)$.

11. *Vereenvoudigingen voor het geval, dat de gegeven kongruentie V_{n-1}-normaal is.*

Is $\mathbf{i}_n$ V_{n-1}-normaal, dan gaat (C) over in (C_1) of (C_2), geldende voor het geval, dat $\mathbf{i}_j$ en $\mathbf{i}_k$ tot verschillende gebieden behooren. (D) kan ook in den vorm (D_1) gebracht worden en geldt dan voor het geval, dat $\mathbf{i}_j$, $\mathbf{i}_k$ en $\mathbf{i}_l$ tot verschillende gebieden behooren.

Uit (97) volgt voor het geval, dat $\mathbf{i}_k$ en $\mathbf{i}_l$ tot hetzelfde gebied behooren en $\mathbf{i}_j$ tot een ander:

$$\mathbf{i}_j(\mathbf{i}_k \frown \mathbf{i}_l)\overset{3}{.}\, \nabla\nabla\, \mathbf{s}_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (123)$$

welke vergelijking ook in den vorm:

$$\boxed{\mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_l \overset{3}{.}\, \overset{4}{\mathrm{K}} \overset{1}{.}\, \mathbf{i}_n = 0 \ ^{3)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E_1)$$

gebracht kan worden, die formeel overeenkomt met (D_1''), echter onder andere voorwaarden geldt. Nu is echter:

$$D_{kl}\, \mathbf{i}_n = d\sigma\, \mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_l \overset{2}{.}\, \overset{4}{\mathrm{K}} \overset{1}{.}\, \mathbf{i}_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

[1]) (E) is de vergelijking (C) van Ricci, Dei sistemi, bldz. 312, doch afgeleid van $^2\mathbf{h}$, en niet van $\nabla \smile \mathbf{i}_n$.

[2]) Vergelijk Ricci, Dei sistemi bldz. 312.

[3]) (E_1) is (C_1) van Ricci, Dei sistemi, bldz. 314.

de verandering van den vektor $\mathbf{i}_n$, wanneer deze langs den rand van het oppervlakelement $d\sigma$ geodetisch is rondgevoerd [1]). (E_1) eischt dus dat deze verandering in het gebied van $\mathbf{i}_k$ en $\mathbf{i}_l$ valt [2]).

In een gebied van konstante kromming is de voorwaarde (E_1) altijd vervuld, tengevolge van de opmerking, bij de bespreking van (D''_1) gemaakt.

We hebben dus het volgende theorema verkregen:

III. *Een stelsel van* ∞^1 V_{n-1} *in een* V_n, *welker tweede fundamentaaltensor behalve op bepaalde* V_r, $r < n$, *q eenduidig bepaalde hoofdgebieden* $R_{p_1}, \ldots, R_{p_q}$ *heeft, doch binnen de gebieden van meer dan één afmeting geen eenduidig bepaalde hoofdrichtingen, behoort dan en alleen dan tot een n-voudig orthogonaal stelsel, indien bij een verplaatsing loodrecht op m der hoofdgebieden de komponenten van de geodetische differentiaal van* $^2\mathbf{h}$ *in de door deze m-gebieden bepaalde uitgebreidheid hoofdgebieden heeft, die met de m genoemde hoofdgebieden van* $^2\mathbf{h}$ *samenvallen, en indien bovendien bij het geodetisch rondvoeren van* $\mathbf{i}_n$ *langs een in eenig hoofdgebied gelegen oppervlakteelement de toename van* $\mathbf{i}_n$ *geheel in ditzelfde hoofdgebied valt.*

12. *Voorwaarden, noodig opdat een* V_n *n-voudig orthogonale* V_{n-1}*-stelsels kan bevatten.*

De voorwaarde (D''_1) is een voorwaarde voor de V_n, waarin het n-voudig orthogonale stelsel moet liggen. Wenscht men, dat ieder stelsel van n onderling loodrechte $(n-1)$-richtingen in ieder punt der V_n tot een n-voudig orthogonaal V_{n-1}-stelsel kan behooren, dan is het noodig dat D''_1 voor ieder stel van vier onderling loodrechte eenheidsvectoren geldt. Men kan bewijzen dat daartoe $\overset{4}{\mathbf{K}}$ van den vorm

$$\boxed{\overset{4}{\mathbf{K}} = (\mathbf{a} \frown \mathbf{z})(\mathbf{a} \frown \mathbf{z})} \qquad (F)$$

moet zijn, waarin $\mathbf{z}^2$ een willekeurige tensor is. Voor $n = 3$ kan $\overset{4}{\mathbf{K}}$ *altijd* in dezen vorm gebracht worden en ieder stel van drie onderling loodrechte richtingen in eenig punt kan dus behooren tot een drievoudig orthogonaal stelsel, een eigenschap, die reeds aan Cotton [3]) bekend was.

[1]) A. R. bldz. 64.

[2]) Een soortgelijke meetkundige interpretatie is ook aan voorwaarde (D_1'') te verbinden.

[3]) E. Cotton. Sur une généralisation du problème de la représentation conforme aux variétés à trois dimensions Comptes Rendus 125 (97) 225—228, vergelijk ook E. Cotton, Annales de Toulouse 1 (99) 385—438, Chap. III.

ERRATA.

In het eerste gedeelte dezer verhandeling (blz. 201—212) gelieve men de volgende drukfouten te verbeteren:

bldz.	201	form. (2)	staat: $\mathbf{e}_\mu$	te lezen:	$\mathbf{e}'_\mu$
,,	201	,, (3)	,, : $^2\mathbf{g} =$	,, ,, :	$\varkappa^2\mathbf{g} =$
,,	202	,, (4)	,, : $\mathbf{v}_i \nabla f$	,, ,, :	$\mathbf{v}_i \cdot \nabla f$
,,	204	regel 7 en 8 v.b.	,, : $\nabla \frown \mathbf{v}$	,, ,, :	$\nabla \frown \mathbf{w}$
,,	204	,, 10 v.o.	,, : $\mathbf{i}_n\, \mathbf{u}_n$	,, ,, :	$\varkappa\, \mathbf{i}_n\, \mathbf{u}_n$
,,	207	,, 15 v.b.	,, : $\varkappa^\lambda$	,, ,, :	x^λ
,,	209	form. (59)	,, : $\nabla (\mathbf{i}_n$	,, ,, :	$\nabla \frown \mathbf{i}_n$

In de formules (17), (19), (21) en (33) is rechts $\varkappa$ te schrappen, in (21), (23), (25) en (26) is $\nabla \frown \mathbf{i}_n$ te vervangen door $\varkappa \nabla \frown \mathbf{i}_n$ en in (60) en (61) $\mathbf{u}_n$ door $\varkappa\, \mathbf{u}_n$.

Dierkunde. — De Heer K. MARTIN biedt een mededeeling aan van den Heer FERNAND MEUNIER over: „*Quelques insectes de l'Aquitanien de Rott, Sept Monts (Prusse rhénane)*".

(Deze mededeeling zal in een volgend verslag worden opgenomen).

Wiskunde. — De in het verslag van 27 September 1919, op blz. 341 opgenomen mededeeling van den Heer J. WOLFF, getiteld: „*Eenige toepassingen van de quasi-uniforme convergentie op reeksen van reëele en van holomorfe functies*"

is door den Heer L. E. J. BROUWER oorspronkelijk aangeboden onder den titel: „*Over reeksen van analytische functies*".

De vergadering wordt gesloten.

---

12 Januari 1920.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 29 NOVEMBER 1919.

DEEL XXVIII.

N°. 5.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren F. A. H. Schreinemakers en G. van Iterson Jr., dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Van zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen een bij renvooi van 13 November 1919, no. 4091, Afd. K. W. aan de Afdeeling, met verzoek om bericht en raad, doorgezonden request van den Heer H. Nort, te Gouda, om boven de hem reeds verleende Rijkssubsidie voor astronomische onderzoekingen, ter voltooiing van zijn onderzoek, in de eerstvolgende vijf jaren nog eene jaarlijksche Rijkstoelage van *f* 360.— te verleenen.

Door den Voorzitter wordt het request gesteld in handen van de Heeren J. C. Kapteyn en W. H. Julius, met verzoek om daarover te prae-adviseeren in de volgende vergadering.

Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS biedt eene mededeeling aan over: „*In-, mono- en divariante evenwichten*", XX.

Evenwichten van n komponenten in n phasen, waarin de hoeveelheid van één der komponenten tot nul nadert; de invloed van een nieuwe stof op een invariant (P of T) evenwicht.

In de mededeelingen XVI, XVII en XVIII hebben wij gezien dat een veld in de nabijheid eener keerlijn twee- en in de nabijheid eener grenslijn [b.v. kurve *ab* of *cd* in fig. 1 (XVI)] éénbladig is. Wij zullen dit laatste nu nader beschouwen.

Wij nemen het evenwicht $E = F_1 + F_2 - + F_n$ van n komponenten in n phasen bij constanten druk. Dit evenwicht is (Med. XVII) monovariant (P); het heeft n.l. bij constanten druk ééne vrijheid.

Voor dit evenwicht gelden de vergelijkingen (2) en (3) (XVII); bij verandering van een der veranderlijken b.v. van x_1 doorloopt dit evenwicht in het P,T-diagram eene rechte lijn, evenwijdig aan de T-as.

In de nabijheid eener grenslijn van een veld, b.v. in de nabijheid van kurve *ab* of *cd* in fig. 1 (XVI), nadert de hoeveelheid van één der komponenten tot nul. Is dit het geval met den komponent X, n.l. met dien komponent, wiens hoeveelheden in de verschillende phasen door $x_1\, x_2 \ldots x_n$ worden aangegeven, dan worden in (2) en (3) (XVII):

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial Z_2}{\partial x_2} \quad \ldots \quad \frac{\partial Z_n}{\partial x_n}$$

oneindig groot; in Z_1 komt n.l. de term $x_1 \log x_1$ in Z_2 de term $x_2 \log x_2$ enz. voor.

Wij schrijven nu:

$$Z_1 = Z_1' + RT\, x_1 \log x_1 \qquad Z_2 = Z_2' + RT\, x_2 \log x_2 \quad . \quad . \quad (1)$$

enz. Hierin blijven $Z_1'\, Z_2' \ldots$ en hunne differentiaalcoëfficienten ook voor $x_1 = 0\;\, x_2 = 0 \ldots$ eindig. Uit (1) volgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Z_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial Z_1'}{\partial x_1} + RT\,(1 + \log x_1) \\ \frac{\partial Z_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial Z_2'}{\partial x_2} + RT\,(1 + \log x_2)\end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

enz. De n vergelijkingen (2) (XVII) gaan nu over in:

$$\left.\begin{aligned} Z_1' - RT\,x_1 - x_1\frac{\partial Z_1'}{\partial x_1} - y_1\frac{\partial Z_1'}{\partial y_1}\;.\;.\;.\;.\;.=K \\ Z_2' - RT\,x_2 - x_2\frac{\partial Z_2'}{\partial x_2} - y_2\frac{\partial Z_2'}{\partial y_2}\;.\;.\;.\;.\;.=K \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\quad (3)$$

enz.

De eerste rij der vergelijkingen (3) (XVII) gaat nu over in:

$$\frac{\partial Z_1'}{\partial x_1} + RT\,log\,x_1 = \frac{\partial Z_2'}{\partial x_2} + RT\,log\,x_2 = \;.\;.\;.\;.\;. = K_x - RT\;.\;(4)$$

De volgende rijen der vergelijkingen (3) (XVII) worden:

$$\frac{\partial Z_1'}{\partial y_1} = \frac{\partial Z_2'}{\partial y_2} = \;.\;.\;.\;.\;. = \frac{\partial Z_n'}{\partial y_n} = K_y\quad .\;.\;.\;.\;(5)$$

enz. Uit (4) volgt:

$$\left.\begin{aligned} RT\,log\,\frac{x_2}{x_1} = \frac{\partial Z_1'}{\partial x_1} - \frac{\partial Z_2'}{\partial x_2} \\ RT\,log\,\frac{x_3}{x_1} = \frac{\partial Z_1'}{\partial x_1} - \frac{\partial Z_3'}{\partial x_3} \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (6)$$

of

$$x_2 = \mu_2\,x_1 \qquad x_3 = \mu_3\,x_1\;.\;.\;.\;.\;.\;x_n = \mu_n\,x_1\;.\;\;.\;\;.\quad (7)$$

waarin $\mu_2\,\mu_3\,...$ bepaald zijn door (6).

Voor oneindig kleine waarden van $x_1\,x_2\,...$ zijn de verhoudingen tusschen $x_1\,x_2\,...\,x_n$ dus door (7) bepaald.

Wij geven nu aan de veranderlijken $T\,x_1\,x_2\,...\,y_1\,y_2\,...$ enz., waarin wij $x_1 = 0$ $x_2 = 0\,...$ nemen, de aangroeiingen: $dT\,.\,x_1\,x_2\,...$ $dy_1\,dy_2\,...$ enz.

Uit (3) volgt nu:

$$\left.\begin{aligned} H_1\,dT + RT\,x_1 + y_1\,d\frac{\partial Z_1'}{\partial y_1} + \;.\;.\;.\;.\;. = -dK \\ H_2\,dT + RT\,x_2 + y_2\,d\frac{\partial Z_2'}{\partial y_2} + \;.\;.\;.\;.\;. = -dK \end{aligned}\right\}\;.\;.\quad (8)$$

enz., waarin het teeken d aangeeft, dat naar alle veranderlijken moet gedifferentieerd worden.

Wij tellen nu de n vergelijkingen (8) samen, nadat wij de 1e met λ_1 de 2e met λ_2 enz. vermenigvuldigd hebben. Wij krijgen dan, als wij gebruik maken van de betrekkingen die uit (5) volgen:

$$\Sigma\,(\lambda\,H)\;\;dT + RT\,\Sigma\,(\lambda\,x) + \Sigma\,(\lambda\,y)\,d\left(\frac{\partial Z_1'}{\partial y_1}\right) + \;.\;.\;. = -\,\Sigma\,(\lambda)\,.\,dK\quad (9)$$

Wij bepalen $\lambda_1\,\lambda_2\,...$ nu zoo, dat zij voldoen aan de $n-1$ vergelijkingen (10)

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(\lambda) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n = 0 \\ \Sigma(\lambda y) &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots\ldots + \lambda_n y_n = 0 \\ \Sigma(\lambda z) &= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots\ldots + \lambda_n z_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (10)$$

enz. Hierdoor zijn de $n-1$ verhoudingen tusschen de n coëfficienten $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots$ bepaald.

Daar

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(\lambda x) &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n \\ \Sigma(\lambda H) &= \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots\ldots + \lambda_n H_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

is, is de verhouding $\Sigma(\lambda x) : \Sigma(\lambda H)$ eveneens bepaald. Uit (9) volgt nu: [1])

$$(dT)_P = -\frac{RT\,\Sigma(\lambda x)}{\Sigma(\lambda H)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

De waarde van dT in (12) hangt af van $\Sigma(\lambda x)$, dus nog van de n aangroeiingen $x_1\, x_2 \ldots x_n$. Men kan deze echter in één dezer aangroeiingen, b.v. in x_1 uitdrukken. Met behulp van (7) krijgt men dan:

$$(dT)_P = -\frac{RT\,x_1\,\Sigma(\lambda \mu)}{\Sigma(\lambda H)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

waarin:

$$\Sigma(\lambda \mu) = \lambda_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots\ldots \lambda_n \mu_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Neemt men het evenwicht $E = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ van n komponenten in n phasen bij constante temperatuur, dan is het monovariant (T). Op dezelfde wijze als boven vindt men nu:

$$(dP)_T = \frac{RT\,\Sigma(\lambda x)}{\Sigma(\lambda V)} = \frac{RT\,x_1\,\Sigma(\lambda \mu)}{\Sigma(\lambda V)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Hierin hebben $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots$ weer de waarden, die door (10) zijn bepaald. $\Sigma(\lambda x)$ heeft ook dezelfde waarde van (11) n.l.:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma(\lambda x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n \\ \text{terwijl} \quad & \\ &\Sigma(\lambda V) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots\ldots + \lambda_n V_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (16)$$

$\Sigma(\lambda\mu)$ heeft weer dezelfde waarde als in (14).

In de vorige beschouwingen is aangenomen dat de hoeveelheid van den komponent X in het evenwicht $E = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ van n komponenten in n phasen zeer klein is. Wordt die hoeveelheid echter nul, dan gaat E over in een evenwicht van $n-1$ komponenten in n phasen. Dit is monovariant en wordt in het P,T-diagram voorgesteld door een kurve. Bij constanten druk is het invariant (P),

[1]) Voor eene andere afleiding zie men F. A. H. SCHREINEMAKERS, Die heterogenen Gleichgewichte von H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM III' 289.

bij constante temperatuur invariant (T). In dit invariante (P of T) evenwicht kan tusschen de phasen $F_1 \ldots F_n$ eene reactie optreden; de hoeveelheden $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ der aan deze reactie deelnemende phasen zijn bepaald door (10). De bij deze reactie optredende entropieverandering $\Sigma(\lambda H)$ is door (11), de optredende volumeverandering $\Sigma(\lambda V)$ is door (16) bepaald.

Van de coëfficienten $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ zijn eenige positief, andere negatief. Zoo lang men hiervoor geen bepaalden regel aanneemt, kan men positief en negatief willekeurig verwisselen. Wij nemen het volgende aan. De coëfficienten der phasen, die bij eene reactie ontstaan, nemen wij positief; de coëfficienten der phasen, die bij de reactie verdwijnen, nemen wij negatief.

Nu is $\Sigma(\lambda)$ de algebraïsche som van de hoeveelheden der phasen, die aan de reactie deelnemen; deze is natuurlijk nul.

$\Sigma(\lambda y)$ is de algebraïsche som van de hoeveelheid van de komponent Y die aan de reactie deelneemt; deze is eveneens nul. Hetzelfde geldt voor de andere komponenten.

Daar de komponent X niet in het invariante (P of T) evenwicht voorkomt, heeft $\Sigma(\lambda x)$ dus een andere beteekenis. Voegt men echter aan dit evenwicht een weinig van den komponent x toe, dan verdeelt deze zich tusschen de n phasen; deze verdeeling is bepaald door (7), zoodat $x_1 \ldots x_n$ en dus ook $\Sigma(\lambda x)$ bepaald zijn.

Wij denken ons nu eene reactie in het invariante (P of T) evenwicht; $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ stellen dus de hoeveelheden der aan de reactie deelnemende phasen voor. Als deze phasen nu eens de hoeveelheden $x_1 \ldots x_n$ van den nieuwen komponent bevatten, dan zou $\Sigma(\lambda x)$ de algebraïsche som zijn van de hoeveelheid van den komponent X, die aan deze reactie deel neemt. Wij zullen $\Sigma(\lambda x)$ daarom noemen „de fictieve reactiehoeveelheid van den komponent X".

Wij nemen nu een punt op de grenskurve van een veld, b.v. punt h op de grenskurve $a\,b$ in fig. 1. (XVI). Deze grenskurve stelt een evenwicht voor van n—1 komponenten (nl. de komponenten Y, Z, U . .) in n phasen; dus een monovariant evenwicht. In het punt h zelf hebben $PT y_1 y_2 \ldots z_1 z_2 \ldots$ enz bepaalde waarden; hetzelfde geldt voor de verhoudingen van $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, die door (10) zijn bepaald. Wij voegen nu een weinig van den komponent X toe; deze verdeelt zich over de n phasen; deze verdeeling is bepaald door (7). Voor een bepaalde waarde van bv. x_1 zijn nu de verhoudingen $\Sigma(\lambda x) : \Sigma(\lambda H)$ en $\Sigma(\lambda x) : \Sigma(\lambda V)$ eveneens bepaald. Men kent volgens (12) en (15) dus ook $(dT)_P$ en $(dP)_T$.

Is nu $(dT)_P$ positief, dan ligt het veld E rechts van het punt h;

men gaat dan, zooals in fig. 1 (XVI), van h uit in de richting hl het veld binnen.

Is $(dP)_T$ negatief, dan ligt het veld E beneden punt h; men gaat dan, zooals in fig. 1 (XVI), van h uit in de richting hm het veld binnen.

Het veld E ligt dus rechts en beneden het punt h.

De richting van kurve ab zelf is in ieder punt bepaald door:

$$\frac{dP}{dT}=\frac{\Sigma(\lambda H)}{\Sigma(\lambda V)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Uit onze aanname over het teeken van $(dT)_P$ en $(dP)_T$ volgt, dat wij $\Sigma(\lambda x):\Sigma(\lambda H)$ negatief en $\Sigma(\lambda x):\Sigma(\lambda V)$ eveneens negatief hebben aangenomen. Uit (17) volgt dan dat kurve ab in de nabijheid van het punt h een met de temperatuur stijgende kurve moet zijn, zooals ook in fig. 1 (XVI) geteekend.

In fig. 3 (XVI) stelt $abchd$ eene grenskurve voor, die in b een druk- en in c een temperatuurmaximum heeft.

Uit de richting van tak ab volgt met behulp van (17) dat $\Sigma(\lambda H)$ en $\Sigma(\lambda V)$ hetzelfde teeken hebben; wij kiezen de teekens van $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ nu zoo, dat beide positief zijn. Uit de richting der takken bc en cd volgt dan, met behulp van (17), welke teekens $\Sigma(\lambda H)$ en $\Sigma(\lambda V)$ op deze takken moeten hebben. Men heeft dan:

op tak ab	$\Sigma(\lambda H)>0$	$\Sigma(\lambda V)>0$
in b	$\Sigma(\lambda H)=0$	$\Sigma(\lambda V)>0$
op tak bc	$\Sigma(\lambda H)<0$	$\Sigma(\lambda V)>0$
in c	$\Sigma(\lambda H)<0$	$\Sigma(\lambda V)=0$
op tak cd	$\Sigma(\lambda H)<0$	$\Sigma(\lambda V)<0$

In elk punt van kurve $abchd$ heeft $\Sigma(\lambda x)$ een bepaald teeken; men kan dit vinden met behulp van (7) en (10).

Neemt men aan dat $\Sigma(\lambda x)$ in ieder punt der kurve negatief is, dan volgt uit (12) en (15) dat het veld E geheel binnen de grenskurve $abcd$ moet liggen en dus niet zooals in fig. 3 (XVI) waar het deel afe er buiten ligt.

Is in elk punt van kurve $abcd$ $\Sigma(\lambda x)>0$ dan volgt uit (12) en (15) dat het veld links en boven tak ab moet liggen, rechts en boven tak bc, rechts en beneden tak cd. Men heeft dan fig. 5 (XVI). [Zooals uit den stand der letters blijkt, heeft de drukker deze figuur gedraaid; de lezer legge ze daarom zoo, dat de raaklijn in b horizontaal en in c weer vertikaal staat].

Wij kunnen ook aannemen dat $\Sigma(\lambda x)$ in het eene deel der kurve positief, in een ander deel negatief is. Wij nemen aan dat $\Sigma(\lambda x)$ in

deel abf van kurve $abcd$ fig. 3 (XVI) positief en in het deel fcd negatief is. Uit (12) en (15) volgt dan dat het veld moet liggen, zooals in fig. 3 (**XVI**) geteekend nl. dat een deel afe van dit veld buiten de grenslijn moet liggen en dat dit veld een keerlijn ef moet hebben.

Dat dit punt f een punt van de keerlijn moet zijn, blijkt uit het volgende. In dit punt is $\Sigma(\lambda x) = 0$. Daar in dit punt ook de vergelijkingen (10) gelden, zoo kan er tusschen de n phasen van het evenwicht $E = F_1 + \ldots + F_n$ waarin thans ook een oneindig kleine hoeveelheid van den komponent X voorkomt, eene phasenreactie: $\lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_n F_n = 0$ optreden.

Is dus in een bepaald punt f van kurve $abcd$ $\Sigma(\lambda x) = 0$, dan is f een gemeenschappelijk punt van keer- en grenslijn; wij zullen laten zien dat f een raakpunt is. Verandert $\Sigma(\lambda x)$ in f van teeken, dan is f een eindpunt der keerlijn, zooals in fig. 3 (XVI); verandert $\Sigma(\lambda x)$ in f echter niet van teeken, dan is f geen eindpunt, maar zet de kurve zich verder voort.

Uit (**12**), (15) en (17) volgt de betrekking:

$$(dP)_T : (dT)_P = -\left(\frac{dP}{dT}\right)_{x=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

De index $x = 0$ in het tweede lid van (18) geeft aan dat $\frac{dP}{dT}$, geldt voor de grenskurve, waarin de komponent X ontbreekt.

Om de beteekenis van (18) in te zien, denken wij ons de P,T-kurve van het grensevenwicht, waarin dus de komponent X niet voorkomt, geteekend. Men neme daartoe kurven ab en cd in de figuren, 1, 2 en 4 (XVI) en kurve $abcd$ in de figuren **3** en **5** (XVI). [Men legge deze laatste figuur weer in den goeden stand].

Wij zullen de takken, waarop bij T-verhooging de druk toeneemt, de „stijgende" takken noemen; b.v. de takken ab en cd in de figuren 1, 2, 3, 4 en 5 (XVI). Een tak, zooals b.v. bc in fig. 3 en 5 (XVI), waarop bij T-verhooging de druk afneemt, noemen wij een „dalenden" tak.

Op een stijgenden tak is $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{x=0}$ positief; uit (18) volgt dan, dat $(dP)_T$ en $(dT)_P$ tegengesteld teeken hebben. Is $(dT)_P$ positief en dus $(dP)_T$ negatief, dan ligt het veld dus rechts en beneden den tak; dit is het geval ten opzichte van tak ab in de fig. 1, 2 en 4 (XVI) en ten opzichte van tak cd in de fig. 2, 4 en 5 (XVI). Is $(dT)_P$ negatief en $(dP)_T$ dus positief, dan ligt het veld dus links en

boven den tak; dit is het geval ten opzichte van tak $a\,b$ in fig. 3 en 5 (XVI) en ten opzichte van tak $c\,d$ in de fig. 1 en 3 (XVI).

Wij vinden dus: een veld ligt altijd rechts en beneden of links en boven den stijgenden tak zijner grenskurve.

Op den dalenden tak eener grenskurve is $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{x=0}$ negatief. Uit (18) volgt dat $(dP)_T$ en $(dT)_P$ dan hetzelfde teeken hebben. Zijn beide positief, dan ligt het veld dus rechts en boven; zijn beide negatief, dan ligt het links en beneden den tak. In fig. 5 (XVI) ligt het veld rechts en boven tak bc; in fig. 3 (XVI) ligt het veld rechts en boven het stuk $b\,f$ en links en beneden het stuk $f\,c$ van tak $b\,c$.

Wij vinden dus:

een veld ligt rechts en beneden of links en boven den stijgenden tak van zijn grenskurve; het ligt rechts en boven of links en beneden den dalenden tak van zijn grenskurve.

In Mededeeling XI over: „Evenwichten in ternaire stelsels", hebben wij deze zelfde eigenschap reeds afgeleid voor een bijzonder geval nl. voor het ternaire veld $F + L + G$, waarin F eene binaire verbinding voorstelt, ten opzichte van zijne binaire grenskurve $F + L + G$.

Het blijkt thans dat dit geheel algemeen geldt voor elk willekeurig veld ten opzichte van al zijn grenskurven.

Men kan de boven verkregen uitkomsten ook op andere wijze uitdrukken. Het evenwicht $E = F_1 + \ldots + F_n$ van $n-1$ komponenten in n phasen is monovariant of invariant (P of T). Voegt men een weinig van een nieuwe stof X toe, dan kan een nieuw evenwicht $E' = F'_1 + \ldots + F'_n$ ontstaan. Hierin hebben de onveranderlijke phasen dezelfde samenstelling als in E; de veranderlijke phasen (die natuurlijk niet alle de nieuwe stof X behoeven te bevatten) verschillen nog slechts zeer weinig van die in E.

Men kan zich nu de vraag stellen:

hoe moet men bij constante P de temperatuur veranderen,

of: hoe moet men bij constante T den druk veranderen opdat in beide gevallen het evenwicht E in E' overgaat.

Het is wel duidelijk dat beide vragen slechts een andere vorm zijn van de boven behandelde: hoe moet men bij constante P de temperatuur en bij constante T den druk veranderen om van eene grenskurve over te gaan in het bijbehoorende veld.

Wij nemen het evenwicht $E = L + F_2 + F_3 + \ldots$ van $n-1$ komponenten in n phasen (of van n komponenten in $n+1$ phasen). Hierin stellen $F_2\,F_3 \ldots$ vaste stoffen voor van onveranderlijke samen-

stelling en L eene vloeistof. Bij toevoeging van een nieuwe stof X treedt deze dus alleen in de vloeistof op.

Als in dit evenwicht E bij constante T en P de reactie:

$$\lambda_1 L + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \ldots\ldots = 0 \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

optreedt, dan is $\Sigma(\lambda x) = \lambda_1 x$, als n.l. x de concentratie van de nieuwe stof in de vloeistof voorstelt.

Stelt men $\lambda_1 = 1$, dan zijn $\Sigma(\lambda H)$ en $\Sigma(\lambda V)$ de entropie — en de volumetoename, als bij de phasenreactie één hoeveelheid vloeistof wordt gevormd. Wij stellen ze voor door ΔH en ΔV.

(12) en (15) gaan nu over in:

$$(dT)_P = -\frac{RTx}{\Delta H} \quad \text{en} \quad (\Delta P)_T = \frac{RTx}{\Delta V}. \quad \ldots \quad (20)$$

Stelt men de hoeveelheid warmte, die toegevoerd moet worden, om bij de reactie één hoeveelheid vloeistof te vormen, door ΔW voor, dan gaat (20) over in:

$$(dT)_P = -\frac{RT^2 x}{\Delta W} \quad \text{en} \quad (\Delta P)_T = \frac{RTx}{\Delta V} \quad \ldots \quad (21)$$

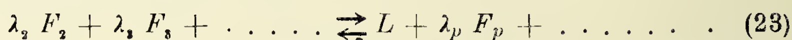
Reactie (19) kan het gemeenschappelijk smelten voorstellen van de vaste stoffen $F_2 F_3 \ldots$; dit is het geval, als de reactie van den vorm



$$\lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \ldots\ldots \rightleftarrows L \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

is en $\lambda_2 \lambda_3 \ldots$ positief zijn.

Is de reactie van den vorm:



$$\lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \ldots\ldots \rightleftarrows L + \lambda_p F_p + \ldots\ldots \quad (23)$$

waarin wij eveneens alle coëfficienten positief nemen, dan stelt ze de omzetting voor van de stoffen $F_2 F_3 \ldots$ in $F_p \ldots$ onder gelijktijdige vorming van vloeistof.

Wij nemen nu aan dat bij de vorming van vloeistof uit vaste stoffen, dus bij smelten volgens (22) en bij omzetting volgens (23) warmte toegevoerd moet worden; ΔW is dan positief; de volumeverandering bij het smelten of omzetten kan zoowel positief als negatief zijn. Uit (21) volgt nu:

De gemeenschappelijke smelt- of omzettingstemperatuur van een of meer stoffen wordt door toevoeging van een nieuwe stof verlaagd;

de gemeenschappelijke smelt- of omzettingsdruk van een of meer stoffen wordt door toevoeging van een nieuwe stof

verhoogd, als bij het smelten of omzetten het volume toeneemt,

verlaagd, als bij het smelten of omzetten het volume afneemt.

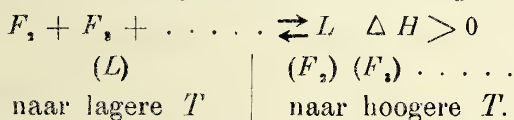
Deze verhooging en verlaging zijn bij eerste benadering evenredig met de hoeveelheid van de nieuwe stof.

Past men deze regels toe op het smelten van een enkelvoudige stof, dan volgt de bekende regel der smelt- of vriespuntsverlaging; de eerste formule (21) is dan de bekende formule van RAOULT-VAN'T HOFF.

Wij kunnen de voorafgaande afleidingen ook toepassen, als wij in (19) de vloeistof L vervangen door een gas G. In het algemeen is ΔV dan positief en bij benadering gelijk aan het volume V van het gas; men kan hierdoor aan de tweede formule (21) een anderen vorm geven, n.l.

$$(dP)_T = Px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Wij kunnen de vorige regels ook op de volgende wijze afleiden. Wij nemen het evenwicht $E = L + F_2 + F_3 + \ldots$, waarin de nieuwe stof X nog niet aanwezig is, bij constanten druk; het is dan invariant (P) en bestaat bij eene bepaalde temperatuur, die wij T_0 zullen noemen. Neemt men aan dat reactie (22) van links naar rechts onder warmtetoevoer plaats heeft, dan volgt:

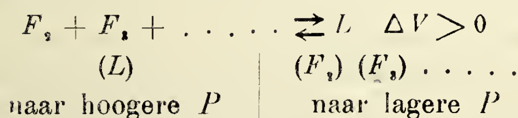


Het evenwicht $(L) = F_2 + F_3 + \ldots$ bestaat bij temperaturen lager dan T_0. Voegt men de nieuwe stof X toe, dan gaat E over in $E' = L' + F_2 + F_3 + \ldots$, waarin L' van L verschilt; dit evenwicht E' bestaat bij eene temperatuur T', die van T_0 verschilt.

Neemt men uit E' de vloeistof L' weg, dan gaat het over in $F_2 + F_3 + \ldots$, dus in het hierboven besproken evenwicht (L); daar dit bij lagere temperaturen bestaat dan T_0, zoo volgt $T' < T_0$. Bij toevoeging van de nieuwe stof moet dus het gemeenschappelijk smeltpunt dalen.

Men vindt uit reactie (23) hetzelfde voor het gemeenschappelijk omzettingspunt. Neemt men het evenwicht $E = L + F_2 + F_3 + \ldots$, waarin de nieuwe stof nog niet aanwezig is, bij constante temperatuur, dan is het invariant (T); het bestaat dan bij een bepaalden druk P_0.

Als nu reactie (22) van links naar rechts onder volumetoename plaats vindt, dan volgt:



Het evenwicht $(L) = F_2 + F_3 + \ldots$ bestaat dus bij drukken grooter dan P_0. Hieruit volgt dat het evenwicht E' eveneens optreedt

bij een druk hooger dan P_0. Treedt bij het gemeenschappelijk smelten dus volumevergrooting op, dan rijst de smeltdruk.

Uit reactie (23) volgt hetzelfde voor het gemeenschappelijk omzettingspunt.

Neemt men aan dat $\Delta V < 0$ is, dan volgt dat bij toevoeging van de nieuwe stof de smelt- of omzettingsdruk daalt.

Wij nemen nu het evenwicht

$$E = L_1 + L_2 + \ldots\ldots + F_1 + F_2 + \ldots\ldots$$

van $n-1$ (of n) komponenten in n (of $n+1$) phasen.

L_1 $L_2 \ldots$ stellen weer vloeistoffen, F_1 $F_2 \ldots$ weer vaste stoffen van onveranderlijke samenstelling voor. Wij hebben vroeger[1]) de temperatuur, waarbij dit evenwicht onder constanten druk optreedt, de schichtungstemperatuur genoemd; men kan ze ook de stratificatie-temperatuur noemen.

Wij schrijven de in dit evenwicht optredende reactie:

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots\ldots + \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \ldots\ldots = 0. \quad (25)$$

Wij kunnen bij deze reactie de 2 hoofdtypen:

$$\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \ldots \rightleftarrows \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \mu_q F_q + \ldots \quad (26)$$

$$\lambda_1 L_1 + \ldots + \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \ldots \rightleftarrows \lambda_p L_p + \ldots + \mu_q F_q \ldots \quad (27)$$

onderscheiden, waarin wij alle coëfficienten positief nemen. In (26) kunnen de vaste stoffen aan de rechter, in (27) aan de rechter- of linkerzijde ontbreken. Van beide typen zijn experimenteele voorbeelden bekend[2]). Om het verschil tusschen beide reacties uit te drukken, zullen wij zeggen: in (26) liggen alle vloeistoffen in reactieconjunctie, in (27) liggen twee of meer in reactieoppositie[3]).

Voegt men een nieuwe stof toe dan verdeelt deze zich tusschen de vloeistoffen; zijn concentraties x_1 $x_2 \ldots$ zijn bepaald door (7). [Het is wel duidelijk dat de μ's in (7) een geheel andere beteekenis hebben dan in (25), (26) en (27)].

Voor reactie (26) is $\Sigma(\lambda x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots$, waarin alleen de λ's en niet de μ's optreden. Daar de λ's alle positief zijn, is $\Sigma(\lambda x)$ eveneens positief. Wij nemen hierbij aan, dat, om reactie (26) van

[1]) F. A. H. SCHREIMAKERS, die heterogenen Gleichgewichte von H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM III[2] 108.

[2]) F. A. H. SCHREINEMAKERS ibid. III[2] 106–113, 193–203.

[3]) Om verwarring te voorkomen lette de lezer op het volgende. In de bovengenoemde boeken III[1] en III[2] is meermalen gesproken over phasen, die in het diagram in conjunctie of oppositie liggen. Noemt men deze ligging diagramconjunctie en diagramoppositie, dan blijkt dat reactieconjunctie met diagramoppositie en dat reactieoppositie met diagramconjunctie overeenkomt.

links naar rechts te doen verloopen, warmte toegevoerd moet worden, zoodat ook $\Sigma(\lambda H)$ positief is. Het teeken van $\Sigma(\lambda V)$ is echter onbepaald. [Het is wel duidelijk dat in $\Sigma(\lambda H)$ en $\Sigma(\lambda V)$ ook de μ's van (26) optreden].

Uit (12) en (15) volgt nû:

$$(dT)_P < 0 \quad \text{en} \quad (dP)_T \gtrless 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Hieruit volgt: heeft men een invariant (P of T) evenwicht met 2 of meer vloeistoffen, die alle in reactieconjunctie liggen en voegt men een nieuwe stof toe, dan wordt:

bij constante P de stratificatietemperatuur verlaagd,

bij constante T de stratificatiedruk verhoogd, als bij de vorming der vloeistoffen het volume toeneemt,

verlaagd, als bij de vorming der vloeistoffen het volume afneemt.

Voor reactie (27) is

$$\Sigma(\lambda x) = \lambda_p x_p + \ldots\ldots - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots$$

zoodat $\Sigma(\lambda x)$ zoowel positief als negatief kan zijn. Dit hangt af van de verdeeling van de nieuwe stof X tusschen de verschillende vloeistoffen.

Om dit nader toe te lichten beschouwen wij een bepaald geval, nl. het evenwicht

$$E = L_1 + L_2 + Z + U + \ldots\ldots + N. \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

tusschen de n komponenten $YZ \ldots N$. In dit evenwicht treden dus alle komponenten, behalve Y, als vaste phasen op. Daar er dus $n-1$ vaste en 2 vloeibare phasen zijn, is het invariant (P of T). Wij stellen nu de reactie voor door:

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 Z + \lambda_4 U + \ldots\ldots + \lambda_{n+1} N = 0 \quad . \quad (30)$$

zoodat $\Sigma(\lambda x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Ter bepaling van de verhouding tusschen λ_1 en λ_2 nemen wij uit (10) de vergelijking $\Sigma(\lambda y) = 0$. Daar de stof Y alleen in de beide vloeistoffen optreedt, zoo volgt:

$$\Sigma(\lambda y) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Hieruit blijkt dat λ_1 en λ_2 tegengesteld teeken hebben, zoodat reactie (30) tot type (27) behoort. Wij schrijven ze in den vorm:

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_3 Z + \lambda_4 U + \ldots\ldots \rightleftarrows L_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Wij hebben dus $\lambda_2 = 1$ gesteld; λ_1 is dus positief; één of meer der coëfficienten $\lambda_3 \ldots.$ kunnen natuurlijk negatief zijn. Verder nemen wij aan dat λ_2 de vloeistof is, die zich bij toevoer van warmte vormt. [Was dit met L_1 het geval, dan zouden wij L_1 in het linker lid van (32) hebben geplaatst].

Wij hebben nu: $\Sigma(\lambda y) = y_2 - \lambda_1 y_1$ en $\Sigma(\lambda x) = x_2 - \lambda_1 x_1$. Hieruit volgt·

$$\Sigma(\lambda x) = x_1 \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{y_2}{y_1}\right) \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Uit (12) en (15) volgt nu:

$$(dT)_P = -\frac{RT^2 x_1 \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{y_2}{y_1}\right)}{\Delta W} \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

en

$$(dP)_T = \frac{RT x_1 \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{y_2}{y_1}\right)}{\Delta V} \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

Hierin is ΔW de warmte, noodig om één hoeveelheid der vloeistof L_2 te vormen; ΔV is de bij deze vorming optredende volumetoename, die zoowel positief als negatief kan zijn.

Wij zullen nu onder verdeelingscoëfficient van een stof verstaan: de concentratie van die stof in de vloeistof, die zich bij warmtetoevoer vormt, gedeeld door de concentratie van die stof in de andere vloeistof. $x_2 : x_1$ is dus de verdeelingscoëfficient van de nieuwe stof, $y_2 : y_1$ die van den komponent, die niet als vaste phase optreedt.

Wij vinden dus:

als in een invariant (P of T) evenwicht met 2 vloeistoffen alleen komponenten als vaste phasen optreden, dan liggen beide vloeistoffen in reactieoppositie. De stratificatietemperatuur wordt bij constante P door toevoeging van een nieuwe stof:

verhoogd (verlaagd) als de verdeelingscoëfficient van de nieuwe stof kleiner (grooter) is dan die van den komponent, die niet als vaste phase optreedt [1]).

Uit (35) kan men overeenkomstige regels afleiden voor den invloed van een nieuwe stof op de drukverandering bij constante T.

Men kan aan (34) en (35) ook nog een eenvoudiger vorm geven. Wij hebben n.l. de concentraties der komponenten in de vloeistoffen zoo uitgedrukt, dat elke vloeistof in het geheel één molecuul bevat. Wij kunnen onder concentratie echter ook verstaan de hoeveelheid der komponenten, als de vloeistof één molecuul bevat van den komponent, die niet als vaste phase optreedt; in ons geval dus van den komponent Y. Daar y_1 en y_2 dus 1 worden, gaan (34) en (35) over in:

$$(dT)_P = -\frac{RT^2 (x_2 - x_1)}{\Delta W} \quad \text{en} \quad (dP)_T = \frac{RT (x_2 - x_1)}{\Delta V} \quad . \quad . \quad (36)$$

---

[1]) Voor enkele voorbeelden van den invloed van een derde stof op binaire evenwichten zie men F. A. H. SCHREINEMAKERS, Die heterogenen Gleichgewichte von H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM III^2 160.

Men vindt nu:

de stratificatietemperatuur wordt bij constante P door toevoeging van een nieuwe stof verhoogd (verlaagd) als de concentratie van de nieuwe stof in de vloeistof, die zich bij verwarming vormt, kleiner (grooter) is, dan haar concentratie in de andere vloeistof.

De eerste formule (36) is reeds vroeger voor evenwichten met twee [1]) en meer [2]) komponenten afgeleid.

Wordt vervolgd.

Leiden, Anorg. Chem. Lab.

---

1) F. A. H. Schreinemakers. Zeitschr. f. Phys. Chem. 25 320 (1898).

2) H. A. Lorentz. ibid. 25. 332 (1898).

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan: *„Over eene formule van* SYLVESTER".

Onder den titel: "On the partition of numbers" heeft SYLVESTER in the Quart. Journ. of Math. I (1857) p. 141—152, eene algemeene formule gegeven voor het aantal oplossingen in positieve geheele getallen (nul inbegrepen) van de vergelijking

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots\dots + a_r x_r = n \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

waarin de grootheden n en a bekende positieve getallen voorstellen. Deze formule, die zonder bewijs is medegedeeld, toepassende op een bijzonder geval, kwam ik tot het ongerijmde resultaat dat het aantal oplossingen een gebroken getal zoude zijn. Dit gaf mij aanleiding naar een bewijs te zoeken en daarbij vond ik, zooals uit het volgende zal blijken, dat de bedoelde formule eene kleine verbetering behoeft.

Wanneer men de breuk

$$\frac{1}{\Phi(x)} = \frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2}) \, . \, . \, (1-x^{a_r})} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

naar opklimmende machten van x ontwikkelt, dan vindt men voor den coëfficient van x^n juist het aantal gevraagde oplossingen van de vergelijking (1). Het ligt dus voor de hand om bovenstaande breuk in gedeeltelijke gebrokens te ontbinden en ieder dezer naar opklimmende machten van x te ontwikkelen. Daartoe moeten we eerst de verschillende factoren van den noemer en hunne aantallen bepalen.

Schrijven we de vergelijking die alleen de primitieve wortels van $1-x^m=0$ bevat $\overline{1-x^m}=0$ en noemen we de deelers van $m: d_1, d_2, \dots d_k$ $(d_1=1, d_k=m)$ dan is

$$1-x^m = \prod_{i=1}^{k} \overline{1-x^{d_i}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Om dit te bewijzen stellen we

$$m = p^\alpha q^\beta \, . \, . \, t^\lambda$$

aannemende dat $p, q, \dots t$ de ondeelbare factoren van m voorstellen.

De deelers van m zijn dan de termen van het produkt

$$\left(1+\sum_1^\alpha p^a\right)\left(1+\sum_1^\beta q^b\right) \, . \, . \left(1+\sum_1^\lambda t^l\right)$$

Nu heeft de vergelijking $1-x^d=0$ waarin $d=p^a q^b \dots t^l$ een aantal primitieve wortels gelijk

$$p^a q^b \ldots t^l \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) \ldots \left(1-\frac{1}{t}\right).$$

Past men dit toe op alle deelers d_i van m, dan vindt men een totaal aantal primitieve wortels

$$\left[1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_1^\alpha p^a\right]\left[1+\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_1^\beta q^b\right] \ldots$$
$$\ldots \left[1+\left(1-\frac{1}{t}\right)\sum_1^\lambda t^l\right] = p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda = m.$$

Daar nu al deze primitieve wortels verschillend zijn en voldoen aan $1-x^m=0$, zoo blijkt dat wanneer men alle deelers $1-x^d$ van $1-x^m$ uitschrijft en van ieder dezer den factor bepaalt die gelijk nul gesteld de primitieve wortels oplevert, het produkt dezer factoren juist weer $1-x^m$ oplevert.

Zoo bijv. $m=20=2^2 \,.\, 5$, dan zijn de deelers

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 10, \quad 20$$

waarmede correspondeeren de factoren

$$1-x, \quad 1+x, \quad 1+x^2, \quad 1+x+x^2+x^4, \quad 1-x^2-x^3+x^4, \quad 1-x^2+x^4-x^6+x^8$$

of

$$\underline{1-x}, \quad \underline{1-x^2}, \quad \underline{1-x^4}, \quad \underline{1-x^5}, \quad \underline{1-x^{10}}, \quad \underline{1-x^{20}}.$$

Het produkt dezer factoren is nu juist $1-x^{20}$, of

$$1-x^{20} = \prod_{i=1}^{6} (1-x^{d_i}).$$

Ontbindt men op deze wijze alle factoren van $\Phi(x)$, dan neemt dit produkt den vorm aan

$$\Phi(x) = (\underline{1-x^{\alpha_1}})^{r_1} \,.\, (\underline{1-x^{\alpha_2}})^{r_2} \ldots (\underline{1-x^{\alpha_m}})^{r_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin de exponenten α, die we naar opklimmende grootte gerangschikt denken, de verschillende deelers aanduiden die in $a_1, a_2 \ldots a_r$ optreden terwijl het aantal der daarin voorkomende deelers a_i door r_i wordt voorgesteld. Hierbij is $\alpha_1=1$, $r_1=r$.

Is bijv. de gegeven vergelijking

$$x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 + 10\,x_4 + 20\,x_5 = n$$

dan is

$$\Phi(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})$$

$$1-x = \underline{1-x}$$
$$1-x^2 = \underline{1-x} \,.\, \underline{1-x^2}$$
$$1-x^5 = \underline{1-x} \,.\, \underline{1-x^5}$$
$$1-x^{10} = \underline{1-x} \,.\, \underline{1-x^2} \,.\, \underline{1-x^5} \,.\, \underline{1-x^{10}}$$
$$1-x^{20} = \underline{1-x} \,.\, \underline{1-x^2} \,.\, \underline{1-x^4} \,.\, \underline{1-x^5} \,.\, \underline{1-x^{10}} \,.\, \underline{1-x^{20}}$$

dus

$$\Phi(x) = \underline{(1-x)}^5 \quad \underline{(1-x^2)}^3 \quad \underline{(1-x^4)} \quad \underline{(1-x^5)}^3 \quad \underline{(1-x^{10})}^2 \quad \underline{(1-x^{20})}$$

Gaan we nu tot de ontbinding over, dan maken we gebruik van de bekende formule van CAUCHY

$$\frac{1}{\Phi(x)} = \mathcal{E} \frac{1}{((\Phi(z)))} \frac{1}{x-z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

waarin de dubbele haken aanwijzen dat de residu genomen moet worden voor alle wortels van de vergelijking $\Phi(z) = 0$, dus voor de wortels van de vergelijkingen

$$\underline{1-z}^{\alpha_1} = 0, \quad \underline{1-z}^{\alpha_2} = 0, \; . \; . \; . \; \underline{1-z}^{\alpha_m} = 0.$$

Schrijft men nu in het tweede lid van de vergelijking (5)

$$\frac{1}{x-z} = -\left(1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \; . \; . \; . + \frac{x^n}{z^n} + \; . \; . \; . \right)$$

dan vindt men onmiddellijk voor den coefficient van x^n

$$P_n = -\mathcal{E} \frac{1}{z^{n+1}} \frac{1}{((\Phi(z)))} = \sum_{i=1}^{m} W_{\alpha_i}$$

waarin

$$W_{\alpha_i} = -\mathcal{E} \frac{1}{z^{n+1} \, \underline{(1-z^{\alpha_1})}^{r_1} \, \underline{(1-z^{\alpha_2})}^{r_2} \; . \; . \; (\underline{(1-z^{\alpha_i})})^{r_i} \; . \; . \; \underline{(1-z^{\alpha_m})}^{r_m}}$$

of, zoo men den oorspronkelijken vorm van $\Phi(z)$ weer invoert

$$W_{\alpha_i} = -\mathcal{E} \frac{1}{z^{n+1} (1-z^{a_1}) (1-z^{a_2}) \; . \; . \; (1-z^{a_r})} \frac{\underline{1-z}^{\alpha_i}}{((\underline{1-z}^{\alpha_i}))}$$

waarin dus de residus genomen moeten worden voor alle wortels van de vergelijking

$$1-z^{\alpha_i} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Stelt men nu een willekeurige wortel van de laatste vergelijking voor door ϱ en verder

$$z = \varrho \, e^{-t}$$

dan wordt

$$W_{\alpha_i} = \Sigma \, \mathcal{E} \frac{\varrho^{-n} e^{nt}}{(1-\varrho^{a_1} e^{-a_1 t}) (1-\varrho^{a_2} e^{-a_2 t}) \; . \; . \; (1-\varrho^{a_r} e^{-a_r t})} \frac{t}{((t))} \quad . \; . \quad (7)$$

waarin nu de residu genomen moet worden voor de pool $t = 0$ en de sommatie zich uitstrekt over alle wortels van de vergelijking (6).

Bij de toepassing dezer formule kan de term W_1 nader worden uitgewerkt. Dan toch is de vergelijking (6)

$$\underline{1-z} = 0 \quad \text{of} \quad 1-z = 0$$

zoodat $\varrho = 1$. Derhalve bevat W_1 slechts één term nl. de residu voor de pool $t = 0$

$$W_1 = \mathcal{E} \frac{e^{nt}}{(1-e^{-a_1 t})(1-e^{-a_2 t}) \ldots (1-e^{-a_r t})} \frac{t}{((t))}$$

Deze residu is de coëfficient van $\frac{1}{t}$ in

$$X_1 = e^{nt - lg(1-e^{-a_1 t}) - lg(1-e^{-a_2 t}) \ldots - lg(1-e^{-a_r t})}$$

Nu is

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = -\tfrac{1}{2} + \frac{B_1}{2\,!} z - \frac{B_2}{4\,!} z^3 + \frac{B_3}{6\,!} z^5 - \ldots \qquad mod\ z < 2\pi$$

waarin

$$B_1 = \tfrac{1}{6}, \qquad B_2 = \tfrac{1}{30}, \qquad B_3 = \tfrac{1}{42}, \ldots$$

Integreert men beide leden dezer vergelijking tusschen 0 en z, dan komt

$$lg(1-e^{-z}) = lg\, z - \tfrac{1}{2} z + \frac{B_1}{2\,!}\frac{z_2}{2} - \frac{B_2}{4\,!}\frac{z^4}{4} + \frac{B_3}{6\,!}\frac{z^6}{6} - \ldots \qquad (a)$$

Met behulp dezer ontwikkeling wordt

$$X_1 = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r t^r} e^{\nu t - \frac{B_1}{1\,!}\frac{s_2 t^2}{2^2} + \frac{B_2}{3\,!}\frac{s_4 t^4}{4^2} - \ldots}$$

zijnde

$$\nu = n + \tfrac{1}{2} s_1 \quad \text{en} \quad s_i = a_1{}^i + a_2 i + \ldots a_r{}^i$$

Derhalve vinden we voor W_1, evenals SYLVESTER, den coëfficient van t^{r-1} in het produkt

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r}\left(1 + \nu t + \frac{1}{2\,!}\nu^2 t^2 + \frac{1}{3\,!}\nu^3 t^3 + \frac{1}{4\,!}\nu^4 t^4 + \ldots\right.$$
$$\left(1 - \frac{s_2}{24} t^2 + \frac{s_2{}^2}{1152} t^4 - \ldots\right)$$
$$\left(1 + \frac{s_4}{2880} t^4 \ldots\right)$$

. . . .

Passen we het voorgaande toe op het voorbeeld

$$x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 + 10\,x_4 + 20\,x_5 = n.$$

De verschillende deelers van 1, 2, 5, 10, 20 zijnde

1, 2, 4, 5, 10, 20

zoo is

$$\Phi(x) = \underline{(1-x)^5}\,\underline{(1-x^2)^3}\,\underline{(1-x^4)}\,\underline{(1-x^5)^3}\,\underline{(1-x^{10})^2}\,\underline{(1-x^{20})}$$

We moeten dus berekenen W_1 W_2 W_4 W_5 W_{10} en W_{20}.

Volgens het voorgaande is W_1 de coeff van t^4 in het bovenstaande produkt waarin

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 10, \quad a_5 = 20$$

$$s_1 = 38, \quad s_2 = 530, \quad s_4 = 170642, \quad v = n + 19$$

derhalve

$$W_1 = \frac{1}{48000}\left[v^4 - 265\, v^2 + \frac{72741}{10}\right]$$

of

$$W_1 = \frac{1}{48000}\left[n^4 + 76\, n^3 + 1901\, n^2 + 17366\, n + 41930\,\frac{1}{10}\right].$$

Voor W_2 wordt de vergelijking (6)

$$\underline{1 - z^2} = 0$$

of

$$1 + z = 0.$$

De eenige wortel $\varrho = -1$ zijnde, zoo bestaat W_2 slechts uit één term

$$W_2 = \mathcal{E}\,\frac{(-1)^n\, e^{nt}}{(1+e^{-t})\,(1-e^{-2t})\,(1+e^{-5t})\,(1-e^{-10t})\,(1-e^{-20t})}\;\frac{t}{((t))}$$

of $(-1)^n$ maal de coëfficient van $\dfrac{1}{t}$ in

$$X_2 = e^{nt - lg(1+e^{-t}) - lg(1-e^{-2t}) - lg(1+e^{-5t}) - lg(1-e^{-10t}) - lg(1-e^{-20t})}.$$

Daar nu volgens de vergelijking (a)

$$\left.\begin{aligned} &lg\,(1+e^{-z}) = lg\,(1-e^{-2z}) - lg\,(1-e^{-z}) = \\ &\quad = lg\, z - \frac{z}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{B_1}{2\,!}\,z^2 - \frac{15}{16}\cdot\frac{B_2}{4\,!}\,z^4 + \,.\,. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

zoo vinden we met behulp van (a) en (b)

$$X_2 = \frac{1}{1600\, t^5}\left(1 + vt + \frac{v^2 t^2}{2\,!} + \,.\,.\right)\left(1 - \frac{97}{4}t^2 \ldots\right)$$

dus

$$W_2 = \frac{(-1)^n}{48000}\,(15\, v^2 - 727\tfrac{1}{2})$$

of

$$W_2 = \frac{(-1)^n}{48000}\,(15\, n^2 + 570\, n + 4687\tfrac{1}{2})$$

Voor W_4 wordt de vergelijking (6)

$$\underline{1 - z^4} = 0$$

of

$$1 + z^2 = 0$$

derhalve

$$W_4 = \Sigma \mathcal{E} \frac{\varrho^{-n} e^{nt}}{(1-\varrho e^{-t})(1-\varrho^2 e^{-2t})(1-\varrho^5 e^{-5t})(1-\varrho^{10} e^{-10t})(1-\varrho^{20} e^{-20t})} \frac{t}{((t))}$$

waarin de som genomen moet worden voor de beide wortels ϱ van de vorige vergelijking. We kunnen dus ϱ^2 door -1 vervangen, zoodat

$$W_4 = \Sigma \mathcal{E} \frac{\varrho^{-n} e^{nt}}{(1-\varrho e^{-t})(1+e^{-2t})(1-\varrho e^{-5t})(1+e^{-10t})(1-e^{-20t})} \frac{t}{((t))}$$

$$= \frac{1}{80} \Sigma \frac{\varrho^{-n}}{(1-\varrho)^2} = -\frac{1}{160} \Sigma \varrho^{-n-1}$$

Schrijven we nu Σ_p voor de som der p^e machten van de wortels der vergelijking $1 + z^2 = 0$ en merken op dat $\varrho^4 = 1$, dan is

$$\Sigma_0 = 2 \qquad \Sigma_1 = 0 \qquad \Sigma_2 = -2 \qquad \Sigma_3 = 0$$

en algemeen

$$\Sigma_{4k} = 2 \qquad \Sigma_{4k+1} = 0 \qquad \Sigma_{4k+2} = -2 \qquad \Sigma_{4k+3} = 0$$

dus

$$W_4 = -\frac{1}{160} \Sigma_{3n-1}$$

Naar gelang dus $n = 4p,\ 4p+1,\ 4p+2,\ 4p+3$, heeft men

$$W_4 = \frac{600}{48000} (0,\ 1,\ 0,\ -1)$$

Voor W_5 wordt de vergelijking (6)

$$\underline{1 - x^5} = 0$$

of

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$$

dus

$$W_5 = \Sigma \mathcal{E} \frac{\varrho^{-n} e^{nt}}{(1-\varrho e^{-t})(1-\varrho^2 e^{-2t})(1-e^{-5t})(1-e^{-10t})(1-e^{-20t})} \frac{t}{((t))}$$

Zij

$$X_5 = e^{nt - lg(1-\varrho e^{-t}) - lg(1-\varrho^2 e^{-2t}) - lg(1-e^{-5t}) - lg(1-e^{-10t}) - lg(1-e^{-20t})}$$

dan komt met behulp van de vergelijkingen (a) en (b)

$$X_5 = \frac{e^{\left(n - \frac{\varrho}{1-\varrho} - \frac{2\varrho^2}{1-\varrho^2} + \frac{35}{2}\right)t + \left(\frac{\varrho}{2(1-\varrho)^2} + \frac{4\varrho^2}{2(1-\varrho^2)^2} - \frac{525}{24}\right)t^2}}{1000\,(1-\varrho)\,(1-\varrho^2)\,t^3}$$

Bepaalt men hieruit den coëfficient van $\frac{1}{t}$ dan vindt men

$$W_5 = \Sigma \frac{\varrho^{-n}}{2000\,(1-\varrho)\,(1-\varrho^2)} \left[n^2 + \left(35 - \frac{2\varrho + 6\varrho^2}{1-\varrho^2}\right) n + \right.$$
$$\left. + \frac{525}{2} - \frac{34\varrho + 98\varrho^2 - 42\varrho^3 - 114\varrho^4}{(1-\varrho^2)^2} \right]$$

of

$$W_5 = \frac{n^2 + 35n + \frac{525}{2}}{2000} \Sigma \frac{\varrho^{-n}}{(1-\varrho)(1-\varrho^2)}$$

$$- \frac{n}{2000} \Sigma \frac{\varrho^{-n}(2\varrho + 6\varrho^2)}{(1-\varrho)(1-\varrho^2)^2}$$

$$- \frac{1}{2000} \Sigma \frac{\varrho^{-n}(34\varrho + 98\varrho^2 - 42\varrho^3 - 114\varrho^4)}{(1-\varrho)(1-\varrho^2)^3}$$

Met dezelfde notaties als boven d.i.

$$\Sigma_0 = 4 \quad \Sigma_1 = -1 \quad \Sigma_2 = -1 \quad \Sigma_3 = -1 \quad \Sigma_4 = -1$$

dus algemeen

$$\Sigma_{5k} = 4, \quad \Sigma_{5k+1} = -1 \quad \Sigma_{5k+2} = -1 \quad \Sigma_{5k+3} = -1 \quad \Sigma_{5k+4} = -1$$

vindt men, naar gelang $n = 5p,\ 5p+1,\ 5p+2,\ 5p+3,\ 5p+4$

$$\Sigma \frac{\varrho^{-n}}{(1-\varrho)(1-\varrho^2)} = \frac{1}{5} \Sigma \varrho^{-n}(1-\varrho^3)(1-\varrho^4) = \frac{1}{5} \Sigma \varrho^{4n}(1+\varrho^2-\varrho^3-\varrho^4) =$$

$$= \frac{1}{5}(\Sigma_{4n} + \Sigma_{4n+2} - \Sigma_{4n+3} - \Sigma_{4n+4}) = (1,\ 0,\ 1,\ -1,\ -1)$$

$$\Sigma \frac{\varrho^{-n}(2\varrho + 6\varrho^2)}{(1-\varrho)(1-\varrho^2)^2} = \frac{1}{5}(2\,\Sigma_{4n+3} + 4\,\Sigma_{4n+4} - 6\,\Sigma_{4n}) = (-6,\ 0,\ 0,\ 2,\ 4)$$

$$\Sigma \frac{\varrho^{-n}(34\varrho + 98\varrho^2 - 42\varrho^3 - 114\varrho^4)}{(1-\varrho)(1-\varrho^2)^3} = \frac{1}{25}(-538\,\Sigma_{4n} - 8\,\Sigma_{4n+1} +$$

$$+ 32\,\Sigma_{4n+2} + 162\,\Sigma_{4n+3} + 352\,\Sigma_{4n+4}) = \frac{2}{5}(-269,\ -4,\ 16,\ 81,\ 176)$$

Derhalve

$$W_5 = \frac{1}{48000}(24n^2 + 840n + 6300)(1,\ 0,\ 1,\ -1,\ -1)$$

$$+ \frac{1}{48000} \cdot 48n\,(3,\ 0,\ 0,\ -1,\ -2)$$

$$+ \frac{1}{48000}\,\frac{48}{5}(269,\ 4,\ -16,\ -81,\ -176)$$

Op dezelfde wijze vindt men, naar gelang

$$n = 10p, \quad 10p+1, \quad 10p+2, \ldots \quad 10p+9$$

$$W_{10} = \frac{1}{48000}(120\,n + 1800)(-1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 0,\ -1,\ -3,\ -3)$$

$$+ \frac{1}{48000} \cdot 60\,(5,\ 16,\ 21,\ 29,\ 19,\ -5,\ -16,\ -21,\ -29,\ -19)$$

en naar gelang

$$n = 20\,p, \quad 20\,p+1, \quad 20\,p+1, \; . \; . \; . \quad 20\,p+19$$

$$W_{20} = \frac{1200}{48000}(-5,\ -8,\ -5,\ -7,\ -5,\ -3,\ 0,\ 3,\ 5,\ 7,$$

$$5,\ 8,\ 5,\ 7,\ 5,\ 3,\ 0,\ -3,\ -5,\ -7)$$

Uit de vorige formules kunnen wij de aantallen oplossingen afleiden voor $n = 20p + q$ $(q = 0,1 \,.\,.\, 19)$.

Voor $n = 20p + 7$ staat deze berekening bijv zoo

$$W_1 = \frac{1}{48000}(n^4 + 76n^3 + 1901n^2 + 17366n + 41930\tfrac{1}{10})$$

$$W_2 = \frac{1}{48000}(\qquad - 15n^2 - 570n - 4687\tfrac{1}{2})$$

$$W_4 = \frac{1}{48000}(\qquad - 600)$$

$$W_5 = \frac{1}{48000}(\qquad 24n^2 + 840n + 6300)$$

$$+ \frac{1}{48000}(\qquad - 153\tfrac{3}{5})$$

$$W_{10} = \frac{1}{48000}(\qquad - 120n - 1800)$$

$$+ \frac{1}{48000}(\qquad - 1260)$$

$$W_{20} = \frac{1}{48000}(\qquad 3600)$$

dus

$$\Sigma\, W_{\alpha_i} = \frac{1}{48000}(n^4 + 76n^3 + 1910n^2 + 17516n + 43329)$$

$$= \tfrac{1}{3}(p+1)(p+2)(10\,p^2 + 22\,p + 9).$$

Dat dit getal geheel is ziet men gemakkelijk wanneer men het schrijft

$$\tfrac{1}{3}\,p\,(p+1)(p+2)(10\,p^2 + 22) + 3\,(p+1)(p+2).$$

Uit het voorgaande blijkt dus dat in de formule van SYLVESTER

$$W_{\alpha_i} = \Sigma\, \mathcal{E} \frac{\varrho^n\, e^{nt}}{(1-\varrho^{a_1} e^{-a_1 t})(1-\varrho^{a_2} e^{-a_2 t}) \;.\;.\; (1-\varrho^{a_r} e^{-a_r t})}\; \frac{t}{((t))}$$

ϱ^n in ϱ^{-n} veranderd moet worden. Bij de berekening van W_1 en W_2 geeft deze verandering geen verschil, wel echter bij de overige termen W. In het voorbeeld dat SYLVESTER behandelt nl.

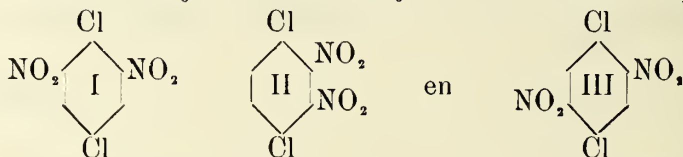
$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 + 5\,x_5 + 6\,x_6 = n$$

moeten dus ook de termen W_3 W_4 W_5 W_6 herzien worden.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt, namens de Heeren A. J. DEN HOLLANDER en F. E. VAN HAEFTEN eene mededeeling aan: „*Over de nitratie-producten van p-dichloorbenzol.*"

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGEWERFF).

JUNGFLEISCH [1]) heeft in 1868 p-dichloorbenzol genitreerd door het met een mengsel van rookend salpeterzuur en zwavelzuur gedurende eenige uren te koken. Hij verkreeg daardoor een mengsel van dinitro-p-dichloorbenzolen, omtrent welks samenstelling de meeningen nog steeds verdeeld zijn. Theoretisch zijn er drie isomeren mogelijk n.l.



JUNGFLEISCH zelf isoleerde er twee verbindingen uit, die hij met α en β aanduidde, doch welker structuur hij niet bepaalde. Voor de α-verbinding gaf hij het smp. 87°, voor de β-verb. 107° op. Van de eerste ontstaat volgens hem veel meer dan van de tweede. Door KÖRNER [2]) en veel later door ULLMANN en SAKE [3]) is voor dit hoofdproduct de structuur I bewezen; het smeltpunt werd door hen echter bij 105° gevonden. ENGELHARDT en LATSCHINOFF [4]) hadden dit hoogere smp. ook reeds waargenomen, en konden ook uit het reactieproduct de β-verbinding isoleeren, bevestigden dus in hoofdzaak de resultaten van JUNGFLEISCH.

Daarentegen beweren MORGAN en NORMAN [5]) dat verbinding III als hoofdproduct ontstaat; HARTLEY en COHEN [6]), die hunne proeven herhaalden, bevestigen dit en geven als smeltpunt 105—106° op. Eindelijk heeft Mej. EDITH NASON [7]) in het vorige jaar op nieuw p-dichloorbenzol genitreerd en uit het reactiemengsel eveneens III in eene opbrengst van 45.6 % vermogen te isoleeren, waarvoor zij echter het smp. 81° opgeeft.

---

[1]) A. ch. (4), **15** 259.

[2]) J. 1875, 324.

[3]) B. **44**, 3730 (1912).

[4]) Z. 1870, 234.

[5]) Soc. **81**, 1378, 1382 (1902).

[6]) Soc. **85**, 868 (1904).

[7]) Am. Soc. **40**, 1602 (1918).

De structuurbewijzen, die deze onderzoekers voor hun vermeend isomeer III aangeven, zijn echter geheel onvoldoende. Er bleef dus nog uit te maken: 1°. welk isomeer of welke isomeren naast I (waaromtrent iedereen het eens is) ontstaan; 2°. een afdoend structuurbewijs voor dat isomeer of die isomeren te leveren.

De Heeren DEN HOLLANDER en VAN HAEFTEN hebben nu in de eerste plaats aangetoond, dat alle drie isomeren ontstaan, en wel I als hoofdproduct, II en III als nevenproducten. Zij zijn daarbij als volgt te werk gegaan: Het ruwe reactieproduct wordt met een overmaat van 4 N-alcoholische ammonia overgoten, en wel op 1 mol dichloordinitrobenzol 4 mol NH_3. Na eenig omroeren gaat alles in oplossing. Men laat nu gedurende eenige dagen bij kamertemperatuur staan.

Hierbij wordt I omgezet in NH_2, NO_2, NO_2, Cl 2-6-dinitro-4-chlooraniline, smp. 145°, dat zich grootendeels in fijne naaldjes en nagenoeg zuiver afzet. Men filtreert nu en distilleert het alcoholische filtraat af; hierbij blijft een rest terug, die uit de isomeren II en III bestaat, maar ook nog een zekere hoeveelheid van bovengenoemd chloordinitraniline bevat. Deze rest wordt met water uitgewasschen om Amnitriet te verwijderen, daarna gedroogd en in ca. ½ L. benzol opgelost (als van 1 mol. reactieproduct is uitgegaan). Deze oplossing wordt eenige malen met 20 cc. geconc. zwavelzuur uitgeschud, waardoor het chloordinitraniline verwijderd wordt. Dit is het geval, als het zwavelzuur zich niet meer kleurt.

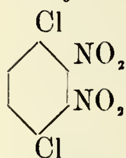
Daarna wordt het benzol afgedistilleerd; men houdt dan een residu over, dat uit de verbindingen II en III bestaat, zooals kan worden aangetoond door het opnieuw met alcoholische ammoniak te behandelen, en wel op 50 gr. mengsel 100 cc. 4 N. NH_3. Thans echter wordt gedurende 24 uur op een waterbad aan een opstijgenden koeler gedigereerd (temp. in de kolf 80—85°) en eenige malen ammoniakgas ingeleid om het verlies te compenseeren. Men neutraliseert nu de vloeistof, distilleert het grootste gedeelte van den alcohol af en giet de rest in water uit. Door behandeling van het reactie-product met zwavelzuur, als boven aangegeven, gaat 2-nitro-3-6-dichlooraniline

Cl, NH_2, NO_2, Cl in oplossing en 1-4-dichloor-2-5-dinitrobenzol Cl, NO_2, NO_2, Cl

blijft achter.

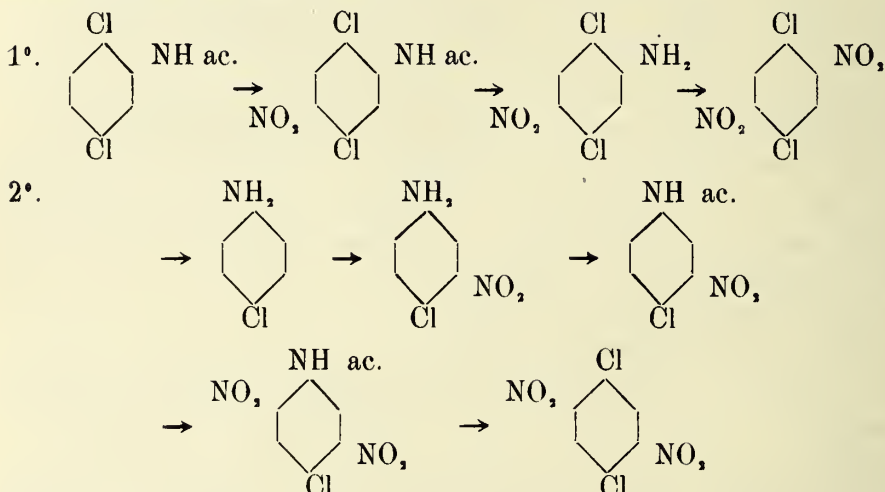
Na omkristallisatie uit alcohol is dit laatste zuiver en vertoont dan het smeltpunt van 119°.

De vorming van 2-nitro-3-6-dichlooraniline, smp. 68°, waarvan de structuur door een onderzoek van BEILSTEIN en KURBATOW [1]) vaststaat, bewijst dat in het ruwe reactieproduct het 1-4-dichloor-2-3-dinitrobenzol



aanwezig moet zijn. Inderdaad kon er dit ook door langdurige gefractioneerde kristallisatie uit alcohol uit worden afgescheiden. Het is waarschijnlijk het isomeer β van JUNGFLEISCH en smelt bij 103°. De structuur werd bewezen, door in 2-nitro-3-6-dichlooraniline de NH_2-groep door NO_2 te vervangen volgens de methode van KÖRNER en CONTARDI [2]).

Voor het derde isomeer van het smp. 119° blijft dus enkel de structuurformule III over. Deze werd echter nog op de beide volgende wijzen nader bewezen:



waarbij de structuur der tusschenproducten telkens werd vastgesteld.

Wil men uit het ruwe nitratieproduct van JUNGFLEISCH de drie bestanddeelen afzonderen, dan gelukt het wel door zeer langdurige gefractioneerde kristallisatie uit alcohol om de verbindingen I en II in zuiveren toestand te verkrijgen, niet echter III. Men verkrijgt nl. ten slotte eene vrij aanzienlijke hoeveelheid eener bloemkoolachtige massa, die voor verdere scheiding door kristallisatie niet meer bruikbaar is, en die — blijkens de daarop toegepaste behandeling met alco-

[1]) A. 196, 221 (1879).
[2]) Atti (5) 22 II, 632 (1913).

holische ammoniak als boven aangegeven — in hoofdzaak uit I, verder uit een weinig II en vrij veel III bestaat. Rationeeler is het, om het ruwe nitratieproduct in zijn geheel met alcoholische ammoniak, eerst bij gewone temperatuur, vervolgens bij 80—85° te behandelen,

omdat uit de verkregen verbindingen

NH_2 / NO_2 NO_2 / Cl en Cl / NH_2 / NO_2 / Cl

zich de overeenkomstige dichloordinitrobenzolen door diazotatie gemakkelijk laten terugwinnen.

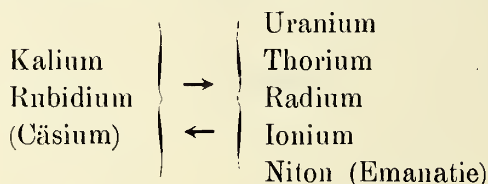
Eene uitvoerige beschrijving van dit onderzoek zal binnenkort in het Recueil verschijnen.

November 1919. *Org. chem. lab. d. Univ. v. Amsterdam.*

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van Prof. A. J. P. v. d. BROEK: *„Over den invloed van radioaktieve elementen op de ontwikkeling.”*

(Mede aangeboden door den Heer BOEKE).

Eén van de elementen, die de levende stof opbouwen, het kalium, is radioaktief. De onderzoekingen van ZWAARDEMAKER en zijn leerlingen omtrent de beteekenis van het kalium in het organisme, hebben geleerd dat, in hoofdzaak bij doorstroomingsproeven van het geïsoleerde kikvorschhart, het kalium door eene aequiradioaktieve hoeveelheid van elk ander radioaktief element kan worden vervangen. Op grond hiervan komt ZWAARDEMAKER tot de uitspraak[1]): „die Radioaktivität und keine andere Eigenschaft der sich gegenseitig vertretenden Atome erfüllt die für die Automatie notwendige Bedingung” (l.c. blz. 49). Naast deze vervangbaarheid heeft ZWAARDEMAKER de aandacht op een tweede verschijnsel gevestigd, n.l. op een antagonisme tusschen verschillende groepen van radioaktieve elementen. In het volgend schema komt dit antagonisme tot uitdrukking:



Kan dus bij bepaalde proeven het uranium het kalium vervangen, beide elementen te zamen heffen elkaars werking op.

Deze onderzoekingen deden de vraag rijzen of het mogelijk ware tijdens de ontwikkeling het kalium door een ander radioaktief element te vervangen. Ik heb getracht op deze vraag door proefondervindelijk onderzoek een antwoord te verkrijgen. Van de genomen proeven en verkregen resultaten wil ik een kort overzicht geven.

De proeven werden met kikvorscheieren genomen en als volgt ingericht.

Onmiddellijk na de bevruchting (in het laboratorium) wordt de eimassa in gelijke hoeveelheden verdeeld en deze worden in vloei-

---

[1]) H. ZWAARDEMAKER, Die Bedeutung des Kaliums im Organismus. Pflügers' Archiv. Bd. 173.

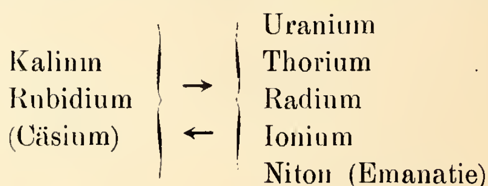
A. J. P. v. d. BROEK: „Over den invloed van radio-aktieve elementen op de ontwikkeling".

	18 Mei	29 Mei	26 Juni	26 Juli
32½ mgr Ur. p L.				
25 mgr Ur. p L.				
50 mgr Ur. p L.				
				6 Aug.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van Prof. A. J. P. v. d. BROEK: *„Over den invloed van radioaktieve elementen op de ontwikkeling.”*

(Mede aangeboden door den Heer BOEKE).

Eén van de elementen, die de levende stof opbouwen, het kalium, is radioaktief. De onderzoekingen van ZWAARDEMAKER en zijn leerlingen omtrent de beteekenis van het kalium in het organisme, hebben geleerd dat, in hoofdzaak bij doorstroomingsproeven van het geïsoleerde kikvorschhart, het kalium door eene aequiradioaktieve hoeveelheid van elk ander radioaktief element kan worden vervangen. Op grond hiervan komt ZWAARDEMAKER tot de uitspraak[1]: „die Radioaktivität und keine andere Eigenschaft der sich gegenseitig vertretenden Atome erfüllt die für die Automatie notwendige Bedingung” (l.c. blz. 49). Naast deze vervangbaarheid heeft ZWAARDEMAKER de aandacht op een tweede verschijnsel gevestigd, n.l. op een antagonisme tusschen verschillende groepen van radioaktieve elementen. In het volgend schema komt dit antagonisme tot uitdrukking:



Kan dus bij bepaalde proeven het uranium het kalium vervangen, beide elementen te zamen heffen elkaars werking op.

Deze onderzoekingen deden de vraag rijzen of het mogelijk ware tijdens de ontwikkeling het kalium door een ander radioaktief element te vervangen. Ik heb getracht op deze vraag door proefondervindelijk onderzoek een antwoord te verkrijgen. Van de genomen proeven en verkregen resultaten wil ik een kort overzicht geven.

De proeven werden met kikvorscheieren genomen en als volgt ingericht.

Onmiddellijk na de bevruchting (in het laboratorium) wordt de eimassa in gelijke hoeveelheden verdeeld en deze worden in vloei-

[1]) H. ZWAARDEMAKER, Die Bedeutung des Kaliums im Organismus. Pflügers' Archiv. Bd. 173.

A. J. P. v. d. BROEK: „Over den invloed van radio-aktieve elementen op de ontwikkeling".

Op de bijgevoegde plaat zijn minimum- en maximumgrootte van larven uit verschillende uraniumhoudende vloeistoffen en die welke aan rijst- en aan dierlijk voedsel waren onderworpen, op verschillende tijdstippen weergegeven.

stoffen geplaatst waarin kalium of een hoeveelheid van een uraanzout is opgelost.

Terwijl in het Utrechtsche leidingwater praktisch geen kalium wordt aangetroffen, werd tevens zooveel mogelijk zorg gedragen de ,,uraanlarven" met een kaliloos voedsel groot te brengen, terwijl de in kaliumhoudende vloeistof geplaatste larven zooveel mogelijk gewoon (dierlijk) voedsel kregen. Als kaliumloos voedsel werd rijst verstrekt, die in gedistilleerd water gekookt was. Ten einde te ontgaan, dat kalium uit het glas, waarin in het eerste proefjaar ook de uraanlarven verbleven, zou worden opgelost en opgenomen, werden in het tweede (en derde) jaar de uraanlarven in kwartsbakken groot gebracht.

I. Een eerste reeks van proefnemingen bestond in de toevoeging van bepaalde quanta uraniumnitraat aan het water.

Ter compenseering van het in de eieren aanwezige kalium werd 4 $^1/_2$ mgr. uraannitraat per liter gegeven; bovendien nog 12.5, 25 mgr. (dus in het geheel 17 en 29 $^1/_2$ mgr.) en 50 mgr. per liter.

Naast de larven in deze vloeistoffen werden andere in gewoon leidingwater groot gebracht met piscidine [1]) en met rijst.

De eieren waren gelegd op 14 April. De ,,piscidine" larven zijn op 29 Mei 11—12 m.m. [2]) groot en bezitten achterpooten; op 6 Juni zijn er larven van 14.2 m.m. met achter en voorpooten; dan volgt regelmatig de metamorphose en staartreductie. Op 26 Juni zijn er nog slechts enkele larven van 8—12 m.m. die nog niet gemetamorphoseerd zijn.

De rijstlarven ontwikkelen aanmerkelijk langzamer; daarbij blijkt tevens, dat op een zelfde tijdstip de mate van ontwikkeling der larven vrij sterk kan uiteenloopen. Op 26 Juni vind ik larven van 6—12 m.m.; dan gaat de groei langzaam door; op 6 Augustus vind ik de eerste algeheele metamorphosen (staart verdwenen); de grootte is dan 15 m.m. Op 10 October komt nog eene staartreductie tot stand. Enkele larven metamorphoseeren niet, doch groeien tot zeer groote dieren uit, n.l. 16—17 m.m., die slechts achterpooten hebben.

Wat nu de uraanlarven betreft zijn de meest op den voorgrond tredende kenmerken het achterblijven in groei en de verlangzaming der ontwikkeling. De volgende tabel licht ons omtrent de grootte in.

Uit deze tabel blijkt wel, dat de ontwikkeling aanmerkelijk langzamer is gegaan dan bij de controle-dieren, en dat ook de afmetingen

[1]) Piscidine is een preparaat dat uit gedroogde en gepoederde visch bestaat.

[2]) Bij deze en alle volgende maten geldt de lengte vanaf de punt van den kop tot het begin van den staart.

	4½ m.gr. uraannitraat per L.	17 m.gr. uraannitraat per L.	29½ m.gr. uraannitraat per L.
26 Juni	5.5—10 m.m.	5— 9.8 m.m.	5 —7.5 m.m.
10 Juli	6 —11 m.m.	5—10 m.m.	4.5—9 m.m.
30 Juli	7 —11 m.m.	6— 9.5 m.m.	5 —10 m.m.
14 Augustus	9.5 m.m.		
24 Augustus	10.5—11.5 m.m.		
3 September	12 m.m. } voorp. begin	10.2 m.m. } voorp. begin	
14 September	11 m.m. } staartred.	8.4 m.m. } staartred.	8.5—9.6 m.m. (voorp.)
27 November	10 m.m.	11 m.m.	8—11.8 m.m.

geringer zijn. Al zijn de verschillen klein, toch schijnt het, dat de larven des te kleiner zijn, naarmate de quantiteit uraannitraat grooter is. Dit blijkt ook uit het volgende, meer gedetailleerde overzicht.

a. 4½ mgr. uranylnitraat per Liter.

26 Juni en 10 Juli zijn de maten als opgegeven; de grootste larven hebben slechts eene aanduiding van achterpootjes. 30 Juli bezitten de grootste larven achterpooten, die niet meer vlak langs den staart liggen, doch geabduceerd zijn. Op 14 Augustus braken voor het eerst, bij eene larve van 9.5 m.m. voorpooten door; op 3 September en 13 September werden de eerste staartreducties waargenomen. Op 27 November is de laatste larve 10 m.m. met kleine achterpootjes wegens teekenen van verminderende vitaliteit gedood en gefixeerd.

b. 17 mgr. uranylnitraat per Liter.

Van 14 April tot 10 Juli vordert de groei zeer weinig, dan is de maximumlengte eerst 10 mm. en zijn slechts uiterst kleine stompjes van achterpooten aanwezig; eerst op 30 Juli zijn bij ééne larve de achterpooten zoo groot, dat zij in abductie staan; op 3 September wordt de eerste staartreductie waargenomen; op 27 Nov. heeft de laatst levende larve eene lengte van 11 mm.

c. 29½ mgr. uranylnitraat per Liter.

De groei gaat nog langzamer dan bij de voorgaanden. Op 30 Juli vond ik larven met stompjes van achterpooten. Voor het eerst werd het begin van staartreductie op 7 September waargenomen; daarna regelmatig; de grootte der larven is dan 9,6—11,5 mm. 27 November werden de laatste 2 larven, 8.5 en 11 m.m. gefixeerd.

II. Op verschillende tijdstippen der ontwikkeling zijn larven uit de uraanoplossingen in gewoon leidingwater overgebracht. Dan bleek dat vrijwel onmiddellijk de ontwikkeling sneller verliep dan bij de larven die in de uraanoplossing bleven; met dien verstande natuurlijk weer, dat de met piscidine gevoederde larven sneller groeiden dan de rijstlarven.

III. Een aantal larven zijn op een jong stadium der ontwikkeling

(op 30 April) in een vloeistof gebracht, die eene hoeveelheid uraniumzout en een aequiradioaktieve hoeveelheid kalium bevatte. In deze vloeistof groeiden de larven bijna even snel als de contrôledieren; op 15 Juli vond ik reeds eene larve met voor- en achterpooten; verschillende andere larven krijgen deze spoedig; de kleinsten zijn 8—9 m.m. Deze larven groeiden dus sneller dan de uraanlarven.

Als algemeen resultaat der genomen proeven kan men zeggen, dat kikvorschlarven in een medium met een aan kalium antagonistische radio-aktieve stof minder snel groeien en metamorphoseeren dan in een medium, waarin alleen kalium is. De oorzaak dezer verlangzaming ligt niet in den aard van het aan de larven gegeven voedsel, want ook ten opzichte van met rijst gevoedde larven in gewoon water blijven de uraanlarven achter in groei.

De eerste vraag, die zich voordoet is deze, of de larven naast of in plaats van kalium ook uranium hebben opgenomen.

Deze vraag kan nog niet bevestigend beantwoord worden. Uit een onderzoek, door Prof. RINGER welwillend verricht, is gebleken, dat geen uranium in de larven aantoonbaar was.

In ander opzicht heeft dit onderzoek toch een zeer belangrijk resultaat gehad. Terwijl bij larven met piscidine gevoed, het percentage kalium bij twee bepalingen resp. 0.76 en 0.82 % van de gedroogde larven bedroeg, uraanlarven de minimale kaliumhoeveelheden klaarblijkelijk hadden opgenomen en zelfs 0.91 % kalium gevonden werd, bedroeg het kaliumgehalte van larven, waarbij in het water $17\frac{1}{2}$ m.gr. $UO_2(NO_3)_2$ en 50 m.gr. KCl. per Liter was gevoegd (dus aequiradioaktieve hoeveelheden) slechts 0.49 %. Het maakt hierbij dus den indruk of bij de aanwezigheid van ± aequiradioaktieve hoeveelheden der antagonistische stoffen de opname van kalium bemoeilijkt is. Merkwaardig intusschen dat de betrokken larven slechts weinig in groei achterbleven bij de normaal opgekweekte larven [1]).

Het achterblijven in groei zoude men aan eene mogelijke giftigheid van het uraniumzout kunnen toeschrijven.

In 1919 heb ik hieromtrent een enkele proef genomen. Op 6 Mei werden in bakken met 4 Liter water en resp. 0, $2\frac{1}{2}$, 5, $7\frac{1}{2}$ en 10 m.gr. uranium-acetaat elk 75 larven gebracht. Op 19 Juni waren in deze bakken nog in leven 51, 38, 24, 20 en 20 larven, zoodat het schijnt, alsof in hoogere concentraties de larven spoediger en in

[1]) Prof. RINGER maakt er opmerkzaam op, dat het scheikundig onderzoek, resp. het onderzoek op de radio-activiteit der gedroogde larven aan zoo geringe gewichtshoeveelheden der gedroogde larven is geschied, dat eene herhaling van dit onderzoek, met name naar de afwezigheid van uranium, gewenscht is.

grooter getale sterven. Dit resultaat is dan niet in overeenstemming met de resultaten van HIRSCH[1]), die meent dat de snelste ontwikkeling tot stand komt in de concentratie, die het dichtst bij de giftigheidsgrens staat. Men zoude dan in de hoogere concentraties eene snellere ontwikkeling verwachten dan in de lagere, wat niet gebleken is. Trouwens strekt HIRSCH zijne onderzoekingen telkens slechts over een kort tijdsverloop (7 dagen) uit, wat met het oog op de groote variabiliteit in de ontwikkeling van kikvorschlarven mij niet gewenscht voorkomt. Hoewel dus schijnbaar in de oplossingen met grooter hoeveelheid uraanzout een giftigheid niet onmogelijk is, pleiten de feiten dat vele larven zelfs in aanmerkelijk sterkere uraanoplossingen rustig voortleven en zich ontwikkelen en verder het ontbreken van uranium in het lichaam tegen het aannemen van de giftigheid van het uraniumzout als oorzaak der verlangzaming.

Mikroskopisch onderzoek van seriesneden van enkele uraniumlarven, vergeleken met normale larven van dezelfde grootte, heeft nog geen verschillen in bouw of ontwikkelingsgraad van bepaalde organen, die voor den groei van belang zijn, aan het licht gebracht.

---

1) E. HIRSCH. Die biologische Wirkung einiger Salze. Zoöl. Jahrbücher Band 34.

Geologie. — De Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF en M. WEBER bieden eene mededeeling aan: *Het verband tusschen den plistoceenen ijstijd en het ontstaan der Soenda-zee (Java- en Zuid-Chineesche Zee) en de invloed daarvan op de verspreiding der koraalriffen en op de land- en zoetwater-fauna.*

I. GEOLOGISCH GEDEELTE door G. A. F. MOLENGRAAFF.

De vastelandsplatten en de factoren, die hun vorming beheerschen.

Het is een bekend feit, dat de continenten over groote afstanden omgeven zijn door zeeën, waarvan de diepte zeer langzaam tot ongeveer 100 vaam toeneemt. Verder zeewaarts neemt deze sneller toe, totdat de gemiddelde diepte der oceanen is bereikt.

De bodems dier ondiepe zeeën worden de vastelands- of circum-continentale platten, te zamen wel het vastelandsplat of het plat (*the continental shelf*) genoemd. De totale vlakteuitgebreidheid van dat vastelandsplat is volgens MURRAY ongeveer 25.000.000 K.M.[2]

In de meeste handboeken wordt zelden iets medegedeeld over de wijze van ontstaan der vastelandsplatten, en wordt in hun bestaan min of meer als in een fataliteit berust. Ook overigens in de Europeesche geologische literatuur behoort het vraagstuk van het ontstaan der continentale platten tot de min of meer verwaarloosde. Ten onrechte, want de platten zijn in staat door hun al of niet voorkomen en door hun wijze van ontwikkeling veel licht te werpen op de geologische geschiedenis van een bepaald gebied.

Platten moeten ontstaan om ieder continent, zoolang zijn ligging ten opzichte van den zeespiegel onveranderd blijft; het plat wordt dan opgebouwd en zeewaarts uitgebouwd door de sedimenten, waarvan het materiaal door het totaal van alle denudeerende werkingen[1]) van het land naar de zee is getransporteerd[2]). Bij voortschrijdende denudatie blijkt toenemender mate, dat het circum-continentale plat de geleidelijke onderzeesche voortzetting is van de boven den zee-

[1]) Hierin is ook begrepen de werking der brandingsgolven, de afslag aan de kusten en de vorming van het abrasievlak.

[2]) Zoolang de toestand van stabiliteit van land en zee ten opzichte van elkaar blijft bestaan, zal het plat door groei zeewaarts in uitgebreidheid toenemen, landwaarts zal het echter terrein inboeten, omdat de schiervlakte zich bij toenemende denudatie niet alleen landwaarts uitbreidt maar ook door aanslibbing of verlanding eenig terrein op het plat verovert.

spiegel gelegen schiervlakte.[1]) De groei van het plat zeewaarts neemt slechts een eind, als het bedoelde continent tot nagenoeg aan zijn eindniveau is geërodeerd, d. w. z. een volmaakte schiervlakte is geworden.

Hiervan zijn geen voorbeelden bekend, omdat de platvorming telkens (al geschiedt dat met tusschenpoozen van duizenden jaren, zal men het woord „telkens" geologisch niettemin mogen gebruiken) wordt gewijzigd of tegengegaan of ook wel eens wordt versneld door bewegingen van land en zee ten opzichte van elkaar.

Om juist te kunnen beoordeelen, hoe die bewegingen de platvorming beïnvloeden, verdient het aanbeveling den naam *gradatievlak* te geven aan het vlak, dat men zich kan ontstaan denken uit de vereeniging van schiervlakte en plat. Vastelandsplat is dan het gedeelte van het gradatievlak, dat door de zee wordt bedekt, schiervlakte het gedeelte, dat boven water uitsteekt.

Het wordt dan duidelijk, dat de ontwikkeling van het plat afhankelijk is

1°. van de ontwikkeling van het geheele gradatievlak,

2°. van de mate van onderdompeling van het gradatievlak,

3°. van den stand van het gradatievlak.

De uitgebreidheid van het plat houdt vooreerst ceteris paribus gelijken tred met den groei van het geheele gradatievlak, maar, onafhankelijk daarvan, neemt zij ook toe en af al naarmate meer of minder van het gradatievlak beneden den zeespiegel komt te liggen. Eindelijk wordt zij beïnvloed door den stand van het gradatievlak; wordt dit uit den oorspronkelijken, zeer zwak zeewaarts hellenden stand door bodembewegingen in een anderen, bijv. in een steileren stand gebracht, dan zal gedurende die beweging de diepte van het water op het plat zeewaarts telkens meer toenemen en dit zal ten gevolge hebben, dat de sedimenten, die van het land zeewaarts gevoerd worden, telkens meer ruimte vinden en allicht niet meer in staat zullen blijven om het plat tot nabij den zeespiegel op te bouwen en dus nog veel minder om het plat zeewaarts uit te breiden.

De bovengenoemde drie voorwaarden voeren tot de volgende besluiten:

1. Diastrophisme, dat gewoonlijk de hellingen van den vasten bodem zoo boven als onder de zee, dus ook die van het gradatie-

[1]) Terecht worden denudatie van het land en opbouw van het plat door Chamberlin beschouwd als de twee deelen van een grooter proces, dat hij *gradatie* noemt.
T. C. Chamberlin. Diastrophism and the formative processes. III. Journal of Geology XXI. p. 585, 1913.

vlak zal vergrooten, werkt daardoor in eerste instantie de platvorming bijna altijd tegen en zal aanvankelijk meestal steile kusten met gering ontwikkelde of ontbrekende platten doen ontstaan. Veelal echter leidt diastrophisme een nieuwen cyclus van erosie in, doet dus het denudatieproces herleven en heeft daardoor op den duur versterkte gradatie en daarmede groei der vastelandsplatten ten gevolge.

Een tijdperk, dat terstond volgt op een periode van diastrophisme, zal voor de gebieden, die door het proces zijn getroffen, er een zijn van krachtige denudatie, sterke sedimentatie en daarmede van overeenkomstige ontwikkeling van het gradatievlak en dus ook van groei van het vastelandsplat.

2. Negatieve beweging der strandlijn, d.i. rijzing van het land of daling van den zeespiegel, zal eo ipso, dus onmiddellijk, het vastelandsplat smaller maken of geheel doen verdwijnen door uitbreiding van het bovenzeesche deel van het gradatievlak ten koste van het onderzeesche deel, maar daar tegenover zal zulk een beweging door verlagen van het eindvlak van denudatie (*base-level*) de erosie krachtiger maken en dus op den duur den groei van het vastelandsplat zeewaarts weer bevorderen.

3. Positieve beweging der strandlijn, d.i. daling van het land of rijzing van den zeespiegel, zal eo ipso, dus onmiddellijk, de breedte van het vastelandsplat doen toenemen door uitbreiding van het onderzeesche deel van het gradatievlak ten koste van het bovenzeesche, al wordt op den duur de groei er van, doordat het eindvlak van denudatie in een hooger niveau wordt gebracht, tegengegaan. Zelfs al is bij intreden van zulk een positieve beweging het bovenzeesche deel van het gradatievlak weinig of niet ontwikkeld, dan zijn er toch nog omstandigheden denkbaar, waarbij het plat dan sterk in uitbreiding zal toenemen. Dit heeft plaats, zoo de rijzing van den zeespiegel langzaam gaat maar lang aanhoudt. Dan zal de zee, ook al biedt het land hevigen weerstand, in staat zijn over zeer groote afstanden terrein te veroveren, het land tot aan het abrasievlak te vernietigen en het abrasievlak bij het plat in te lijven. Geldt het een eiland van niet al te groote uitgestrektheid, dan zal dit geheel afgeknot en met den zeespiegel gelijk gemaakt kunnen worden, d. w. z. tot een vlak gemaakt worden, dat nergens boven de oppervlakte der zee zal uitsteken en zeer zwak zal hellen in de richting van de zijde, van waar de zee gewoonlijk placht aan te grijpen, dus bijv. in de richting van waar heerschende winden waaien. Zulk èen eiland wordt dus een onderzeesche, nagenoeg geheel vlakke bank.

Het is duidelijk dat de bovengenoemde uitbreiding van het vastelandsplat bij positieve strandverschuiving sneller, gemakkelijker

en volkomener zal plaats hebben, zoo aan die positieve beweging een periode van stabiliteit van het land en dus van schiervlaktevorming is voorafgegaan. Immers behoeft dan de zee niet met groote inspanning het land te vernielen en op te ruimen om een abrasievlak te vormen en bij het plat in te lijven, maar zij vindt dan reeds een schiervlakte, dus een laag land van groote vlakteuitgebreidheid aanwezig dat zij zonder strijd kan veroveren en tot een plat maken.

En in nog hoogere mate zal dit het geval zijn, wanneer aan die periode van stabiliteit weder een van diastrophisme is voorafgegaan, omdat zij dan zal gekenmerkt zijn door krachtige ontwikkeling der processen van peneplenisatie en sedimentatie. De transgressie der zee treedt dan in op een oogenblik, dat zoowel het plat als de daaraan aansluitende schiervlakte reeds sterk zijn ontwikkeld [1]) en met haar intreden onder deze omstandigheden zijn optimale condities voor de uitbreiding van het vastelandsplat verwezenlijkt.

Waar nu op aarde in uiteengelegen gebieden thans opvallend groote platten voorkomen, ligt het voor de hand zich af te vragen of wellicht in den jongsten geologischen tijd dergelijke optimale voorwaarden voor de uitbreiding der vastelandsplatten hebben bestaan.

Die vraag zal hier bevestigend beantwoord worden.

Vooreerst zijn de voorwaarden voor platvorming thans gunstig, omdat het plistoceen en ook nog wel het holoceen (het heden) tijdperken zijn, in welke de processen van denudatie en sedimentatie, dus ook die van gradatie en platgroei, over groote oppervlakten der aarde zeer krachtig verloopen [2]) ten gevolge van het diastrophisme, de orogenetische bewegingen, in tertiairen tijd, die zich nog tot in het heden doen gevoelen, maar daarbij komt m.i. nog een tweede voorwaarde, die voor de buitengewoon groote uitbreiding van de hedendaagsche platten beslissend is geweest. Deze is, dat na den afloop van den plistoceenen ijstijd voor een groot deel der aard-

[1]) Isostatische opwaartsche bewegingen der continenten zullen insgelijks in het algemeen het zeewaarts uitgroeien der platten tegenwerken. De plastische uitzakking der continenten zeewaarts (*continental creep*, zie T. C. Chamberlin l.c. p. 585, 1913) bevordert daartegen de ontwikkeling der platten. Deze beide factoren zullen hier verwaarloosd worden, omdat hun invloed in het gebied, dat nader zal worden beschouwd, n.l. den Oost-Indischen Archipel, tegenover andere invloeden slechts verdwijnend klein kan zijn.

[2]) Barrell beschouwt in zijn belangrijke studie over de „rhythms in denudation" den tegenwoordigen tijd als eenen in de geschiedenis der aarde, waarin het continentale denudatieproces bijzonder krachtig verloopt. J. Barrell. Rhythms and the measurements of geological time. Bull. of the Geol. Soc. of America, XXVIII, p. 775, 1917.

oppervlakte een transgressie der zee zich heeft doen gevoelen. Zij trad in op een oogenblik, dat, zooals uit het bovenstaande blijkt, de platten en de daaraan aansluitende schiervlakten reeds sterk waren ontwikkeld ten gevolge van de orogenetische bewegingen in jong-tertiairen tijd. Het doel van dit opstel is voor een der grootste platten der aarde aan te toonen, dat het zijn ontstaan dankt aan die optimale condities voor platvorming, welke intraden na afloop en ten gevolge van den plistoceenen ijstijd.

Invloed van den plistoceenen ijstijd op den stand van den zeespiegel.

Wat is de invloed geweest van den ijstijd op den stand van het water in de oceanen en dus op den stand van den zeespiegel?

In plistoceenen tijd — den zoogenaamden ijstijd — moeten de ijskappen van groote dikte en uitgebreidheid, die toen een aanzienlijk deel van het land op hooge breedten in en om de poolstreken bedekten, en in mindere mate ook de groote fiernvelden en gletschers in de bergstreken buiten die poolgebieden, groote hoeveelheden water uit de oceanen in zich hebben vastgelegd. Het water in de oceanen moet tengevolge daarvan ten opzichte van het land bij den aanvang van den plistoceenen tijd gedaald zijn.

Na afloop van den ijstijd, dus aan het eind van het plistoceene tijdvak, nam de ijsbedekking in hooge breedten af tot den tegenwoordigen toestand.

Zulks moet tengevolge gehad hebben, dat het verloren water door het smelten van de ijsbedekkingen weder aan de oceanen werd teruggegeven en deze dus het peil, dat zij voor den aanvang van het plistoceene tijdvak bezaten, thans weer ongeveer zullen hebben bereikt. Dit wel zeggen, dat van het eind van den plistoceenen ijstijd tot op heden de zee in tropische streken langs alle kusten ten opzichte van het land moet zijn gerezen. De zee moet dus overal in tropische streken terrein veroverd hebben op het land en, waar dit land zich weinig boven den zeespiegel verhief, moet de horizontale terreinwinst der zee sedert het plistoceen aanzienlijk zijn geweest. Penck [1]) heeft den invloed van den plistoceenen ijstijd (gedurende andere ijstijden zal hetzelfde hebben plaats gehad) op den zeespiegel reeds in 1882 helder uiteengezet. Omtrent het bedrag dier schommeling van den zeespiegel kan men van gevoelen verschillen.

---

[1]) A. Penck, Schwankungen des Meeresspiegels. Jahrb. der geogr. Ges. zu München VII 1882 p. 47.

In hoofdpunten schijnt mij Penck's voorstelling onwederlegbaar en zij mag eerder een theorie dan een hypothese genoemd worden.

Met inachtneming van eenige der bijkomstige voorwaarden, die het vraagstuk ingewikkelder maken, zijn daaromtrent o.a. berekeningen uitgevoerd door CROLL [1]) in 1875, door PENCK in 1882, en door DALY in 1910 en 1915. PENCK kwam toen tot de slotsom, dat in plistoceenen tijd in tropische streken de zeespiegel meer dan 100 Meter [2]) lager moet hebben gelegen dan thans. Later, in 1894 [3]) kwam hij, van dezelfde praemisse uitgaande en een gemiddelde ijsdikte van 1000 M. in de vergletscherde gebieden aannemend, tot het cijfer van 150 Meter welk cijfer in 1887 ook door VON DRYGALSKI werd genoemd. DALY [4]) komt bij zijn berekeningen, insgelijks aannemend dat de maximale ontwikkeling der ijskappen in plistoceenen tijd overal op aarde te gelijker tijd bereikt werd en hun gemiddelde dikte 1100 M. bedroeg, tot een cijfer, dat in ieder geval tusschen 23 en 129 M. moet liggen en waarschijnlijk tusschen 50 en 60 Meter ligt.

Waar zoo juist over bijkomstige voorwaarden werd gesproken, die het vraagstuk ingewikkelder maken, werd gedacht aan andere verschijnselen, die de verhoudingen tusschen land en zee kunnen wijzigen, dus bewegingen veroorzaken, die deels evenwijdig met deels tegengesteld aan de bovengenoemde verloopen.

Voor zoover deze iets met den ijstijd te maken hebben, zijn dat de volgende:

1°. schommelingen van den zeespiegel, veroorzaakt door het feit, dat bij het groeien van het landijs, dat op den vasten bodem rust, de aantrekkende werking van dat ijs op het water in de oceanen toeneemt en bij afsmelten van het ijs weder afneemt. De oppervlakte van den zeespiegel over de geheele aarde wordt hierdoor gewijzigd, maar alleen in de onmiddellijke nabijheid van de ijskappen is de vervorming van beteekenis en uit zich daar door een rijzing van den zeespiegel. De daarmede samenhangende daling van den zee-

---

[1]) J. CROLL. Climate and time, Londen 1875.

[2]) PENCK kwam l. c. p. 67 tot dit cijfer slechts bij de veronderstelling, dat in plistoceenen tijd de groote uitbreiding der verijsde gebieden niet tot één halfrond is beperkt geweest, maar zich tegelijker tijd over de geheele aarde heeft doen gevoelen, een voorstelling, waarbij wij ons hier aansluiten.

Indien men aanneemt, dat in plistoceenen tijd de sterke ijsbedekking tot het noordelijk halfrond is beperkt gebleven, dan zou volgens PENCK l.c. pag. 29 de algemeene stand van den zeespiegel minstens 50 en hoogstens 66.5 M. hooger zijn geweest dan thans, al naar mate men aanneemt, dat het ijs op het zuidpoolcontinent al dan niet tot verdwijnens toe zou verminderd zijn.

[3]) A. PENCK. Morphologie der Erdoberfläche II. p. 660, 1894.

[4]) R. A DALY. Pleistocene glaciations and the coral reef problem. Amer. Journal of Science XXX, p. 300, 1910 en The glacial-control theory of coral reefs. Proc. of the Amer. Acad. of Arts and Sciences LI, p. 173, 1915.

spiegel overal elders op aarde, die het sterkst zich zal doen gevoelen in de streken die het verst van de vergletscherde gebieden verwijderd liggen, is niet aanzienlijk; men mag aannemen, dat zij gedurende den tijd van maximale glaciatie in plistoceenen tijd in de tropische zeeën, bijv. in den Oost-Indischen archipel hoogstens 10 Meter [1]) heeft bedragen.

2°. Schommelingen van den zeespiegel, veroorzaakt door het verdringen van water in de oceanen door ijs. In de poolstreken wordt door het landijs, dat van de landen zich zeewaarts beweegt, langs de kusten het water der zee over eenigen afstand teruggedrongen en dit terugdringen had gedurende den ijstijd op grooter schaal plaats dan thans. VON DRYGALSKI meent, dat gedurende den ijstijd hierdoor de zeespiegel in het algemeen 6 M. hooger moet hebben gelegen dan thans [2]).

3°. Schommelingen van den zeespiegel, die veroorzaakt worden door de elastische benedenwaartsche beweging van de aardkorst onder het gewicht van het groeiende landijs, gevolgd, bij weder afsmelting van het ijs, met eenige vertraging, door een beweging in tegengestelden zin van overeenkomstige grootte. Deze belangrijke bewegingen zijn beperkt tot de landstreken, die door het landijs bedekt werden, zooals vooral door herhaalde zorgvuldige onderzoekingen in Noord-Amerika is vastgesteld [3]); zij kunnen geen invloed van beteekenis hebben op de hoogte van den zeespiegel, behalve in de verijsde gebieden en hun onmiddellijke nabijheid. In tropische streken zullen

---

[1]) Dit bedrag is hier ontleend aan DALY's glacial-control theory of coral reefs, pag. 174. DALY heeft het cijfer afgeleid uit berekeningen, gegeven in R. S. WOODWARD. On the form and position of the sea level. Bulletin No. 48 of the U. S. Geol. Survey 1888. Daarin waren echter (zie noot op pag. 78) de resultaten nog niet verwerkt, waartoe E. VON DRYGALSKI kwam in: Die Geoidformation der Eiszeit. Zeitschr. der Ges. für Erdkunde XXII p. 169, 1887. In dat opstel heeft VON DRYGALSKI den deformeerenden invloed op den zeespiegel der ijskappen, die op continentale landmassa's in den ijstijd opgehoopt waren, welke invloed door PENCK l.c. was overschat, tot een juistere en bescheidener maat terug gebracht. Opmerking verdient, dat al deze berekeningen zijn geschied bij meer of minder volledige aansluiting aan de meeningen van CROLL, die veronderstelde, dat gedurende een ijstijd altijd slechts één der halfronden zeer sterk is vergletscherd, het andere daarentegen weinig of niet, zie J. CROLL, Climate and Time, vooral hoofdstuk XXIII, London 1875. Nieuwe berekeningen omtrent den invloed van de aantrekking van het landijs op den algemeenen vorm van den zeespiegel, uitgaande van de thans vrij algemeen aangenomen onderstelling, dat gedurende den ijstijd overal op aarde tegelijkertijd de gletschers en ijsbedekkingen grooter waren dan thans, zijn gewenscht.

[2]) E. VON DRYGALSKI l.c. p. 199.

[3]) Zie: H. E. FAIRCHILD, Post-glacial uplift of northern America. Bull. of the Geol. Soc. of America XXIX, p. 187, 1918.

deze bewegingen zich slechts door een geringe rijzing van den zeespiegel gedurende de periodes van groei en daling gedurende de afsmeltingsperiodes hebben gekenmerkt.

In tropische streken worden dus, zooals uit het bovenstaande blijkt, al die bijkomstige invloeden slechts in zoo geringe mate gevoeld, dat het hoofdverschijnsel er niet belangrijk door kan zijn gewijzigd.

Zorgvuldige waardeering van alle mij bekende berekeningen geeft m.i. het recht aan te nemen, dat het vereenigde resultaat van al de bovengenoemde invloeden, die, zooals reeds werd opgemerkt, ten deele in dezelfde richting werken ten deele elkaar tegenwerken, is geweest, dat de zeespiegel gedurende de tijdperken van maximale uitbreiding der ijsbedekkingen in plistoceenen tijd in tropische streken (dat zijn dus die streken, die gemiddeld het verst van de groote centra van ijsophooping verwijderd waren) minstens 40 vaam (72 Meter) lager moet hebben gelegen dan thans. DALY[1]) heeft dit cijfer geschat op 33—38 vaam of 60 tot 70 Meter.

De verhoudingen tusschen land en zee worden echter ook nog beinvloed door bewegingen van de aardkorst, die geheel onafhankelijk van de ijstijden optreden. Ik bedoel in de eerste plaats zelfstandige orogenetische bewegingen (plooiing en blokvorming) van het land, die schijnbare bewegingen van den zeespiegel ten gevolge hebben, zich uitend door verschuivingen van de strandlijn, niet zelden van aanzienlijk bedrag. Zij worden over de geheele aarde verspreid aangetroffen, maar treden lokaal op, uitsluitend in gebieden, die tektonisch actief zijn.

Eindelijk worden de verhoudingen tusschen land en zee overal nog voortdurend gewijzigd door verschuivingen van de strandlijn ten gevolge van groei der alluviale gronden ten koste van de zee door materiaal, afgevoerd bij denudatie (door water en wind) van het land en ten gevolge van differentieele, isostatische opwaartsche bewegingen van het land, die de gevolgen der denudatie aanmerkelijk compenseeren, welke twee laatstgenoemde verschijnselen ik hier voorloopig buiten beschouwing wil laten.

Aan de juistheid van de hier boven geschetste theorie kan m.i. in dezen algemeenen vorm moeielijk getwijfeld worden, zoo men althans aanneemt, dat in den ijstijd inderdaad ijsmassa's van groote dikte, bijv. gemiddeld 1000—1200 M., over een groote uitgestrektheid op de poolwaarts gelegen landen der aarde opgehoopt zijn geweest. Tot nu toe is echter de juistheid dezer theorie nog niet

[1]) R A. DALY l.c. p. 174, 1915.

deze bewegingen zich slechts door een geringe rijzing van den zeespiegel gedurende de periodes van groei en daling gedurende de afsmeltingsperiodes hebben gekenmerkt.

In tropische streken worden dus, zooals uit het bovenstaande blijkt, al die bijkomstige invloeden slechts in zoo geringe mate gevoeld, dat het hoofdverschijnsel er niet belangrijk door kan zijn gewijzigd.

Zorgvuldige waardeering van alle mij bekende berekeningen geeft m.i. het recht aan te nemen, dat het vereenigde resultaat van al de bovengenoemde invloeden, die, zooals reeds werd opgemerkt, ten deele in dezelfde richting werken ten deele elkaar tegenwerken, is geweest, dat de zeespiegel gedurende de tijdperken van maximale uitbreiding der ijsbedekkingen in plistoceenen tijd in tropische streken (dat zijn dus die streken, die gemiddeld het verst van de groote centra van ijsophooping verwijderd waren) minstens 40 vaam (72 Meter) lager moet hebben gelegen dan thans. DALY [1]) heeft dit cijfer geschat op 33—38 vaam of 60 tot 70 Meter.

De verhoudingen tusschen land en zee worden echter ook nog beinvloed door bewegingen van de aardkorst, die geheel onafhankelijk van de ijstijden optreden. Ik bedoel in de eerste plaats zelfstandige orogenetische bewegingen (plooiing en blokvorming) van het land, die schijnbare bewegingen van den zeespiegel ten gevolge hebben, zich uitend door verschuivingen van de strandlijn, niet zelden van aanzienlijk bedrag. Zij worden over de geheele aarde verspreid aangetroffen, maar treden lokaal op, uitsluitend in gebieden, die tektonisch actief zijn.

Eindelijk worden de verhoudingen tusschen land en zee overal nog voortdurend gewijzigd door verschuivingen van de strandlijn ten gevolge van groei der alluviale gronden ten koste van de zee door materiaal, afgevoerd bij denudatie (door water en wind) van het land en ten gevolge van differentieele, isostatische opwaartsche bewegingen van het land, die de gevolgen der denudatie aanmerkelijk compenseeren, welke twee laatstgenoemde verschijnselen ik hier voorloopig buiten beschouwing wil laten.

Aan de juistheid van de hier boven geschetste theorie kan m.i. in dezen algemeenen vorm moeielijk getwijfeld worden, zoo men althans aanneemt, dat in den ijstijd inderdaad ijsmassa's van groote dikte, bijv. gemiddeld 1000—1200 M., over een groote uitgestrektheid op de poolwaarts gelegen landen der aarde opgehoopt zijn geweest. Tot nu toe is echter de juistheid dezer theorie nog niet

---

[1]) R A. DALY l.c. p. 174, 1915.

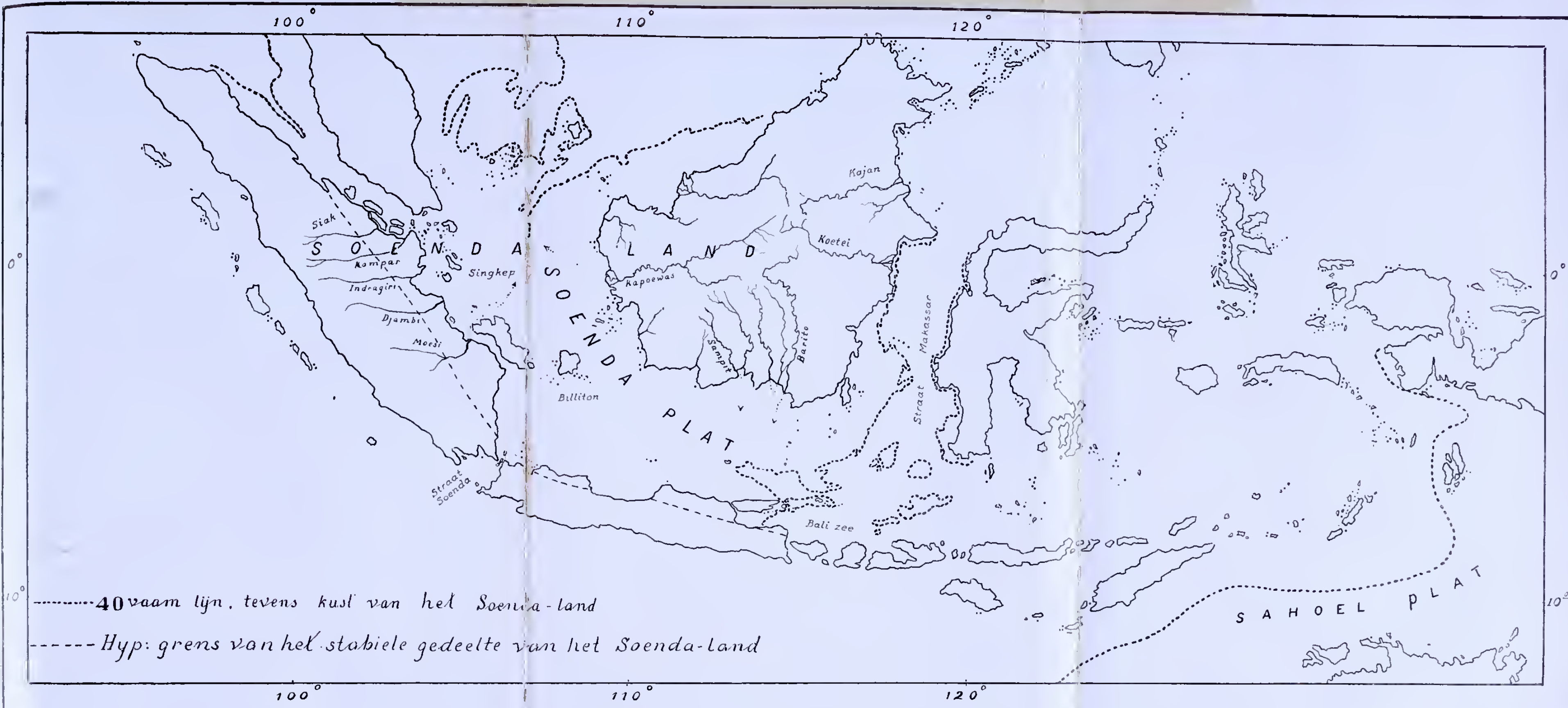


Fig. 1. Schets van den Oost-Indischen archipel met het Soenda-plat en het Sahoel-plat.

Schaal 1 : 12.500.000.

over groote streken der aardoppervlakte getoetst aan de verhoudingen, die men thans aan de kusten vindt.

In tropische streken zullen deze toetsingen eenvoudiger zijn en eerder tot een juist resultaat moeten leiden dan buiten de tropen. Immers wordt het verschijnsel van een stijgen en dalen van den zeespiegel, al naar mate de polaire ijskappen geringere of grootere uitbreiding hadden, buiten de tropen en wel voornamelijk in de gebieden, die onmiddellijk grenzen aan de gedurende den ijstijd vergletscherde gebieden, onduidelijk gemaakt door den invloed der hierboven opgesomde bijkomstige invloeden, die zich hier sterk, in tropische streken daarentegen slechts zwak doen gevoelen [1]. Voorts zal zulk een toetsing slechts resultaat kunnen hebben in streken, die sinds plioceenen tijd niet door tektonische bewegingen zijn getroffen.

Er bestaat dus een redelijke kans, de verschuivingen van de strandlijn, die in en na het plistoceen door den invloed der wisselende ijsbedekkingen zijn ontstaan, ook werkelijk terug te kunnen vinden en te kunnen bepalen in tropische streken en daar uitsluitend in de gebieden, die sinds den aanvang van het plistoceen stabiel zijn gebleven.

In hetgeen volgt zal worden beproefd, in een gedeelte van den Oost-Indischen archipel de verhoudingen tusschen land en zee, het

[1]) Dit wil nog niet zeggen, dat men het verschijnsel van de schommelingen van den zeespiegel ten gevolge van den plistoceenen ijstijd niet zou kunnen terugvinden in gematigde luchtstreken. Het zal ook daar te vinden zijn, maar moeilijker, omdat men het eerst moet losmaken van de bovengenoemde bijkomstige invloeden, waarvan men de grootte in verhouding tot die van het gezegde hoofdverschijnsel nog niet voldoende kent. Omgekeerd is er een factor, die een soortgelijk onderzoek in de nabijheid van de verijsde gebieden toch weer vruchtbaarder zou kunnen maken n.l. de omstandigheid, dat zich daar de opeenvolgende glaciale en interglaciale tijdperken door variaties in de marine fauna zullen verraden. Zoo zal b.v. de eerste nadering van het ijs, bij den aanvang van den ijstijd zich in het noordelijk halfrond hebben verraden door eenigszins „arktisch" worden der fauna. Het is bekend dat zulks reeds in het laatste gedeelte van het „plioceene" tijdperk in Engeland en Nederland merkbaar is, en dat op dien grond er iets voor te zeggen zou zijn, dat de ijstijd reeds is begonnen in wat gewoonlijk „Boven-plioceen" wordt genoemd. De wisseling van interglaciale en glaciale tijden zal daarentegen in tropische streken vermoedelijk geen merkbaren invloed op de fauna gehad hebben, zoodat, wat dat betreft, het onderzoek in tropische streken een hulpmiddel zal moeten ontberen, dat buiten de tropen beschikbaar is. Alles te samen genomen, zullen de strandverschuivingen tengevolge van het groeien en weer verdwijnen der polaire ijskappen in tropische streken echter zooveel regelmatiger blijken te zijn en zooveel minder gewijzigd door andere invloeden dan daarbuiten, dat onderzoek in tropische streken, althans voor de hoofdlijnen van het verschijnsel, verre de voorkeur verdient boven dat in gematigde streken.

onderzeesch relief en de verspreiding der koraalriffen in verband met den plistoceenen ijstijd te beschouwen.

Het stabiele en het labiele gedeelte van den Oost-Indischen archipel.

In den Oost-Indischen archipel kan men twee tegengestelde gebieden onderscheiden, een met opvallend rustig en gelijkmatig onderzeesch relief en een tweede met opvallend onrustig onderzeesch relief. Deze beide gebieden zijn in de nevensgaande schets (Fig. 1) onderscheiden. Tot de zeeën met rustig bodemrelief behooren de Soendazee en de Sahoel-bank, tot die met onrustig bodemrelief alle overige zeeën van den Oost-Indischen archipel.

Merkwaardig is, dat deze tegenstelling reeds in het jaar 1845 aan W. Earle [1]) is opgevallen. Hij noemde het Soenda-plat de *Great Asiatic bank* en de Sahoel-bank de *Great Australian bank.* Hij merkte de zeer gelijkmatige gemiddelde diepte van de zee boven die banken, door hem op 30 vaam gesteld, op en vestigde de aandacht op het feit, dat het karakter van het land en van de kusten, die die banken omgeven, onderling overal groote overeenkomst vertoont en sterk afwijkt van dat der overige landstreken in den Oost-Indischen archipel.

Verbeek heeft het eerst in zijn Molukken verslag [2]) deze beide gebieden geologisch tegenover elkaar gesteld en, uitgaande van eenigs-

---

[1]) W. Earle. On the Physical Structure and Arrangement of the islands of the Indian Archipelago. Journ. Royal Geogr. Soc. XV. p. 358, 1845.

Earle zegt l. c. op pag. 359:

These banks which extend from the continents of Asia and Australia form very remarkable features in the geography of this part of the world, and, as such, are deserving of more attention than has hitherto been bestowed upon them, since it will be found that all the countries lying upon these banks partake of the character of the continents to which they are attached; while those which are situated on the deep sea which separates them are all of comparatively recent volcanic formation, with the exception of a few small coral islands, which, in all probability, are constructed upon the summits of submerged volcanoes. The depth of water on these banks averages about 30 fathoms, deepening rapidly as the edge is approached, and shoaling gradually towards the land. It will be seen that the one I have termed the Great Asiatic Bank extends into the Archipelago from the south-eastern extreme of Asia to a distance of nearly 1000 miles, in fact to within 50 miles of Celebes, and I strongly suspect that it will be found to extend to the south-western extremity of that island also; but as there is a space of nearly 30 miles across which no soundings have been carried, I have preferred reducing the bank to the limits for which we have actual data.

[2]) R. D. M. Verbeek. Molukken verslag. Geol. verkenningstochten in het oostelijke gedeelte van den Ned. O.-I. Archipel. Jaarb. v.h. Mijnwezen XXXVII. p. 797 en volg. 1908.

zins andere geologische opvattingen, is hetzelfde door schrijver dezes [1]), in het jaar 1912 gedaan.

De jongste geologische geschiedenis van den Oost-Indischen Archipel leert dan, dat de twee eerstgenoemde ondiepe zeeën of platten deel uitmaken van grootere gebieden, die in den laatsten tijd, althans na het plioceen, stabiel zijn gebleven en zich dus geologisch gesproken „continentaal" hebben gedragen, terwijl alle andere deel uitmaken van bewegelijke strooken of geosynclinalen, die in dienzelfden tijd zeer actief zijn geweest.

In den Oost-Indischen archipel komen dus naast elkaar deelen van de aardkorst voor, die zich tektonisch in den jongsten tijd zeer verschillend hebben gedragen; in de stabiele of passieve gedeelten zullen de gevolgen van de schommelingen van den zeespiegel in verband met den ijstijd ongewijzigd waarneembaar zijn, in de labiele of actieve gedeelten zullen die schommelingen even goed hebben plaats gehad, maar de sporen er van zullen alleen waarneembaar zijn, waar zij niet uitgewischt of al te zeer gewijzigd zijn door de gevolgen van diastrophisme, of anders gezegd van de orogenetische bewegingen van het land. Dit is een zeer gunstige omstandigheid, daar zij gelegenheid geeft de theorie, waar het om gaat, op allerlei wijze aan een toets te onderwerpen.

De wijze van ontstaan der Soenda-zee.

In het jaar 1916 bracht schrijver dezes het ontstaan van de bovengenoemde merkwaardige ondiepe zeeën van rustig relief en gelijkblijvende diepte, de Soenda-zee of het Soenda-plat en de Sahoel-bank, in verband met den plistoceenen ijstijd [2]) en dat denkbeeld zal in hetgeen volgt thans nader worden ontwikkeld.

Ondersteld wordt, dat de Soenda-zee evenals ook de Sahoel-bank, gedurende den tijd van rijzing van den zeespiegel tengevolge van het afsmelten der groote ijsbedekkingen uit den ijstijd, door onderloopen van een laag land zijn ontstaan.

De naam Soenda-zee wordt hier gegeven aan de ondiepe zee tusschen Malakka, Sumatra en Java aan de éene zijde en Borneo

[1]) G. A. F. MOLENGRAAFF. De jongste bodembewegingen op het eiland Timor en hunne beteekenis voor de geologische geschiedenis van den O.-I Archipel. Verslag. Afd. Nat. d. Kon. Akad. van Wet. Amsterdam, XXI. p. 130 en volg. 1913.

[2]) G. A. F. MOLENGRAAFF. Het probleem der koraaleilanden en de isostasie. Versl. Afd. Nat. d. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam. Dl. XXV p. 217, 1916

N. WING EASTON ging in 1919 van een soortgelijken gedachtegang uit bij zijn besprekingen over het ontstaan der tinertsbeddingen in Nederlandsch Indië. Zie: Het ontstaan der tinertsbeddingen in Indië. Weekblad de Ingenieur, 12 Maart 1919.

aan de andere zijde, welke de geheele Java-zee en het zuidelijkste deel van de Chineesche zee omvat. Deze zee heeft thans geen afzonderlijken samenvattenden naam, maar maakt zoowel geografisch als genetisch een niet wel deelbaar geheel uit. NIERMEYER [1]) heeft reeds in 1911 aan den bodem der ondiepe zee tusschen Sumatra, Java en Borneo den naam Soenda-plat [2]) gegeven. Ik sluit mij daar bij aan, maar breid dien naam uit tot het geheele plat, dat ontstaan is door onderloopen van alle schiervlakten van het nader te definieeren Soenda-land, die gevormd waren gedurende de tijdperken van verlaging van den zeespiegel gedurende de plistoceene glaciaaltijden.

De wijze van ontstaan van dat lage land kan men zich als volgt voorstellen.

Voor den aanvang van het plistoceene tijdperk, dus tegen het einde van het plioceen, werd, wat nu de Soenda-zee is, vermoedelijk ingenomen door vrij laag land of door een eilandengroep. Men mag zich daarvoor voorstellen een onvolkomen ontwikkelde schiervlakte, die ten deele tot geringe diepte door de zee was bedekt. [3])

Bij het begin van den plistoceenen tijd trok de zee zich ten gevolge van den groei der ijsbedekkingen terug en dit gebied werd daardoor een aaneengesloten land, het Soenda-land, dat met de hedendaagsche eilanden Sumatra, Borneo en Java een geheel uitmaakte en zich over het algemeen niet hoog, maar toch gemiddeld wel meer dan 70 M. boven den zeespiegel verhief.

In den plistoceenen tijd volgde er een tijdperk van langdurige erosie, een erosie, die verlevendigd en bijzonder krachtig was geworden door de verlaging van het eindvlak; er vormde zich dientengevolge een uitgebreide schiervlakte, waaruit alleen de terreinen, die het meeste weerstand boden, als heuvels, zoogenaamde monadnocks of hardkoppen uitstaken. Deze groote schiervlakte werd naar Zuid, Zuidwest en West begrensd door de deels vulkanische, deels niet vulkanische bergketenen van Java en Sumatra, naar Noord resp. Noordoost door de granietkern, het hooge plateauland en de ketengebergten van Borneo. In die groote schiervlakte vereenigde zich waarschijnlijk al het water,

---

[1]) J. F. NIERMEYER. Barrière-riffen en atollen in den Oost-Indischen archipel. Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. 2. XXVIII p. 880, 1911.

[2]) KRÜMMEL heeft dit plat de Borneo-Javaschelf genoemd. Hij geeft voor de uitgebreidheid het cijfer 1.850.000 K.M^2. bij een zeediepte van 50—100 M. Zie O. KRÜMMEL, Handbuch der Ozeanographie I, p. 113, 1907.

[3]) Uit de tot nu toe bekende geologische gegevens is deze onderstelling niet te bewijzen, maar die gegevens zijn evenmin met onze onderstelling in strijd.

dat van die beide berggebieden in naar elkaar toegekeerde richtingen afstroomde, tot eenige groote stroomen. Een dier stroomen moet ergens in het gebied, waar thans de Java-zee zich uitstrekt, zijn bed gehad hebben en, de schiervlakte naar Oost-Zuidoost ontwaterend, zich ontlast hebben in het zuidelijkste gedeelte van de straat Makassar. Door een tweeden stroom werd die groote schiervlakte waarschijnlijk naar Noord en Noord-Noordoost ontwaterd in de richting van de Chineesche Zee.

Het stroomgebied van die twee stroomen moet zeer groot geweest zijn, n.l. ongeveer 1.285.000 K.M². Zij moeten dus wanneer wij een regenval aannemen, die met den tegenwoordigen overeenkomt [1]), 2.7 M. per jaar, ± 1156 K.M³ water naar zee hebben afgevoerd, d. i. ongeveer het dubbele, van wat de Missisippi (552 K.M³) afvoert, in wier stroomgebied, dat veel grooter is (3.6184.640 K.M².), de gemiddelde regenval gering is en op ruim 52 cM. mag geschat worden.

Men mag verwachten, dat deze rivieren zich trots hun gering verval door hun groote watermassa in de schiervlakte diep zullen hebben ingesneden en hun bed tot beneden den zeespiegel zullen hebben uitgeschuurd. Zoo men in aanmerking neemt, wat hieromtrent bij andere groote rivieren wordt waargenomen, mag men veilig aannemen, dat de geulen van die rivieren in hun benedenloop in de schiervlakte minstens 10—15 M. diep zullen geweest zijn.

Na afloop van den ijstijd begon de zeespiegel, naarmate de ijsmassa's op hoogere breedten wegsmolten, geleidelijk weder te stijgen. In het Soenda-land werkte thans alles samen voor het intreden van optimale condities voor platvorming. Diastrophisme in tertiairen tijd had een periode van sterke erosie en dus snelle ontwikkeling van het gradatievlak voorbereid, het terugtrekken der zee bij het begin van den ijstijd had door verlaging van het eindvlak van denudatie in denzelfden zin gewerkt, belemmerende factoren voor platvorming waren er in het Soenda-land, dat sinds het einde van het tertiaire tijdvak stabiel was, niet geweest, dit alles had samengewerkt om een gradatievlak, grootendeel als schiervlakte, van buitengewone afmetingen te doen ontstaan. En juist toen die toestand was ingetreden begon de zeespiegel te stijgen. Zeer uitgestrekte landstreken kon de zee bij stijging bij haar gebied inlijven en tot plat maken. De Soenda-schiervlakte liep onder, totdat de zee daarop de tegenwoordige diepte van gemiddeld 50 Meter had bereikt. Aldus ontstond de tegenwoordige Soenda-zee en het Soenda-plat, het grootste en een der merkwaardigste platten der wereld.

[1]) Aangenomen is, dat 1/3 van het water, dat in het stroomgebied viel, naar zee werd afgevoerd, welke ruwe schatting voor dit geval toelaatbaar is.

De groote stroomen werden bedolven en al hun zijtakken werden tot zelfstandige rivieren, die thans in de Soenda-zee uitmonden. Verschillende der monadnocks werden door de zee omspoeld en tot eilanden gemaakt, zooals Banka, Billiton, Singkep, de Karimata-eilanden, de Karimoen-Djawa eilanden, Bawean, de Arendseilanden, Klein- en Groot-Salembouw en tal van andere kleine eilanden.

De hier gegeven voorstelling moet beschouwd worden als een sterk vereenvoudigde wedergave van hetgeen in werkelijkheid geschied is; immers is de ijstijd niet één enkele koude periode geweest, maar een opeenvolging van zulke perioden, afgewisseld door mildere, interglaciale tijdperken en tengevolge daarvan moet in werkelijkheid iets zijn gebeurd, dat veel ingewikkelder is geweest dan hierboven is geschetst. Men kan zich voorstellen, dat gedurende den eersten glaciaaltijd de Soenda-schiervlakte nog slechts zeer onvolledig werd gevormd, dat zij gedurende den eersten interglaciaaltijd door de zee werd bedekt, dat de tweede glaciaaltijd haar wat volkomener maakte, dat de tweede interglaciaaltijd haar weder onder water zette, dat in de daarop volgende glaciaaltijden dezelfde wisselingen zich herhaalden, totdat de laatste glaciaaltijd de Soenda-schiervlakte tot die volmaaktheid bracht, welke thans het relief van den bodem der Soenda-zee ons doet kennen.

Vele eigenaardigheden van de Soenda-zee en de haar omgevende kuststreken zijn met de hierboven gegeven voorstelling in overeenstemming of worden door haar op aannemelijke wijze verklaard.

Maar, alvorens deze verder na te gaan, is het noodig de volgende twee vragen te beantwoorden.

1°. hoe ver strekte zich het plistoceene Soenda-land uit? en 2°. wat waren de grenzen van dat land?

Het plistoceene Soenda-land.

Het samenvattende antwoord op de twee vragen is: Het Soenda-land is dat gedeelte van de westelijke helft van den Oost-Indischen archipel, dat bij het laatste maximum van glaciatie in plistoceenen tijd zich boven den zeespiegel verhief. Volgens onze onderstelling is dit Soenda-land na dat laatste maximum van glaciatie tot op heden door het stijgen van den zeespiegel tot ongeveer 72 M. hoogte door de zee bedekt.

Het Soenda-land bestond uit Java met Madoera, Sumatra, Borneo, Malakka en de tegenwoordige zee met haar eilanden om die landen tot een diepte van 40 vaam (72 M.) zoodat de grenzen van het plistoceene Soenda-land terstond uit de kaart (Fig. 1) kunnen

worden afgeleid. Evenwel geldt al wat hier gezegd wordt alleen voor het gedeelte van het Soenda-land, dat sinds plistoceenen tijd stabiel of orogenetisch niet actief is geweest; alleen voor dat gedeelte mag men de tegenwoordige isobaath van 40 vaam als kustlijn gedurende het laatste maximum van glaciatie in plistoceenen tijd aannemen. Het is dus om de uitbreiding van het stabiele of continentale gedeelte van het Soenda-land te leeren kennen nog noodig de grens te weten tusschen het land, dat orogenetisch niet actief is geweest sedert het eind van het plioceen en het land, dat zulks wel is geweest. Op de kaart is die grens met veel voorbehoud door een gebroken lijn aangegeven. Al wat daar binnen ligt is het stabiele gedeelte van het Soenda-land, wat ik het Soenda-land in engeren zin wil noemen.

Tot dit stabiele Soenda-land behoort vooreerst al wat hierboven Soenda-zee is genoemd, verder Borneo, waarschijnlijk met uitzondering van het noordelijkste gedeelte, Malakka en de oostelijke kuststrook van Sumatra, hier en daar misschien een klein gedeelte van de noordelijke kuststrook van Java en Madoera. Al het land grenzend aan den Indischen Oceaan, dat tot de groote Maleische geosynclinaal behoort, valt buiten het Soenda-land in engeren zin. Dat tektonisch actieve gebied is klaarblijkelijk de verlenging van de westelijkste plooibundels van de Birma-boog, thans nog orogenetisch een der meest actieve gebieden der wereld. Het is niet mogelijk de grens tusschen het stabiele en het labiele gedeelte van het vroegere Soendaland precies aan te geven; waarschijnlijk is er geen scherpe en blijvende grens, maar is deze veranderlijk. Ik ben geneigd de gebieden die vulkanen bezitten, welke gesteenten van het atlantische type leveren, als de Moeriah, de Loeroes en de Ringgit, tot het stabiele gebied te rekenen, omdat de Bawean-eilanden met hun atlantische gesteenten stellig daarin liggen en omdat de vulkanen der Maleische geosynclinale, evenals die van nagenoeg alle andere geosynclinalen op aarde, overigens uitsluitend gesteenten van het pacifische type hebben aan de dag gebracht, maar het is onvermijdelijk de grens tusschen het stabiele en het labiele gebied dan zulk een verloop te geven, dat de twee gebieden in Oost-Java hier en daar in elkaar grijpen. Misschien worden daardoor de juiste verhoudingen wel zeer goed weergegeven. De Sibbaldsbank, de Kaloe-Kaloekoeang-bank, de Laarsbanken, de Bril, de Paternoster-eilanden en de Postiljons-eilanden, thans alle koraaleilanden en misschien ook het Spermonde-plat en een deel van Zuid-Celebes vormden naar mijn meening in plistoceenen tijd eilanden, die tot het stabiele Soendaland behoorden.

Wat zijn nu de eigenaardigheden die bekend zijn van de tegenwoordige Soenda-zee, haar eilanden, en haar kuststreken?

De tegenwoordige Soenda-zee.

a. Algemeen relief van den bodem der Soenda-zee en der haar omgevende kuststreken.

De Soenda-zee heeft een opvallend gelijkmatige diepte, gemiddeld is deze 40—45 Meter en zelden gaat zij 50 Meter te boven. Het ondiepst is het gedeelte, waar de eilanden Banka en Billiton liggen, een diepte van meer dan 20 vaam wordt daar slechts op enkele plaatsen aangetroffen.

Behalve in enkele geulen worden grootere diepten dan 23 vaam (ruim 50 Meter) alleen gevonden in het uiterste oostelijke deel, waar op de Borneo-bank de diepte naar de veel diepere Straat van Makassar langzaam toeneemt, en weder in het noordelijke deel, waar hetzelfde geschiedt naar het diepere bekken der Chineesche Zee, en eindelijk in de nabijheid van Straat Soenda, die zich als een diepere geul onderzeesch als 't ware nog een eind weegs in de Java-zee voortzet. Het meest opvallende kenmerk van de Soenda-zee of het Soenda-plat is dus zijn *gelijkblijvende diepte*, de bijna volkomen effenheid van zijn bodem. Zulk een onderzeesch relief is juist, wat zou ontstaan, indien deze zee ware gevormd door onderloopen van een groote schiervlakte. De bijzonderheden van dit relief zijn ook zeer begrijpelijk, zoo men aanneemt, dat die schiervlakte naar de Bali-zee en naar de Chineesche Zee ontwaterde en dat een baai, de tegenwoordige Straat Soenda, van uit den Indischen Oceaan een eindweegs er in greep.

Het kustland van Borneo tot eenige honderden kilometers landwaarts in is zeer weinig geaccidenteerd en hetzelfde geldt voor de kuststreek van Oost-Sumatra en voor de eilanden in de Soenda-zee, als bijv. Banka, Billiton, Singkep, enz. Het grootste gedeelte van al dat land draagt het karakter van een schiervlakte [1]) en verheft zich slechts weinig boven den zeespiegel, terwijl hier en daar heuvels, bestaande uit gesteenten, die tegen erosie meer weerstandbiedend zijn, meestal met zachte glooiingen uit het lage terrein zich verheffen. Alleen voor de kuststrook van Java, op welk eiland vulkanische werkzaamheid het land telkens van vorm deed wijzigen en ophoogde, geldt deze beschrijving in mindere mate.

De zeer weinig geaccidenteerde oppervlakte van den bodem der

---

[1]) Inderdaad is al dat land te zamen het nog niet door de zee overstroomde deel der groote schiervlakte, die in plistoceenen tijd is gevormd.

Soenda-zee zet zich als 't ware voort op het omringende land. Langs de kust van West-Borneo zou een terugtrekken van de zee tot een diepte van niet meer dan 10 vaam talrijke eilanden met de kust verbinden en de nog bestaande schiervlakte van West-Borneo met haar eigenaardige zacht glooiende monadnocks sterk vergrooten, zonder dat dan eenig kenmerk in het terrein zou kunnen doen onderscheiden, wat nimmer zee was geweest en wat zoo juist weer tot land zou zijn geworden.

Alle eilanden in de Soenda-zee, zooals bijv. Billiton en Singkep, vertoonen zoo sterk het beeld van terreinen, die door de aanwezigheid van talrijke hardere kernen iets in rijpheid van erosie bij hun omgeving zijn ten achteren gebleven, dat als vanzelf het denkbeeld opkomt West-Borneo met Bangka, Billiton enz. te verbinden en het geheele gebied der Soenda-zee op te vatten als een ondergedompelde schiervlakte, uit welke de tegenwoordige eilanden als meer weerstand biedende kernen zich eenigszins verhieven, toen in plistoceenen tijd de zeespiegel lager lag.

b. Aard van den bodem der Soenda-zee.

De bodem van de Soenda-zee is zeer modderig; de groote meerderheid der loodingen, die in deze zee verricht zijn, geeft als aard van den ondergrond slib of modder aan, terwijl schelpen en koraalfragmenten slechts zelden vermeld worden. Dit kan in een ondiepe zee, zooals de Soenda-zee is, niet wel verklaard worden door den invloed der rivieren, die thans in haar uitmonden. Immers brengen deze wel een groote hoeveelheid slib in die zee tot op vrij grooten afstand van de kust, maar zeer waarschijnlijk nergens verder dan 60 K.M. uit den wal. In Februari 1894 vond ik bij hoog water voor de mondingen der Kapoewas in West-Borneo de uiterste grens van het modderige rivierwater tot op 50 K.M. buitengaats.[1]) Zoo men bedenkt, dat het modderige zoete water, zeer langzaam zeewaarts uitwiggend, op het zwaardere zeewater drijft, en in zeewater de bezinking meer dan tienmaal sneller geschiedt dan in zoet water, kan men zeker zijn, dat slib niet veel verder dan tot die 50—60 K.M. van de kust tot bezinking komt.

Neemt men verder in aanmerking, dat de Kapoewas en de Barito de grootste en slibrijkste rivieren zijn, die in de Soenda-zee uitmonden, dan zal men stellig geen fout begaan door te zeggen, dat de grens, tot waar slib in de Soenda-zee bezinkt, ligt tusschen de strandlijn en een afstand van ± 60 K.M. uit den wal.

De kaart leert, dat de bodem echter in de geheele Soenda-zee

[1]) Die grens ligt daar uiterlijk 62 K.M. uit den wal.

overal, dus tot op afstanden van 100 K. M. en meer van de naastbij gelegen kust, uit slib bestaat.

Ziet men in de Soenda-zee een verdronken schiervlakte, dan is het zeer begrijpelijk, dat de zee, toen zij zacht en allengs, zonder het zwakke relief veel te wijzigen, die vlakte overstroomde, overal een bodem van slib vond en dezen tot den haren moest maken. Juist die slibbigheid van den bodem en de nog altijd sterke invloed van het zoete water der vele rivieren, die in de wordende zee uitmondden, belemmerden de snelle verspreiding van zeedieren, met name van koralen, en daardoor werd de aard van het bodemslib door de mariene invasie weinig veranderd.

Men mag de slib, die bijna alle loodingen in de Soenda-zee als het hoofdbestanddeel van den bodem hebben leeren kennen, beschouwen als een slib of modder, gevormd gedurende de lange periode van erosie en fluviatiele sedimentatie, toen de schiervlakte werd gevormd of ten deele reeds was gevormd.

c. Geen sporen van opheffing.

De kusten der eilanden, die de Soenda-zee omgeven of er uit oprijzen, vertoonen geen sporen van opheffing van eenige beteekenis. Zoo men in aanmerking neemt, dat in streken, waar rifbouwende koralen aan de kust leven — en dat geldt voor de Soenda-zee, al is deze vergeleken met de zeebekkens der Molukken arm aan rifbouwers —, iedere opheffing van het land (of daling van den zeespiegel) zich bijna onfeilbaar verraadt door het boven water komen en bewaard blijven — althans geruimen tijd — van rifkalken, dus door de zoogenaamde opgeheven koraal-riffen, dan is het duidelijk, dat men het recht heeft uit het ontbreken van zulke kenmerken bijna overal aan de kusten van de Soenda-zee, de gevolgtrekking te maken, dat in den jongsten geologischen tijd aan de kusten der Soenda-zee althans geen negatieve strandverschuiving van eenige beteekenis heeft plaats gehad.

d. Sporen van daling; verdronken en verzonken rivieren.

Aanduidingen van daling van die kusten of, wat in dit verband hetzelfde is, van rijzing van den zeespiegel, zijn er daarentegen wel.

De wijze, waarop de groote slibrijke rivieren van Sumatra en van Borneo in zee uitmonden, is kenmerkend. Zoowel het ontbreken van delta's als het aanwezig zijn van wijde, trechtervormige mondingen — zeer opvallend bijv. bij de Sampit — en van groote diepten in den benedenloop der rivieren wijst op positieve strandverschuiving.

Slechts één rivier, de slibrijkste van alle, de Kapoewas, heeft

het tot het vormen van een delta, die echter bijna niet in zee uitsteekt, gebracht.

Voorts zijn de sporen der rivieren van de Soenda-schiervlakte, die door de rijzing van den zeespiegel zijn ontleed en verdronken, duidelijk waarneembaar. Op het eiland Singkep heeft de exploitatie van het tinerts zulke verdronken rivieren doen kennen. (Zie fig. 2). Het is daar gebleken, dat het tinerts, dat in de diepste gedeelten van het alluvium der rivieren Dabo en anderen door het stroomend water is afgezet, zich nog over aanzienlijken afstand in zee voortzet en dat de geulen van de Dabo en andere rivieren daardoor nog tot een afstand van omstreeks 1500 Meter uit den wal te vervolgen zijn. Bij één dier rivieren, de Djangkang, ligt het benedenste tinhoudende gedeelte van het rivieralluvium thans op ongeveer 17 M. beneden den zeespiegel. De rivierafzettingen zijn daar op den afstand van 1300 M. uit den wal ongeveer 10 M. dik, terwijl de zee daarboven

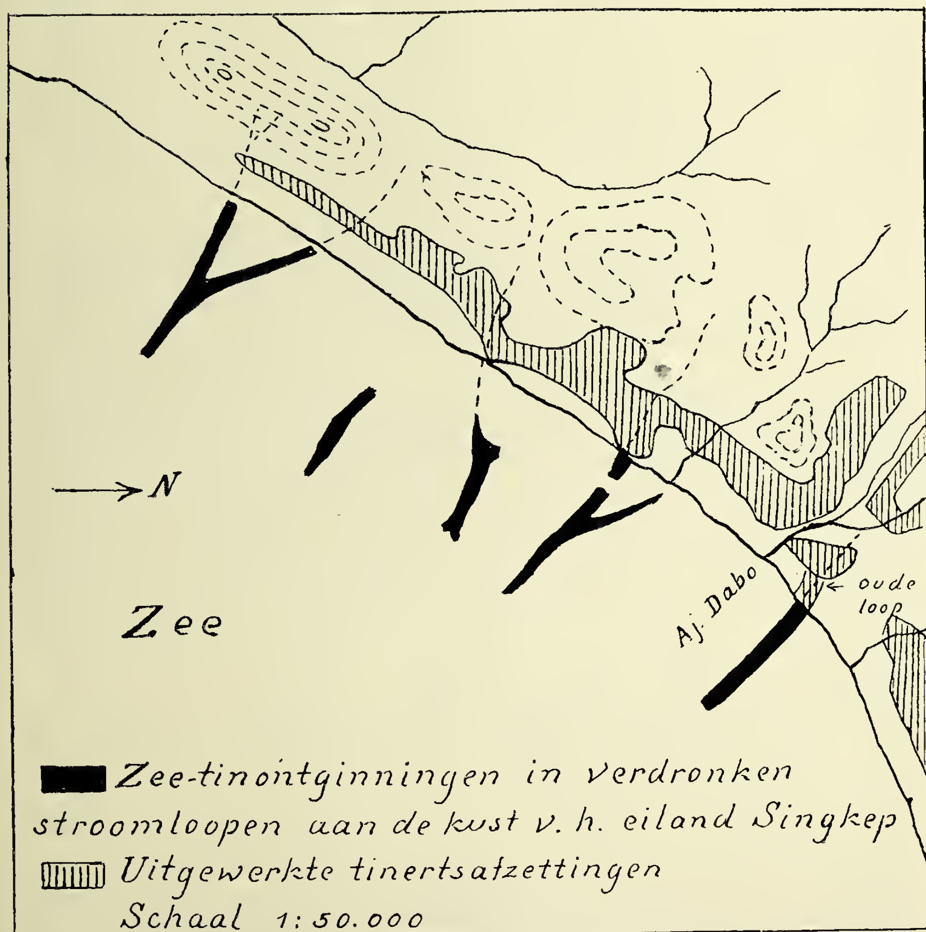


Fig. 2. Naar een kaart in het bezit van de directie der Singkep Tin Maatschappij.

7 M. diep is. De exploitatie van het zoogenaamde zeetin bij het eiland Singkep heeft de geleidelijke voortzetting van een aantal rivierdalen onderzeesch met stelligheid aangetoond.

Door daling van het land of rijzing van den zeespiegel, maar ook daardoor alleen, is dat verschijnsel gereedelijk te verklaren. Ik meen te mogen voorspellen, dat ook bij andere tin-eilanden in de Soenda-zee, met name bij Bangka en Billiton, het bestaan van dergelijke tinertsafzettingen onder den zeespiegel in de stroomgeulen van verdronken rivieren zal kunnen worden aangetoond. Het is zeer wel mogelijk, dat, evenals dit thans bij het eiland Singkep reeds het geval is, de exploitatie van zulk zeetin ook bij Bangka en Billiton een belangrijke oeconomische beteekenis zal kunnen verkrijgen.

Niet altijd behoeven de stroomgeulen der verzonken rivieren thans in zee te liggen; zij kunnen ook nog in het land, maar dan in een zoo laag niveau liggen, dat zij bij den tegenwoordigen stand van het eindvlak van denudatie (de zeespiegel) nimmer tot zoo diep door de erodeerende werking van het water kunnen uitgeschuurd zijn. Zulke abnormaal diep liggende stroomgeulen heeft de exploitatie van het stroomtin zoowel op Bangka als op Billiton leeren kennen. VERBEEK [1]) vermeldt hiervan verscheidene voorbeelden, waarvan ik hier zal noemen:

Op het eiland Bangka, de plistoceene geul van het riviertje Krasak in het district Pangkalpinang, die minstens 16 M. diep beneden de bedding van den tegenwoordigen waterloop is ingesneden, het oude bed van het riviertje Pandji in het district Blinjoe, dat 9.25 M. beneden het tegenwoordige bed en niet veel minder beneden den zeespiegel ligt, het oude bed der Liat-rivier in het district Soengeiliat dat in haar benedenloop 13—19 Meter onder haar tegenwoordige bed en ongeveer even veel beneden den zeespiegel ligt;

op het eiland Billiton het oude bed van de Sidjoek-rivier, dat, bij mijn N°. 30, 6—11 Meter dieper ligt dan het tegenwoordige, een zijtakje van de rivier Moensang in het district Manggar, waarvan het bed tot 5 M. diepte met afzettingen gevuld is, verscheidene oude riviergeulen nabij de plaats Manggar, waarin de benedenste afzettingen, die het tinerts bevatten, in diepe kollings zijn ontgonnen en veelal onder den tegenwoordigen zeespiegel liggen, bij de mijn N°. 30 bijv. niet minder dan 6½ Meter.

In verband met het voorkomen dezer verzonken en verdronken stroomtinertsafzettingen zij nog iets opgemerkt omtrent den invloed der zee, met name der brandingsgolven, op de niet samenhangende

[1]) R. D. M. VERBEEK, Geol. Beschrijv. van Bangka en Billiton. Jaarb. van het Mijnw. XXVI, p. 143—156, 1897.

zoetwaterafzettingen, gedurende het tijdperk van stijgen van den zeespiegel, dus van onderloopen van de Soenda-schiervlakte. Hoewel in die aanvankelijk zeer ondiepe zee met zwakke getijden de werking der brandingsgolven het algemeen bodemrelief niet veel zal hebben kunnen wijzigen, zullen die onsamenhangende afzettingen toch zeker wel min of meer omgewerkt zijn. Wat de tinertseilanden betreft, is het mijn meening, dat zoowel gedurende het tijdperk van stijgen der zee na het plistoceen als gedurende de periodes van kleinere schommelingen van den zeespiegel in recenten of subrecenten tijd zoowel de stroomtinertsafzettingen als de eluviale afzettingen door het zeewater min of meer kunnen zijn omgewerkt en vooral wat de laatste betreft, daarbij kunnen zijn geconcentreerd. Als zulke door de zee betrekkelijk kort geleden omgewerkte tinertsafzettingen meen ik die te mogen beschouwen, welke even boven den zeespiegel op het eiland Singkep langs het strand ten Westen van de hoofdplaats Dabo werden aangetroffen maar thans uitgewerkt zijn (zie fig. 2)[1].

Gaat het bij de eilanden Singkep, Billiton en Bangka slechts om betrekkelijk kleine rivieren uit het heuvelland van het vroegere Soendaland, er bestaat reden te mogen verwachten, dat ook de geulen der groote stroomen, die het Soenda-land ontwaterden en in de Soendaschiervlakte hun beddingen hadden ingesneden, bij het geleidelijk overstroomen dier vlakte ten gevolge van de rijzing van den zeespiegel wel ten deele zullen zijn toegeslibd, maar toch nog niet geheel zullen zijn verdwenen. In dat geval zou de mogelijkheid bestaan hun verloop te kunnen aflezen uit het verloop der isobathen in de tegenwoordige Soenda-zee.

Evenwel zijn de isobathen, zooals die op de zeekaarten voorkomen, geconstrueerd uit een beperkt aantal loodingen, die zelfs in zeer gunstige gevallen nog wel ongeveer een kilometer uit elkaar liggen[2]. Bovendien zijn die loodingen verricht ter wille der belangen der scheepvaart en hebben deze altijd veeleer ten doel gehad de ondiepe punten dan wel de diepere plaatsen of geulen te leeren kennen en op de kaart weer te geven.

Raadpleegt men nu de bestaande kaarten[3]) en de minuutbladen,

[1]) Eene samenvatting van discussies, gevoerd over de wijze van ontstaan der tinertsafzettingen en over de rol van het zeewater daarbij vindt men in een artikel, dat gedurende het ter perse zijn van dit opstel is verschenen, getiteld: J. Rueb. Onstaan der alluviale tinertsafzettingen van Banka en Billiton. De Ingenieur 35e Jaargang p. 21, 1920.

[2]) Dit geldt voor de vrij goed afgeloode gebieden der wereld, waartoe slechts enkele gedeelten van den O. I. archipel behooren.

[3]) De kaarten, die in den handel zijn, geven slechts een deel der verrichte loodingen aan; het totaal daarvan is te vinden op de minuutbladen, die bij de afdeeling

dan blijkt het inderdaad mogelijk daaruit iets, doch niet zeer veel, af te leiden omtrent het verloop der groote rivieren in de plioceene Soenda-schiervlakte. Vooreerst blijkt, dat in deze Soenda-schiervlakte de hoofdwaterscheiding tusschen de Bali-zee en de Chineesche-zee heeft geloopen van Sumatra over de tegenwoordige eilanden Bangka, Billiton, door de straat Karimata, en verder over de Karimata-eilanden naar Borneo. Wij zullen haar de Karimata-waterscheiding noemen. Verder is uit het verloop van de isobaath van 40 vaam op te maken, dat van uit de Chineesche zee een baai (zie fig. 1) diep in het land ingreep tusschen de eilanden Groot-Natoena en Soebi. Die baai is aanvankelijk wijd, maar versmalt zich zuidwaarts en gaat over in een grooten stroom, die, uit het Zuiden komend, er zich in ontlastte. Die stamrivier liep ten Westen van de Tambelan-eilanden en juist langs de Badas-eilanden en is zuidwaarts tot nabij Pedjantan duidelijk te vervolgen.

Deze groote rivier, die de geheele Soenda-schiervlakte ten Noorden van de Karimata-waterscheiding ontwaterde, nam vermoedelijk als voornaamste rechter zijrivieren de Kapoewas en de Sambas in zich op, en als voornaamste linker zijrivieren de Moesi en de Djambi, die zich evenwel misschien al tot één stroom vereenigd hadden, voor zij den hoofdstroom bereikten. De onderzeesche voortzetting van de Kapoewas is zwak aangeduid als een geul, gelegen in het verlengde van den Poengoer-arm, terwijl direct langs de noordwestkust van Bangka een geul met diepten van 20 tot 25 vaam het vroegere stroombed van de Moesi aangeeft. De Kapoewas-geul is op de bestaande kaarten niet verder dan tot P. Datoe, de Moesi-geul niet verder dan tot de meridiaan van de noordpunt van Bangka te vervolgen. De gegevens, aan de kaarten ontleend, maken dus slechts waarschijnlijk, dat de Kapoewas en de Moesi zich in den hoofdstroom ontlastten op de wijze, zooals op kaart 1 is voorgesteld. Bewijzen doen zij het niet.

Van de Indragiri en de Kampar is het onzeker, langs welken weg zij den genoemden hoofdstroom bereikten; alleen wettigt ons, wat van het tegenwoordige onderzeesche relief bekend is, aan te nemen, dat van straat Singapore oostwaarts een stroomgeul in de richting van de Victory en Barren eilanden verliep welke zich van daar tot in den hoofdstroom laat vervolgen.

Het water van de Siak-rivier en een deel misschien ook van dat

hydrographie van het Departement van Marine berusten. Met dankbaarheid maak ik hier melding van de welwillende wijze, waarop de directeur dier afdeeling, de Kapitein ter Zee Phaff, mij inzage van de minuutbladen heeft gegeven.

der Kampar-rivier ontlastte zich door de straat van Malakka, in welke straat de isobaath van 40 vaam de aanwezigheid van een diepe baai van uit het Noordwesten aanwijst, in welke de rivieren van een deel van het toenmalige Malakka en Noord-Sumatra uitmondden.

Ten Noorden van de Kangean-eilanden greep insgelijks een diepe baai, de oostbaai, van uit de Bali-zee in het Soenda-land in. In die baai mondde een groote stroom uit, die door het verloop der isobathen van 40 en meer stroomopwaarts van 37 en 35 vaam over een afstand van omstreeks 350 K.M. eenigszins te vervolgen is, en wel van een punt ten Noorden van de Karimon-djawa eilanden in oostelijke richting, Noord langs Bawean en vervolgens zuidoostwaarts naar de reeds genoemde oostbaai.

Deze groote stroom werd gevormd door de vereeniging der rivieren van het deel van het Soendaland, dat ten Zuiden van de Karimata-waterscheiding was gelegen. Men mag aannemen, dat hij aan zijn linkerzijde, het water van de Koemai, de Sampit, de Katingan, de Kahajan, de Kapoewas Moeroeng en de Barito in zich heeft opgenomen. Een gedeelte van de verdronken Sampit rivier ter lengte van 65 K.M. is uit de isobaath van 10 vaam goed af te lezen. De Kahajan en de Kapoewas Moeroeng vereenigden zich waarschijnlijk niet ver zuidwaarts van hun tegenwoordige monden en die vereenigde rivier ontlastte zich ongeveer 60 K.M. meer stroomafwaarts in de Barito. De Barito stroomde in de Soenda-schiervlakte waarschijnlijk in zuidelijke richting ten Westen van de Arends eilanden en Groot Salembouw en ontlastte zich daarna in de groote Oost-baai. Meer kan men omtrent het verloop van deze thans verdronken stroomloopen niet uit de kaarten afleiden.

Op eenigen afstand van de noordkust van het tegenwoordige eiland Java liep vermoedelijk ook een aanzienlijke stroom, die stellig wel door vele zijrivieren, op het bergland van Java ontspringend, moet zijn gevoed.

Eindelijk mag men waarschijnlijk het spoor van een groote rivier, die in de richting van straat Soenda een deel van het Soenda-land ontwaterde, zien in een smalle diepte, die thans tusschen 30 en 40 vaam onder den zeespiegel ligt en sterk gelijkt op het zeewaarts verbreede deel van een verdronken stroom. Zij verloopt, zooals op fig. 1 is aangegeven, juist ten Zuiden van de Hoorn-eilanden en van P. Pajoeng en kan van daar noordoostwaarts nog over een afstand van 70 K.M. met nagenoeg gelijkblijvende diepte van omstreeks 30 vaam vervolgd worden.

Er bestaan nog geen gegevens, waaruit men het verder verloop van dezen stroom en van haar zijtakken kan afleiden.

e. Sporen van verjongde erosie in plistoceenen tijd. Eenige der groote rivieren van Borneo bezitten, waar het lage land in het heuvelland overgaat, terrassen. De rivieren hebben zich hier een bed ingesneden in grint, vroeger door hen afgezet. Dat moet geschied zijn in een tijd, dat de insnijdende werking der rivieren grooter was dan nu, want thans hebben zij dat bed weder grootendeels met fijnere afzettingen, zand en slib gevuld. Deze oude grintterrassen werden door mij waargenomen aan de Kapoewas bij Sintang, even boven de samenvloeiing van die rivier met de Melawi en aan de Katingan bij, en langs haar rechteroever ook nog stroomaf van, het punt, waar de Samba zich in haar uitstort[1]). Bij Sintang werd nog in het jaar 1894 goud gewasschen uit het grint van deze terrassen. Ik ben geneigd aan te nemen, dat het grint van deze terrassen door de rivieren werd afgezet in laat-plioceenen tijd en nog in den aanvang van het plistoceen, toen in Borneo de denudatie nog lang niet zoo ver was gevorderd als thans. Het ontstaan der terrassen is dan zeer goed te verklaren, zoo men aanneemt, dat gedurende den ijstijd het eindniveau van denudatie omstreeks 75 M. lager werd gebracht; hierdoor werd het verval der rivieren vergroot en de kracht tot erosie versterkt; zij groeven zich diepe beddingen in hun eigen grintafzettingen, die gedurende de afwisselende perioden van versterkte en verminderde erosie in de opeenvolgende glaciale en interglaciale tijdperken ten slotte tot wijde dalen werden verbreed.

Thans ligt het eindvlak van denudatie weer ongeveer zoo hoog, als bij den aanvang van het plistoceen, maar omdat intusschen Borneo sterk gedenudeerd is en de erosie zoo sterk is voortgeschreden, dat de toestand van rijpe erosie is bereikt, hebben de rivieren thans op de plaatsen waar vroeger grint werd gebracht, nog slechts het vermogen zand en slib af te voeren. De breede plistoceene dalen, ingesneden in de grintterrassen worden thans langzaam met zand en slib gevuld.

In den midden- en bovenloop van verscheidene der rivieren in Sumatra, die aan de oostkust uitmonden, worden juist zulke oude grintterrassen gevonden; zij zijn vermoedelijk eveneens van plistoceenen ouderdom en ontstaan door dezelfde oorzaken als die der rivieren van Borneo, maar, aangezien Sumatra niet tot het stabiele deel van het Soenda-land behoort, is het zeer wel mogelijk, dat daar eigen orogenetische bewegingen van het land hebben medegewerkt tot de wording dezer terrassen.

---

[1]) G. A. F. MOLENGRAAFF. Geol. Verkenningstochten in Centraal Borneo p. 19—21 en p. 409—410, Leiden 1900.

De verspreiding en wijze van ontwikkeling der koraalriffen; het groote Soenda-barrière-rif.

De verspreiding der koraalriffen in de Soenda-zee is eigenaardig. In de eerste plaats valt op, dat de Soenda-zee, die oppervlakkig beschouwd voor de ontwikkeling van koralen buitengewoon gunstig gelegen schijnt te zijn, over het algemeen genomen arm is aan koralen. Aan de kusten, zoowel van Borneo, als van Sumatra en Java, zijn koraalriffen zoo weinig ontwikkeld, dat zij op de bestaande hydrographische kaarten bijna nergens worden aangegeven. Vrij van de kusten geldt hetzelfde; ook daar zijn koraalriffen er zeldzaam. Dit is gemakkelijk te begrijpen, indien wij in het oog houden dat de Soenda-zee krachtens haar hierboven geschetste wordingsgeschiedenis snel in vlakteuitgebreidheid moet zijn toegenomen maar in den aanvang een zeer geringe diepte moet gehad hebben, gepaard aan gering zoutgehalte en groot slibgehalte en dus een weinig gunstig milieu moet geweest zijn voor de verspreiding van rifbouwende koralen.

Een uitzondering maken slechts het uiterste randgebied van de Soenda-zee, namelijk daar, waar zij aan zeeën grenst, die reeds vóór haar bestonden en van waar het water is toegevloeid, dat, door overstrooming der schiervlakte van het Soenda-land, de Soenda-zee deed ontstaan. In het randgebied, dat ik op het oog heb, ligt de archipel, waartoe de Natoena-eilanden behooren, welke rijk ontwikkelde strandriffen en eenige los uit zee oprijzende koraaleilanden bezit, verder de archipel der Duizend-eilanden ten Noordoosten van straat Soenda en ten slotte in het uiterste Oosten van de Soenda-zee de Borneobank. Van uit die drie zijden is klaarblijkelijk de Soenda-zee, die aanvankelijk zeer ondiep, modderig en door zoet water verbrakt was, langzamerhand met koralen bevolkt, toen zij geleidelijk dieper, helderder en zouter werd; dat bevolkingsproces is waarschijnlijk nog in vollen gang.

Meer nog dan deze kwestie van de geleidelijke verspreiding der koraalfauna over het Soenda-plat trekt de volgende vraag onze aandacht: waren langs de kust van het plistoceene Soenda-land kustriffen ontwikkeld en zoo ja, wat is daarmede geschied bij de postplistoceene overstrooming van het land? Zijn de kustriffen wellicht opgegroeid tot van het land verwijderde riffen, bijv. barrière-riffen, op de wijze zooals voor het eerst door Darwin in zijn klassiek werk over het ontstaan van barrière-riffen en atollen is aannemelijk gemaakt? De kusten, waar het hier om gaat, zijn aangegeven op de kaart (Fig. 1) door het verloop van de 40 vaam lijn vooreerst in de Zuid-

Chineesche zee, verder ten Noorden van Straat Soenda, dus in het bovenste deel van de Soenda-baai, die in het plistoceene Soenda-land ingreep en eindelijk naar het Oosten tusschen de Borneo-kust en het zuidelijke deel van de straat van Makasser.

Uit het verloop der diepere isobathen bijv. die van 100 vaam of van 200 M. blijkt dat voor de kust van het Soenda-land in de Chineesche-zee in plistoceenen tijd een uitgestrekt plat lag, waarop de zee noordoostwaarts slechts zeer langzaam dieper werd en dat vermoedelijk, wat de tegenwoordige zeebodem nog verraadt, zeer modderig was, ook al, omdat waarschijnlijk een of meer groote rivieren van het Soenda-land er op uitmondden. De voorwaarden voor krachtige ontwikkeling van kustriffen waren hier derhalve ongunstig en het kan ons niet verwonderen dat wij van de vroegere kustlijn thans slechts hier en daar uit een diepte van 40 vaam rifgroepen tot nabij den zeespiegel oprijzend vinden. Toch is het opvallend dat de eenige vrij van land ontwikkelde riffen, die thans in de Zuid-Chineesche zee worden gevonden, zich vrij wel houden aan de op onze kaart aangegeven 40 vaam dieptekromme, dus aan de vermoedelijke kustlijn van het ondergedompelde Soenda-land.

Het is moeilijk te beoordeelen, of langs een zoo bijzondere kust, als het boveneinde van de Soenda-baai moet geweest zijn, de voorwaarden voor de ontwikkeling van kustriffen al dan niet gunstig zijn geweest. Zooals hierboven reeds is opgemerkt, greep de Soenda-baai reeds in plistoceenen tijd diep in het Soenda-land in en vormde zich juist zuid van de tegenwoordige Hoorn-eilanden en P. Pajoeng tot een diepe geul, welke overging in den verwijden mond van een stroom, die uit het Noordoosten kwam.

Opvallend is het echter stellig, dat de strook ten Noordoosten van straat Soenda, waar dus vroeger het boveneinde der Soenda-baai lag, thans, in tegenstelling met alle andere deelen der Javazee, rijk is aan echte koraaleilanden, die los van het land zich uit een diepte van 20 vaam of meer tot aan of nabij den zeespiegel verheffen. Vele van deze, en dat geldt vooral voor die welke uit geringe diepte oprijzen, zijn waarschijnlijk jong en zijn ontstaan door de vereeniging van kleine koraalvormingen, die op losse steenen afzonderlijk waren ontwikkeld, zooals door Sluiter[1]) is aangetoond. Uit ondiep water bijv. van 12 vaam diepte gaat het opgroeien van nieuwe koraal-eilanden op die wijze nog steeds door. Voor die eilanden echter uit de groep der Duizend-eilanden, welke uit dieper water, van 40 vaam

[1]) C. Ph. Sluiter. Einiges über die Entstehung der Korallenriffe in der Javazee und Branntweinsbai, und über neue Korallenbildung bei Krakatau. Nat. Tijdschr. voor Ned. Indië XLIX p. 365 en volg. 1889.

diepte en meer, oprijzen, zooals bijv. P. Pajoeng en andere, acht ik het waarschijnlijk dat zij ontstaan zijn door opwaarts groeien van riffen, die in de vroegere Soenda-baai aan de kust van het plistoceene Soenda-land vóór zijn onderdompeling reeds ontwikkeld waren.

Veel sprekender en ondubbelzinniger zijn de verhoudingen aan de vroegere oostkust van het Soenda-land. Hier grenst het passieve Soenda-land aan het tektonisch actieve gebied der Molukken-zee en wel onmiddellijk aan de straat van Makasser, één der vele diepzeetroggen, die daar nog steeds dieper worden, terwijl andere deelen, de tegenwoordige eilanden, zich nog steeds verheffen. In plistoceenen tijd was deze trog of syncline (misschien een slenk) tusschen Borneo en Celebes reeds in volle ontwikkeling en dus waren de voorwaarden voor de ontwikkeling van een plat aan de oostkust van het Soenda-land toen zeer ongunstig. De dalende zeebodem bracht de sedimenten, die het Soenda-land aanvoerde, steeds in zoo diepe niveau's, dat het niet tot platvorming kon komen. Het Soenda-land was daardoor naar het Oosten begrensd door een diepe zee, de tegenwoordige straat van Makassar, en zijn kust was daar steil. Een plat was niet aanwezig. Dus ideale voorwaarden voor koraalontwikkeling: een diepe zee, stellig helder en zout water, althans op eenigen afstand van de groote rivier of rivieren, die ten Noorden van Madoera stroomden en het Soenda-land in de richting van de straat van Makasser ontwaterden, een flinke branding en een steile, ten deele stellig rotsachtige kust. Geen wonder, zoo langs deze kust een levenskrachtig rif zich ontwikkelde.

En wat zien wij thans?

Op den uitersten oostelijken rand van het Soenda-plat, de zoogenaamde Borneo-bank, staat een rif (Fig 3) als een smalle, op vele plaatsen onderbroken muur oprijzend van uit een diepte van 70 tot 90 M. tot aan of nabij de oppervlakte der zee. Landwaarts van dit rif, op het Soendaplat, neemt de zeediepte van af 70 M. slechts zeer langzaam af; zeewaarts, naar de straat van Makasser, neemt de diepte zeer snel, plaatselijk wellicht bijna loodrecht, tot 200 M. en meer toe, zoodat op een afstand van eenige kilometers van het rif reeds diepten van meer dan 1000 Meter voorkomen. Dit rif staat op den rand van het plistoceene Soenda-land; het was in plistoceenen tijd vóór het afsmelten van het ijs in hoogere breedten een strandrif van dat Soendaland en naarmate de Soenda-schiervlakte na plistoceenen tijd door de zee werd overstroomd, bouwden de koralen het rif opwaarts tot zijn tegenwoordige gedaante. Dat rif is dus een echt barrière-rif, om het onder het water verdwijnende Soenda-land opgegroeid op de wijze, zooals Darwin zich de barrière-riffen in het algemeen gevormd denkt.

Alleen maakt dat rif op het eerste gezicht niet terstond den indruk van een barrière-rif, omdat het land, waartoe het behoort, op zoo onregelmatige wijze en in verhouding tot de diepte van het water over zoo buitengewoon grooten afstand is ondergeloopen. Gaan wij meer in bijzonderheden het verloop van dit rif, dat het groote Soenda-barrière-rif mag genoemd worden, na, zoo blijkt dat het begint bij het Amboengi rif, dat tot de Kleine-Paternoster-eilanden behoort. Deze groep van koraaleilanden, die zich in oost-westelijke richting van Tandjong Aroe tot ongeveer 75 K.M. van de kust van Borneo uitstrekt, mag misschien als de noordelijkste grens van het Soenda-plat aan de oostkust van Borneo worden beschouwd. Het koraaleiland Amboengi ligt ongeveer 120 K.M. ten Zuiden van den mond van de Koetei rivier. Van het Amboengi-koraaleiland verloopt ons barrière-rif in zuidoostelijke richting tot een punt tegenover en op gelijke breedte met Tandjong Ongkona op Celebes. Op dat punt is het rif 230 K.M. van de tegenwoordige kust van Borneo verwijderd, maar slechts 44 K.M. van de kust van Celebes. Ten Westen van het rif, in de richting van Borneo, is de zeediepte nergens grooter dan 75 Meter, aan de oostzijde van het rif, in de richting van Celebes, neemt deze aanstonds tot 200, zeer spoedig tot 1000 en verder tot 2385 Meter toe. Van hier af verloopt het rif eerst in zuid-westelijke, daarna in zuid-zuidwestelijke richting door tot ongeveer 5°40′ Z.Br.

Een vrij goed aaneengesloten gedeelte van het rif, dat bij eb op vele plaatsen droog loopt, ligt tusschen 4° 20′ en 5° 30′ Z.Br. Dat gedeelte is op de zeekaarten als de Laurel-riffen onderscheiden. De totale lengte van het Soenda-barrière-rif van Amboengi tot 5° 40′ Z.Br. is ongeveer 500 K.M. Verder dan 5° 40′ is het rif op de kaarten niet te vervolgen, maar ongeveer 100 K.M. verder in zuid-westelijke richting begint het weer bij het Kwong-Eng-rif en het kan van daar door een aantal koraaleilandjes tot bij de Kangeang-eilanden vervolgd worden, ook hier weder de uiterste grens van het Soenda-plat, dus van het overstroomde Soenda-land markeerend.

De gaping van ruim 100 K.M. in het rif vormt den ingang van een grooten imham of baai, waarin zich vermoedelijk de groote stroom of stroomen ontlastten, die in plistoceenen tijd het Soenda-land in de richting van het zuidelijkste deel der straat van Makasser ontwaterden. Het ontbreken van riffen wordt daardoor gereedelijk verklaard.

Het groote barrière-rif[1]) bezit volgens de zeekaarten talrijke onder-

[1]) Niermeyer heeft l.c. p. 884 en kaart XIII No. 2 reeds een deel van dit groote rif als een barrière-rif opgevat en beschreven, maar m. i. het werkelijke verband, dat er bestaat tusschen de genese van de Borneobank en van dit barrière-rif

Alleen maakt dat rif op het eerste gezicht niet terstond den indruk van een barrière-rif, omdat het land, waartoe het behoort, op zoo onregelmatige wijze en in verhouding tot de diepte van het water over zoo buitengewoon grooten afstand is ondergeloopen. Gaan wij meer in bijzonderheden het verloop van dit rif, dat het groote Soenda-barrière-rif mag genoemd worden, na, zoo blijkt dat het begint bij het Amboengi rif, dat tot de Kleine-Paternoster-eilanden behoort. Deze groep van koraaleilanden, die zich in oost-westelijke richting van Tandjong Aroe tot ongeveer 75 K.M. van de kust van Borneo uitstrekt, mag misschien als de noordelijkste grens van het Soenda-plat aan de oostkust van Borneo worden beschouwd. Het koraaleiland Amboengi ligt ongeveer 120 K.M. ten Zuiden van den mond van de Koetei rivier. Van het Amboengi-koraaleiland verloopt ons barrière-rif in zuidoostelijke richting tot een punt tegenover en op gelijke breedte met Tandjong Ongkona op Celebes. Op dat punt is het rif 230 K.M. van de tegenwoordige kust van Borneo verwijderd, maar slechts 44 K.M. van de kust van Celebes. Ten Westen van het rif, in de richting van Borneo, is de zeediepte nergens grooter dan 75 Meter, aan de oostzijde van het rif, in de richting van Celebes, neemt deze aanstonds tot 200, zeer spoedig tot 1000 en verder tot 2385 Meter toe. Van hier af verloopt het rif eerst in zuid-westelijke, daarna in zuid-zuidwestelijke richting door tot ongeveer 5°40′ Z.Br.

Een vrij goed aaneengesloten gedeelte van het rif, dat bij eb op vele plaatsen droog loopt, ligt tusschen 4° 20′ en 5° 30′ Z.Br. Dat gedeelte is op de zeekaarten als de Laurel-riffen onderscheiden. De totale lengte van het Soenda-barrière-rif van Amboengi tot 5° 40′ Z.Br. is ongeveer 500 K.M. Verder dan 5° 40′ is het rif op de kaarten niet te vervolgen, maar ongeveer 100 K.M. verder in zuid-westelijke richting begint het weer bij het Kwong-Eng-rif en het kan van daar door een aantal koraaleilandjes tot bij de Kangeang-eilanden vervolgd worden, ook hier weder de uiterste grens van het Soenda-plat, dus van het overstroomde Soenda-land markeerend.

De gaping van ruim 100 K.M. in het rif vormt den ingang van een grooten imham of baai, waarin zich vermoedelijk de groote stroom of stroomen ontlastten, die in plistoceenen tijd het Soenda-land in de richting van het zuidelijkste deel der straat van Makasser ontwaterden. Het ontbreken van riffen wordt daardoor gereedelijk verklaard.

Het groote barrière-rif[1]) bezit volgens de zeekaarten talrijke onder-

---

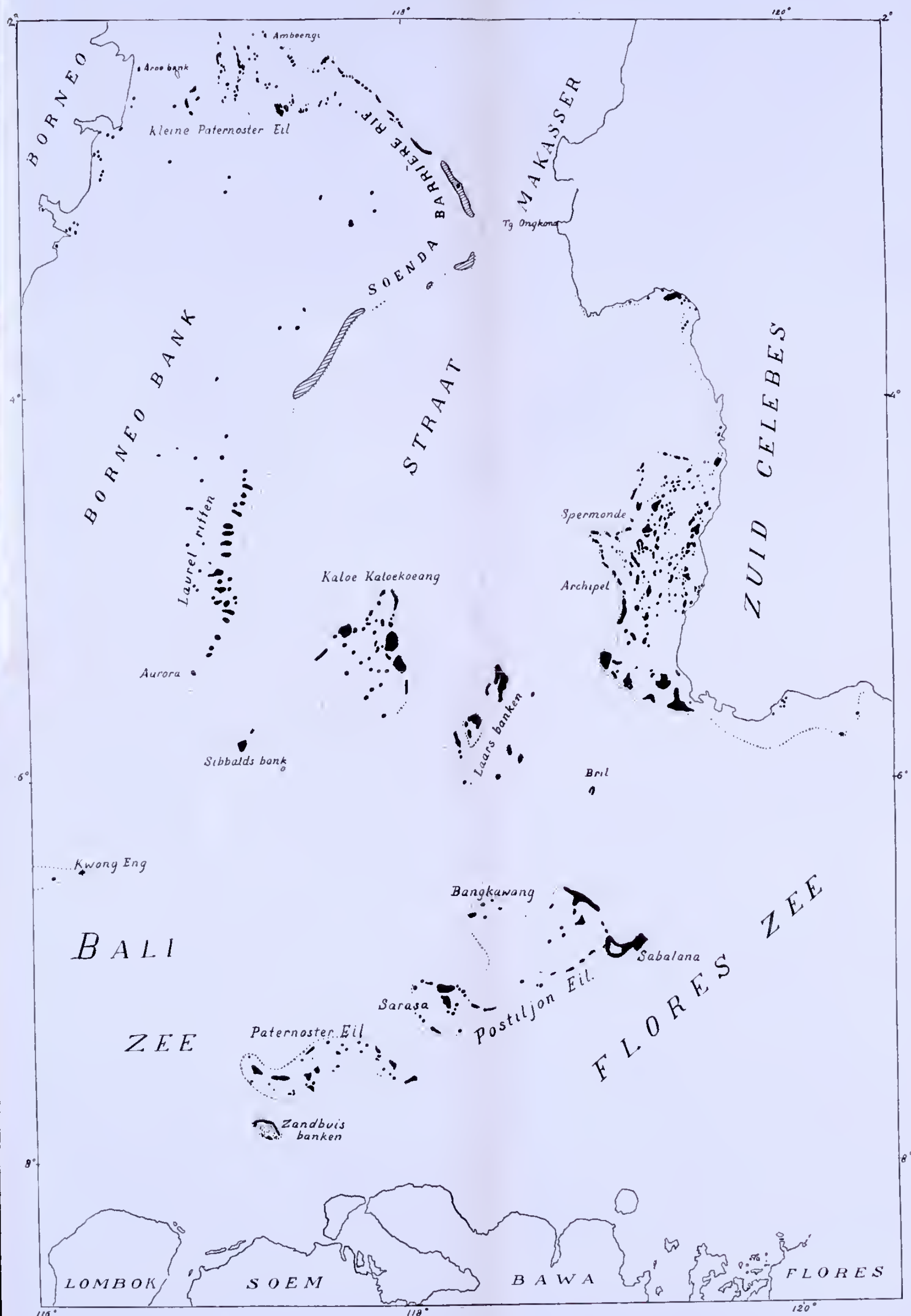
[1]) NIERMEYER heeft l.c. p. 884 en kaart XIII No. 2 reeds een deel van dit groote rif als een barrière-rif opgevat en beschreven, maar m. i. het werkelijke verband, dat er bestaat tusschen de genese van de Borneobank en van dit barrière-rif

G. A. F. MOLENGRAAFF en M. WEBER: „Het verband tusschen den pleistoceenen ijstijd en het ontstaan der Soenda-zee (Java- en Zuid-Chineesche Zee) en de invloed daarvan op de verspreiding der koraalriffen en op de land- en zoetwater-fauna.”

KAART DER KORAALEILANDEN IN STRAAT MAKASSER

Fig. 3.

Schaal: 1 : 2.000.000.



Doorgaande lijn	. . . .	Kust.
Stippellijn	. . . .	Isobaath van 40 vaam of 72 meter.
Zwart	. . . .	Koraalvormingen, die boven water uitsteken of tot 5 vaam daar beneden blijven.
Schuin gestreept	. . . .	Koraalvormingen, die tusschen 5 en 20 vaam beneden de zeespiegel liggen.

brekingen en bereikt slechts hier en daar de oppervlakte van het water, op de meeste plaatsen ligt het op geringe diepte en alleen ten Zuidwesten van de Laurel-riffen wordt zijn ligging tot 5°40′ Z.Br. allengs dieper. Klaarblijkelijk waren hier, waarschijnlijk door onvoldoend zoutgehalte van het water, de voorwaarden voor het opwaarts groeien van het kustrif bij de geleidelijke onderdompeling van het land niet zoo gunstig als meer noordelijk in de straat van Makasser.

De atollen en verwante koraaleilanden, die wortelen op afgeknotte en verzonken eilanden, die tot het Soenda-land behoorden.

Het zuidelijkste, ondiepste deel van de straat van Makasser wordt naar het Noorden van de diepere deelen dier straat en naar het Zuidoosten van de Flores-zee gescheiden door eenige groepen van koraaleilanden en atollen [1]), en wel naar het Noorden door de Kaloe Kaloekoeang-eilanden en de Laarsbanken, naar de Flores-zee door de Paternoster- en Postiljoneilanden (zie fig. 3). Zij vertoonen in bouw een sterke verwantschap.

1. *De groep der Kaloe Kaloekoeang-eilanden.* Alle zijn koraaleilanden. De meeste wortelen op den rand van een bank, die tamelijk vlak is, gemiddeld 20 en nergens meer dan 40 vaam beneden den zeespiegel ligt. Drie loodingen, die diepten van resp. 66, 90 en

---

niet ingezien. Hij vraagt voor het gedeelte van dat rif, dat tusschen de Laurel-riffen en de Kleine Paternoster-eilanden de oppervlakte der zee niet bereikt, „is hier een randrif bezig zich op te bouwen?" Het is duidelijk, dat ik hierop bevestigend antwoord, maar dat ik mij dat opbouwen denk, niet uit een diepte van 200 M. maar uit een diepte van 75 tot 90 M., gelijken pas houdend met het allengs stijgen van den zeespiegel na den ijstijd. Tevens zij geconstateerd, dat ik de uitspraak, in datzelfde artikel op p. 881 gedaan: „geen plat, geen barrière-rif", niet onderschrijf. Voor het omgekeerde zou wel iets te zeggen zijn; immers ontwikkelde zich bij het Soenda-land in de Zuid-Chineesche Zee, waar het een uitgestrekt plat bezat, geen barrière-rif, in de Straat van Makasser daarentegen, waar het geen plat bezat, een voortreffelijk barrière-rif. Evenmin kan ik de meening, op p. 893 uitgesproken, dat de bouwwijze der barrière-riffen in den Oost-Indischen archipel „een nieuw getuigenis is tegen de theorie van Darwin, volgens welke de barrières uit strandriffen zouden ontstaan zijn", deelen. Veeleer zie ik de meening van Darwin door de bouwwijze der barrière-riffen in den Oost-Indischen archipel bevestigd en zoo zij mij tot één uitspraak aanleiding zou geven, dan zou het deze zijn: „zonder daling van den bodem of rijzing van den zeespiegel, wat in dezen hetzelfde beduidt, geen barrière-riffen en geen atollen".

[1]) Onze kennis van deze koraaleilanden is nog zeer onvoldoende en nieuwe opmetingen zullen hier allicht nog groote verrassingen brengen, zooals ook het geval was bij de jongste opmetingen van de eilanden der Toekang besi groep in 1916 en van het atol der Zandbuisbanken in 1910.

meer dan 100 vaam aangeven, wijzen er op, dat de bank door een smalle, diepe straat in twee deelen wordt gescheiden.

Rondom neemt de zee van af den rand van de bank, die overal ongeveer 40 vaam diep ligt, snel toe. Van dien rand is een koraalrif omhoog gegroeid dat, vooral naar boven toe, zeer sterk onderbroken is. Aan de noordelijke helft van de bank bereiken de toppen van dit rif de oppervlakte der zee op vele plaatsen, maar aan de zuidelijke helft is dit niet het geval. Behalve aan den rand verheffen zich van het bovenvlak van de bank ook nog op verschillende andere plaatsen rifbouwsels, die hier en daar tot aan den zeespiegel reiken. Op het uiterste noordelijke deel van de bank zijn de rifbouwsels ringvormig gerangschikt en vormen aldus een faro of atollon. De Kaloe Kaloekoeang-eilanden vormen te zamen een samengesteld atol, waarvan de ring niet geheel gesloten en vooral in het zuidelijke gedeelte over groote afstanden onderbroken is. In bouw gelijkt het atol volkomen op de samengestelde atollen van den Malediven-archipel, bijv. op het Miladdummadula-atol,[1]) waarvan de ring, die zich verheft van af den rand van een bank, die gemiddeld 20—25 vaam onder den zeespiegel ligt, insgelijks op zeer veel plaatsen onderbroken is en bovendien over groote afstanden beneden den zeespiegel blijft. Alleen is dit Miladummadula-atol gerekter van vorm dan het Kaloe Kaloekoeang-atol; de lengte en breedte van het eerste zijn 146 × 31 K.M., van het tweede 98 × 58 K.M.

2. *De Paternoster- en de Postiljon-eilanden.* Voor deze koraaleilanden geldt in hoofdzaak de beschrijving, zooeven van de Kaloekoeang-eilanden gegeven. Zij bestaan uit drie onderzeesche banken, met een diepte, die van 17 tot 40 vaam gaat. Van de eerste bank, waarvan de grootste afmetingen 140 × 50 K.M. zijn, en wel in hoofdzaak aan den rand, verheffen zich tot aan of nabij den zeespiegel twee groepen van rifbouwsels, die ieder nu ringvormig gerangschikt zijn, en te zamen het samengestelde dubbel-atol der Postiljon-eilanden vormen. Dat dubbel-atol bestaat uit het zuidwestelijke Sarasa-atol en het noordoostelijke Sabalana-atol. Een deel der rifeilandjes van het eerste atol zijn wederom ringvormig tot een faro gerangschikt, de Sapoeka-faro. Het noordoostelijke Sabalana-atol bezit zoowel westwaarts als oostwaarts een opmerkelijken uitlooper of hoorn, naar het Westen het Bangkawang-atollon, naar het Oosten het Sabalana-atollon. Het zuidwestelijke Sarasa-atol zou men ook als een bijzonder groote faro of atollon van het geheele Sabalana-atol kunnen beschouwen en dan zou de naam dubbel-atol vervallen.

[1]) A. AGASSIZ. The coral reefs of the Maldives. Mem. Mus. Comp. Zool. Harvard College XXIX p 83 en Pl. 1-3., 1903.

De tweede bank, die der Paternoster-eilanden, groot 115 × 26 K.M. en van gelijke diepte als de andere draagt insgelijks vooral aan zijn rand, die ongeveer 40 vaam diep ligt, talrijke koraaleilanden, die tot een steilen in éénrichting verlengden en gebogen en onduidelijken krans zijn gerangschikt. Te zamen vormen zij een weinig typisch atol.

Een weinig ten Zuiden van de Paternoster-eilanden ligt een groep koraaleilandjes, waarvan de fraaie atolvorm door het opnemingsvaartuig Lombok in het jaar 1910 is bekend geworden. Zij vormen te zamen een nagenoeg gesloten ring uit drie gedeelten bestaande, die de Zandbuisbanken, Maria Reigersbergen en Huzaar genoemd worden. De lagune is gedeeltelijk meer dan 100 vaam diep.

Ik veronderstel dat in plistoceenen tijd deze banken eilanden vormden, die tot het Soenda-land behoorden maar daarvan reeds afgescheiden waren door bodemdalingen in verband met de vorming van de bekkens van de Bali-zee en de Straat van Makasser. De vorming van deze diepe zeeën was een uiting van de orognetische bewegingen, die nog heden in het oostelijk deel van den archipel in vollen gang zijn. Hier greep dus reeds voor den aanvang van het plistoceen het labiele Oosten in in het stabiele Westen van den archipel. Wat geschiedde nu met deze eilanden, het Kaloekoeang-, het Paternoster- en het Postiljon-eiland? Zij kwamen evenals het geheele Soenda-land aanvankelijk minstens 72 Meter hooger ten opzichte van den zeespiegel te liggen. Het is niet bekend, maar wel aannemelijk, dat deze eilanden voordat de daling van den zeespiegel intrad, door rifpantsers tegen de vernielende werking der brandingsgolven beschermd waren en, zoo men de beginselen aanvaardt, door Daly uiteengezet in zijn *glacial-control theory* [1]), kan men zich denken, dat zij in plistoceenen tijd geheel door de brandingsgolven werden geabradeerd en tot banken gemaakt, die zoo diep onder den zeespiegel lagen als de werking der golven reikte. Daly is van oordeel, dat de abrasie en afknotting voornamelijk heeft plaats gehad gedurende de maxima van glaciatie, d. w. z. de perioden van laagsten stand van den zeespiegel, door het proces van afslag. Het komt mij voor, dat die abrasie en afknotting vooral sterk en voortschrijdend zal zijn geweest gedurende de overgangen van glaciale tot interglaciale tijdperken, dus gedurende de tijdperken van langzame en langdurige stijging van den zeespiegel. Bij den aanvang van iederen interglaciaaltijd werd de abrasie en afknotting der inmiddels ook telkens sterker

---

[1]) R. A. Daly. Pleistocene glaciation and the coral reef problem. Amer. Journal of Science XXX p. 297, 1910; Origin of the coral reefs. Science Conspectus I p. 120, 1911; The glacial-control theory of coral reefs. Proc. of the Amer. Acad. of Arts and Sciences LI p. 157, 1915.

gepeneplenizeerde eilanden vollediger gemaakt, zoodat ten slotte aan het eind van het plistoceen de eilanden volledig afgeknot en tot onderzeesche banken gereduceerd werden, die bij uiteindelijk stijgen van den zeespiegel na den ijstijd tot een diepte van meer dan 72 Meter door de zee werden bedekt. De strandriffen, die aan het eind van het plistoceen aanwezig waren evenals de rifbouwsels, die bij het laatste onderloopen hier en daar op de bank ontstonden, groeiden geleidelijk, naarmate het water steeg, op tot de atollen en atolachtige koraaleilanden, zooals die nu zich voordoen.

3. *De Spermonde-bank.*

Zoo men geneigd is, de Koeloekoeang-, de Paternoster- en de Postiljon eilanden te beschouwen als gedeelten van het Soenda-land, die volgens de *glacial-control theory* tot koraaleilanden ontwikkeld zijn, dan ligt het voor de hand te vermoeden, dat het groote plat aan de westkust van Zuid-Celebes, dat de groep van koraaleilanden draagt, bekend als de Spermonde-archipel, eveneens tot het Soenda-land in nauwe betrekking heeft gestaan. De Borneo-bank en de Spermonde-bank hebben zeer veel met elkaar gemeen; beide liggen gemiddeld 50 en hoogstens 75 M. onder den zeespiegel, aan den rand van de Spermonde-bank is een barrière-rif ontwikkeld, dat in duidelijkheid niet ten achter staat bij het Groote Soenda-barrière-rif en het Spermonde-plat is evenals de Borneo-bank bezet met een groot aantal rifbouwsels, die hier en daar de oppervlakte van het water bereiken. Het Spermonde-plat houdt bij 4°16′ Z.Br. plotseling op en het Spermonde-barrière-rif, dat van 5°40 Z.Br. noordwaarts over een afstand van 230 K.M., zij het ook niet samenhangend, toch als een reeks van koraaleilanden te vervolgen is, legt zich hier tegen de strandriffen aan en meer noordwaarts draagt de kust van Celebes slechte onbeduidende strandriffen.

Het maakt den indruk, alsof de westkust van Zuid-Celebes in den jongsten geologischen tijd dezelfde geschiedenis heeft gehad als het Soenda-land, in tegenstelling met andere deelen van Celebes.

4. *De Laars-banken en het atol de Bril.*

De koraaleilanden, bekend als de Laars-banken en het atol de Bril, die in het kanaal, dat de straat van Makasser met de Flores-zee verbindt, zijn gelegen, geven het recht aan te nemen, dat deze nog in post-plistoceenen tijd dieper is geworden. De Laars-banken vormen te samen een samengesteld atol. De rifbouwsels zijn tot een ring gegroepeerd, die groote gapingen vertoont. Zij verheffen zich van een voetstuk, dat meer dan 100 vaam diep is gelegen, maar in bijzonderheden nog niet bekend is. In het noordelijk deel zijn de riffen tot een afzonderlijken ring of faro gegroepeerd, welk atollon

op de zeekaarten den naam van den Laars-eilanden draagt. De koraaleilanden der Laars-banken zijn vermoedelijk op dezelfde wijze ontstaan als die op de Kaloe-Kaloekoeang bank; de Laars-bank zou dan vroeger op dezelfde diepte als de Kaloekoeang- of de Paternosterbank hebben gelegen en behoorde even als de laatstgenoemde bij den aanvang van het plistoceen als een eiland tot het Soenda-land. Na het plistoceen verzonk echter de bank waarop het Laars-atol stond door dieper worden van het water, dat de straat van Makasser met de Flores-zee verbindt, en de koraalvormingen bleven slechts hier en daar in staat door opwaartschen groei tot aan of nabij den zeespiegel te blijven. Het atol Bril kan men zich op dezelfde wijze ontstaan denken als het Laars-atol. Evenzeer ben ik geneigd aan te nemen, dat het Zandbuis-atol met zijn lagune met diepten van meer dan 100 vaam op een bank staat, die nog na het plistoceen is weggezonken.

Schommelingen van den zeespiegel in recenten en subrecenten tijd.

Uit de ligging van eindmoraines en uit andere eigenaardigheden der terreinen, die door de plistoceene ijsbedekkingen bij hun terugtrekken zijn ontruimd, heeft men kunnen opmaken, dat dit terugtrekken niet ononderbroken is voortgegaan, maar is afgewisseld door perioden van rust en waarschijnlijk ook wel van tijdelijk hernieuwden groei van het ijs. Ook in historischen tijd heeft hetzelfde plaats gehad; de gletschers der Alpen waren sedert den Romeinschen tijd tot in de laatste decaden der 16de eeuw kleiner dan thans, daarna namen zij snel in uitgebreidheid toe en bleven over het algemeen sterker ontwikkeld dan thans het geval is tot omstreeks het jaar 1850; na dat jaar zijn zij bijna onafgebroken afgenomen tot op heden, maar zijn nog lang niet zoo klein als bijv. in het jaar 1570. Deze feiten wijzen voor de uitbreiding der gletschers in de Alpen in historischen tijd althans op één geheele belangrijke schommeling, geringe uitbreiding tusschen ± 50 n. C. en 1570, sterkere uitbreiding van 1570 tot 1850 en weder geringere uitbreiding na het jaar 1850, welke nog steeds voortduurt. Er is geen reden het niet voor waarschijnlijk te houden, dat deze schommelingen zich over alle vergletscherde gebieden der aarde op overeenkomstige wijze hebben geuit en in dit geval zouden zij moeten zijn weerspiegeld door correspondeerende geringe schommelingen van den zeespiegel. En het is daarom wel te verwachten, dat ook aan de kusten van de Soendazee iets van deze of van dergelijke schommelingen van gering bedrag zal waarneembaar zijn. Inderdaad zijn in enkele der geologisch goed

bekende gedeelten van het gebied der Soenda-zee verschijnselen waargenomen, die op een iets hoogeren stand van den zeespiegel in geologisch kort verleden tijd wijzen. Zoo meldt VERBEEK, dat aan de kusten van Billiton [1]) en op de omringende eilanden veel opgeheven koraalkalk wordt gevonden, die echter niet meer dan 1 à 2 meter boven hoogwaterstand is gelegen en dikwijls bedekt is door los koraalgruis en zeezand. Voor het eiland Bangka [2]) deelt VERBEEK hetzelfde mede en voegt ook voor dit eiland er bij, dat hem daar geen plaatsen bekend zijn, waar koraalkalk meer dan 1 of 2 meter boven hoogwaterstand is opgeheven.

Het voorkomen van die koraalkalk (het zeezand bewijst niets, omdat het kan opgewaaid zijn) bewijst dat in betrekkelijk recenten tijd een kleine schommeling van den zeespiegel heeft plaats gehad, gedurende welken tijd de zeespiegel 2 meter, of nog iets meer, hooger moet hebben gestaan dan thans.

CORNETS DE GROOT [3]) meent, dat het geheele eiland Billiton na het tertiaire tijdperk eenige meters hoog is opgeheven op grond van het vinden van zeeschelpen van jong-plistoceenen (of recenten) ouderdom [4]) in den stroomtinertsgrond in de mijn Ditjang N°. 8 van het district Tandjong Pandang, niet ver van het tegenwoordige strand. Echter is het uit de beschrijving van DE GROOT niet op te maken, of deze laag stroomtinertsgrond (kaksa) boven den gemiddelden tegenwoordigen stand van den zeespiegel ligt of niet, terwijl VERBEEK mededeelt, dat zij waarschijnlijk een weinig onder het tegenwoordige niveau der zee ligt. In het jaar 1911 vond ik juist zulk een afzetting van recente zeeschelpen in de kaksa van de mijn Merante in het district Linggang. Deze mijn ligt niet ver van de kust en de laag met schelpen vond ik ongeveer 8 Meter onder het maaiveld. Hoewel de hoogte van het maaiveld aldaar niet nauwkeurig bekend is, staat toch wel vast, dat die laag met schelpen niet boven maar beneden den gemiddelden stand van het zeewater is gelegen.

VERBEEK [5]) vermeldt het voorkomen van juist zulke schelplagen,

---

[1]) R. D. M. VERBEEK. Geol. beschrijving van Bangka en Billiton. Jaarb van het Mijnwezen XXVI, 1897 pag. 81.

[2]) R. D. M. VERBEEK. l.c. pag. 62.

[3]) CORN. DE GROOT. Herinneringen aan Blitong. 's Gravenhage 1887, p. 200. 208 en vooral p. 470 – 473.

[4]) MARTIN heeft deze schelpen onderzocht en komt tot de conclusie „that the fauna in question belongs to a very recent past" en „that the fauna agrees with that of the sea surrounding the island of Blitong". Zie K. MARTIN. On a posttertiary fauna from the stream-tin-deposits of Blitong. Notes from the Leyden Museum Vol. III p. 17 and 19, 1881.

[5]) R. D. M. VERBEEK l.c. pag. 170.

behalve van de bovengenoemde plaatsen ook nog van de mijn N°. 30 ten Oosten van Manggar en van de mijn N°. 1 in het district Linggang en voegt er bij dat zij op ongeveer het tegenwoordige niveau der zee zijn gelegen.

Het wil mij in verband met een en ander niet gerechtvaardigd voorkomen, op grond van deze vondsten van schelpen van geringen ouderdom, gevolgtrekkingen te maken omtrent een mogelijke geringe rijzing van het eiland ten opzichte van den zeespiegel.

In het tektonisch niet stabiele gedeelte van het Soenda-land, waartoe het grootste gedeelte van Sumatra en Java behooren, zijn, zooals te verwachten is, in plistoceenen en post-plistoceenen tijd bewegingen van uiteenloopend karakter geconstateerd. Het is niet het doel van dit opstel, deze te vermelden en hun wijze van ontstaan in discussie te brengen.

De Sahoel-bank.

De Sahoel-bank is het overstroomde deel van een vlak land, een schiervlakte, die behoorde tot een groot land, waarvan in plistoceenen tijd Australië, Nieuw-Guinea, de Aroe-eilanden en eenige naburige eilanden deel uitmaakten. Na den plistoceenen glaciaaltijd liep door het stijgen van den zeespiegel dat vlakke land onder en werd de Sahoel-bank of het Sahoel-plat (Fig. 1) gevormd, dat thans zeer gelijkmatig ongeveer 50 Meter onder den zeespiegel ligt, ongeveer zoo diep als het Soenda-plat.

De noodige gegevens ontbreken mij, de geologische geschiedenis van het Sahoel-plat nader te kunnen uitvorschen. Alleen zij vermeld, dat de rivieren van Noordwest Anstralië, die thans op het Sahoel-plat uitmonden, voortreffelijke typen van verdronken rivieren vertoonen. De Prince Regent River zou als een voorbeeld van een verdronken rivier kunnen dienen.

Conclusies.

De voorwaarden voor platvorming waren in plistoceenen tijd zeer gunstig en bereikten in tropische streken aan het eind van het plistoceen een optimum.

In plistoceenen tijd stond de zeespiegel in tropische streken gedurende de maxima van glaciatie minstens 40 vaam (72 Meter) lager dan thans.

Malakka, Sumatra, Java en Borneo waren toen tot één land, het Soenda-land, verbonden.

Gedurende den plistoceenen tijd ontstond bij zeer gunstige

voorwaarden voor vorming van een gradatievlak in dat Soenda-land de uitgestrekte Soenda-schiervlakte.

Na afloop van de plistoceene ijstijden ontstond bij optimale condities voor platvorming de Soenda-zee of het Soenda-plat door onderloopen der Soenda-schiervlakte.

Het groote Soenda-barrière-rif is ontstaan door opwaartschen groei van de strandriffen van het plistoceene Soenda-land gedurende de periode van rijzing van den zeespiegel, die op den ijstijd volgde.

De atollen en atolachtige koraaleilanden in het zuidelijkste deel van de straat van Makasser zijn in hoofdzaak onstaan op de wijze, zooals Daly zich de vorming van zulke koraaleilanden voorstelt in zijn *glacial control theory.*

NASCHRIFT.

Nadat de bovenstaande mededeeling reeds was afgesloten, kwam mij een artikel van L. J. C. van Es[1]) in handen, waarin een onderwerp wordt behandeld, dat met het mijne in vele opzichten verband houdt. Het is mij niet mogelijk de resultaten, waartoe van Es komt, hier uitvoerig weer te geven en met de mijne te vergelijken. Alleen zij hier op enkele punten gewezen, die ik ontleen aan de slotsom van zijn artikel, dat ook overigens vele lezenswaardige bijzonderheden bevat. Van Es denkt zich in laat-plioceenen tijd de eilanden Borneo en Sumatra onderling en Sumatra ook met Java èn Malakka verbonden. Kaart XXX geeft bij zijn artikel een beeld van de verdeeling van land en zee in dien tijd en daarop zijn de stroomloopen van sindsdien verdronken rivieren in dat groote jong-plioceene-oud-kwartaire land aangegeven, zooals hij die meent te kunnen afleiden uit het verloop van eenige der isobathen in de tegenwoordige Java- en Zuid-Chineesche zee. In diluvialen tijd denkt hij zich daling van het land en daardoor transgressie van de zee tot boven de tegenwoordige kustlijn. Gedurende dien tijd ontstonden uit de walriffen langs de jongplioceene-oud-kwartaire kustlijn bij de daling van den bodem barrière-riffen en bij kleine eilanden atollen. Gedurende het alluvium neemt van Es rijzing van den bodem aan. Hij denkt zich deze rijzing evenals de daaraan voorafgegane daling onregelmatig en wel het grootst voor die streken waar ook vroeger de bodembewegingen het aanzienlijkst waren.

[1]) L. J. C. van Es. De voorhistorische verhoudingen van land en zee in den Oost Indischen archipel en de invloed daarvan op de verspreiding der diersoorten. Jaarb. van het Mijnwezen XLV p. 255, 1918. Hoewel, zooals uit het titelblad blijkt, dit deel van het Jaarboek van het Mijnwezen reeds te Batavia in het jaar 1918 het licht zag, werd het door den boekhandel eerst in de laatste maanden van het jaar 1919 in Nederland verspreid.

De grootste verschillen met mijn opvatting zijn:

1°. dat VAN Es in het plistoceen daling van het land ten opzichte van den zeespiegel, ik daarentegen rijzing, en dat hij in het post-plistoceen rijzing van het land ten opzichte van den zeespiegel, ik daarentegen daling aanneem.

2°. dat VAN Es alle verschuivingen van de strandlijn, zoowel de prae-plistoceene als de plistoceene en post-plistoceene, aan bewegingen van den bodem toeschrijft, ik daarentegen in plistoceenen en post-plistoceenen tijd zeer grooten invloed toeken aan schommelingen van den zeespiegel ten gevolge van den ijstijd.

3°. dat VAN Es geen verschil maakt tusschen het stabiele en het labiele gedeelte van den Oost-Indischen archipel, waarmede bedoeld worden de twee gebieden, die sinds den aanvang van het plistoceen stabiel of niet stabiel zijn geweest, terwijl ik juist van meening ben, dat alleen de groote stabiliteit (wat in zich sluit het geheel ontbreken van bodembewegingen) van het grootste gedeelte van het voormalige Soenda-land, in verband met de schommelingen van den zeespiegel tengevolge der plistoceene glaciaties, het merkwaardig uniforme karakter van de tegenwoordige Soenda-zee en den aard en de ontwikkeling der koraalriffen in dat deel van den archipel kan verklaren.

II. BIOLOGISCH GEDEELTE door MAX WEBER.

De in het voorafgaande door Prof MOLENGRAAFF in hare geologische en hydrographische gevolgen helder uiteengezette theorie van het dalen van het water der oceanen in den plistoceenen ijstijd raakt ook op veelzijdige wijze de biologische wetenschappen, in de eerste plaats de faunistiek en zoogeographie van den indo-australischen Archipel; in hoeverre ook de phytogeographie is niet aan mij te beoordeelen.

Sedert lang heeft de zoogeographie aangenomen, dat in het jongste tertiair Sumatra, Java, Borneo en de daartusschen gelegen eilanden onderling en met het schiereiland van Malakka en daardoor dus met den aziatischen continent door land moeten verbonden geweest zijn. Slechts hierdoor was de faunistische eenheid tusschen hen te verklaren.

De faunistische verschillen, die daarnaast bestaan, zijn van tweeërlei aard. Voor een deel zouden zij tot stand gekomen zijn, ook als het uitgestrekte landcomplex, dat van de Westpunt van Sumatra tot Straat Makassar reikte — het Soenda-land van MOLENGRAAFF —, nimmer uiteengevallen ware in zijn thans gescheiden onderdeelen: eenvoudig als gevolg van zijn uitgestrektheid en de daaruit volgende

verscheidenheid van levensvoorwaarden. Voor een ander deel trachtte men de faunistische verschillen te verklaren uit den langeren of korteren duur van den samenhang van de thans gescheiden onderdeelen. Zoo werd b.v. aangenomen, dat Java het eerst zijn verband verloor met Borneo en Sumatra, terwijl Sumatra het langst met het continentale Azië verbonden bleef.

Hoe deze landvaste verbinding tot stand kwam, hoe zij later verbroken werd, daaromtrent liepen de hypothesen uiteen; zij waren meestal ad hoc en door zoölogen bedacht en misten een geologische basis. Merkwaardig genoeg ontbrak onder hen eene beschouwing, die wij kortheidshalve als de theorie van Croll en Penck zullen aanduiden, waarbij Penck den invloed van den plistoceenen ijstijd op den stand van het water in de oceanen in een op cijfers steunend algemeen samenvattend betoog uiteenzette. En deze theorie zou toch een goede verklaring aan de hand gedaan hebben omtrent de jongste veranderingen van land en zee, die de zoogeographie voor de door haar waargenomen feiten eischte. Desniettemin ging zij tot den huidigen dag spoorloos voorbij aan de zoogeographen, die zich met de talrijke problemen, die de indo-australische Archipel hen biedt, bezig hielden.

Dat is ook te betreuren, omdat omgekeerd de zoogeographie van den Archipel bewijsmateriaal kon leveren ter ondersteuning van de juistheid van de theorie van Croll-Penck. Zij had dan andermaal gelegenheid gehad te toonen, dat zij over gegevens beschikt ter staving van geologische hypothesen en dat zij dus als hulpwetenschap voor den geoloog dienst kan doen, wanneer deze zich met vragen bezig houdt, die betrekking hebben op den jongeren en jongsten tijd der aardgeschiedenis.

Voor de juistheid der theorie van Croll-Penck zou al dadelijk pleiten, dat zij de eischen der zoogeographie op treffende wijze vervult.

Maar de zoogeographie levert betere bewijzen voor hare juistheid: één er van wil ik hier ter sprake brengen.

De veronderstelde daling der Java- en Zuid-Chineesche Zee om 70 M. moest onder meer van invloed zijn op de bestaande riviersystemen. Onbeduidend was die invloed langs de Westkust van Sumatra en de Zuidkust van Java. Hier werd, zooals uit de kaart op pag. 315 blijkt, de kust slechts enkele kilometers breeder, de loop der rivieren evenveel langer, wat natuurlijk zonder gevolgen was voor hare fauna. Omgekeerd moest elders die invloed zeer groot zijn. Een rivier, die in de Java- of in de Zuid-Chineesche Zee uitmondde, moest zich, toen deze droog lagen, eene verlenging van haar bed in het nieuwe land graven om eene uitmonding te vinden in de teruggedrongen zee, zij moest nieuwgevormde zijrivieren opnemen, die het

nieuwgevormde land ontwateren moesten. Maar nog belangrijker voor ons is, dat veelal twee thans gescheiden rivieren in onderlingen samenhang traden of deel gingen uitmaken van een grooter riviersysteem.

De geologie leert ons hoezeer de riviersystemen van Nederland en Duitschland in jongen tijd afweken van den hedendaagschen toestand. Hoe b.v. de Thames een zijrivier van den Rijn was, de Schelde een anderen loop had als thans, hoe een groote, Duitschland van Oost naar West doortrekkende stroom de heden gescheiden Weichsel, Elbe en Weser vereenigde.

Op soortgelijke wijze kon in het ons interesseerende gebied de Mussi van Oost-Sumatra een zijrivier geweest zijn van een grooten, in de Chineesche Zee zich uitstortenden stroom, die tevens den aan de Westkust van Borneo uitmondenden Kapoewas en vermoedelijk ook continentaal aziatische zijrivieren opnam. Een ander riviersysteem mondde wellicht door Straat Soenda in den Indik uit en voerde naast het regenwater, dat op het land der droogliggende Java-Zee viel, ook het water der rivieren af, die zich vroeger in haar ontlastten.

Als deze beschouwingen een kern van waarheid bevatten, is te veronderstellen, dat zich daarvan iets weerspiegelen moet in de hedendaagsche fauna.

Laten wij veronderstellen, dat de Kapoewas van West-Borneo in het plistoceen deel uitmaakte van een rivierstelsel, waarbij de Mussi van Sumatra behoorde. Daardoor was gelegenheid geboden tot uitwisseling der fauna en tot onderlinge verrijking. Maar tevens is dan te verwachten, dat zich dat uiten moet in een groote faunistische overeenkomst der heden ten dage gescheiden rivieren, die zelfstandig uitmonden.

Geheel anders moet zich de Mahakkam (Koetei) van de Oostkust van Borneo gedragen.

Op dezen grooten stroom, die in de Makassar-Straat uitmondt, bleef het zonder invloed of deze tot meerdere duizend meter diepe Straat 70 M. ondieper werd. Al werd zijn benedenloop al eenige kilometers langer, hij bleef wat hij was; hij kon geen toevoer uit andere rivieren, geen verandering, geen verrijking zijner fauna ondergaan.

De juistheid onzer overlegging was dus niet beter te toetsen, dan door een vergelijkend onderzoek van den Kapoewas en den Mahakkam. Als vergelijkmateriaal kon de vischfauna dienst doen, daar zij het best bekend is.

Hierbij moest scherpe kritiek en eenige beperking toegepast worden, ten aanzien van het te gebruiken vischmateriaal. Uit te sluiten waren

marine immigranten, trouwens alle zoog. anadrome en katadrome visschen, voorts alle brakwater-visschen; slechts die soorten mochten in aanmerking komen, waarvan vaststaat, dat zeewater een voor hen niet te overschrijden barrière vormt.

Toen immers aan het einde van den ijstijd, die hier gemakshalve als een eenheid wordt opgevat, het smeltwater van ijs en sneeuw allengs het niveau der zeeën deed rijzen, zal vóór het definitieve intreden van den huidigen toestand de zee in de nabijheid van de groote riviermonden van Borneo en Sumatra aanvankelijk een brak karakter gehad hebben. Toen bestond dus voor visschen, die brakwater verduren kunnen, de mogelijkheid voor verhuizing uit de eene rivier in een andere. Die mogelijkheid verdween eerst toen de saliniteit haar definitief karakter had verkregen.

Na deze schifting stelt het materiaal, waarmede gewerkt kon worden, zich samen uit 2 soorten van Notopterus, een Scleropages, 17 genera van Siluroiden met 39 soorten en 37 genera van Cyprinoiden met 100 soorten. In zijn geheel dus 56 genera met 142 soorten.

De betrouwbaarheid der resultaten zal toenemen met den omvang van het materiaal. Daarom zij in het licht gesteld wat dit cijfer van 142 soorten beteekent. Zijn omvang wordt duidelijk uit het feit, dat het aantal echte zoetwatervisschen in de boven omschreven beperking, waarbij dus marine immigranten uitgesloten zijn, voor het landcomplex dat Nederland, België, Duitschland en de Donaulanden tot aan de Zwarte Zee omvat, slechts ongeveer 60 soorten bedraagt.

Wij hebben ons materiaal uit den Kapoewas en Mahakkam in de hierbij gaande tabel vereenigd en daaraan toegevoegd welke soorten tevens in de rivieren, die aan de Zuidkust van Borneo in de Java-Zee uitmonden, voorkomen. Voorts zijn in de tabel die soorten opgenomen, die tevens in Oost-Sumatra, in Java en in rivieren van het continentale Azië (Malakka en Siam) optreden.

Hieruit blijkt, dat van de 142 soorten slechts 52 aan beide rivieren gemeenschappelijk zijn. Van de 90 overblijvende soorten zijn 23 eigen aan den Mahakkam en 67 aan den Kapoewas. Van deze 67 in den Mahakkam ontbrekende soorten zijn 55 of 82 °/₀ ook in andere rivieren vertegenwoordigd en wel 75 °/₀ in de rivieren van Oost-Sumatra. Slechts 12 soorten of 1.8 °/₀ zijn uitsluitend uit den Kapoewas of ook uit naburige eveneens in de Zuid-Chineesche Zee uitmondende rivieren bekend.

Hiertegenover is de Mahakkam 23 soorten rijk, die in de Kapoewas ontbreken. Maar van deze 23 soorten zijn 17 of 74 °/₀ alleen uit

	Kapoewas.	Mahakkam.	Zuid-Borneo.	Oost-Sumatra.	West-Sumatra.	Java.	Continent. (M=Malakka: S=Siam)
Notopterus chitala (H.B.)	+	+	+	+	.	+	+
Notopterus borneensis Blkr.	+	.	+	+	.	.	.
Scleropages formosus (Müll. & Schl.)	+	+	+	+	.	.	.
Silurichthys phaiosoma (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	M.
Wallago leerii Blkr.	+	.	+	+	.	.	.
Wallago miostoma Vaill.	+	+	.	+	.	.	.
Belodontichthys dinema (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	M. S.
Silurodes hypophthalmus (Blkr.)	+	+	.	+	.	+	
Silurodes eugeneiatus (Vaill.)	+	.	.	+	.	.	.
Hemisilurus chaperi (Vaill.)	+	.	.	.	.	.	.
Hemisilurus heterorhynchus (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	.
Hemisilurus scleronema Blkr.	+	.	.	+	.	+	.
Cryptopterus macrocephalus (Blkr.)	.	+	.	+	?	.	.
Cryptopterus bicirrhis (C.V.)	+	+	+	+	+	+	S.
Cryptopterus lais (Blkr.)	+	.	+	.	.	.	.
Cryptopterus cryptopterus (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	M. S.
Cryptopterus limpok (Blkr.)	+	+	+	+	.	.	.
Cryptopterus apogon (Blkr.)	+	+	+	+	.	.	.
Cryptopterus micronema (Blkr.)	+	.	+	+	.	+	S.
Chaca chaca (Ham. Buch.)	+	.	+	+	.	.	+
Pseudeutropius brachypopterus (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	.
Lais hexanema (Blkr.)	+	.	.	+	.	+	M.
Pangasius nasutus Blkr.	+	.	+	+	.	.	
Pangasius polyuranodon Blkr.	+	+	+	+	.	+	S.
Pangasius nieuwenhuisi (Popta)	.	+	.	.	.	.	.
Pangasius micronema Blkr.	+	+	+	+	.	+	.
Glyptosternum majus (Blgr.)	+	+	.	.	.	.	.
Bagarius bagarius (Ham. Buch.)	+	+	.	+	.	+	+

	Kapoewas.	Mahakkam.	Zuid-Borneo.	Oost-Sumatra.	West-Sumatra.	Java.	Continent.
Macrones nigriceps (C.V.)	+	+	+	+	+	+	M. S.
Macrones micracanthus (Blkr.)	+	.	+	+	+	+	.
Macrones wolffi (Blkr.)	+	+	+	+	.	.	M. S.
Macrones nemurus (C.V.)	+	+	+	+	+	+	M. S.
Macrones planiceps (C.V.)	+	+	.	+	+	+	M.
Bagrichthys hypselopterus (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	.
Bagroides melapterus Blkr.	+	.	+	+	.	.	S.
Leiocassis fuscus Popta	.	+	.	.	.	.	.
Leiocassis mahakamensis Vaill.	.	+	.	.	.	.	.
Leiocassis stenomus (C.V.)	+	+	.	+	.	+	
Leiocassis poecilopterus (C.V.)	+	.	.	+	.	+	.
Leiocassis micropogon (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	M.
Leiocassis vaillanti Reg.	+	.	.	.	.	.	.
Breitensteinia insignis Steind.	+	.	.	+	.	.	.
Gastromyzon borneensis Gthr.	+	+	.	.	.	.	.
Gastromyzon nieuwenhuisi (Popta)	.	+	.	.	.	.	.
Homaloptera wassinki Blkr.	+	+	.	+	.	+	.
Homaloptera ophiolepis Bklr.	.	+	.	+	.	+	.
Homaloptera orthogoniata Vaill.	+	+	.	.	.	.	.
Homaloptera tate regani Popta	.	+	.	.	.	.	.
Parhomaloptera microstoma (Blgr.)	.	+	.	.	.	.	.
Botia macracanthus (Blkr.)	+	+	+	+	+	.	.
Botia hymenophysa (Blkr.)	+	+	+	+	.	+	S. M.
Acanthopsis choirorhynchus (Blkr.)	+	+	+	+		+	+
Lepidocephalus pallens (Vaill.)	+	.	.	.	.	.	.
Acanthophthalmus lorentzi M. Web. & de Bfrt.	+	.	.	.	.	.	.
Acanthophthalmus kuhli (C.V.)	+	.	.	+	.	+	M.
Acanthophthalmus borneensis Blgr.	+	.	.	.	.	.	.

	Kapoewas.	Mahakkam.	Zuid-Borneo.	Oost-Sumatra.	West-Sumatra.	Java.	Continent.
Acanthophthalmus anguillaris Vaill.	+	.	.	.	.	.	.
Elxis obesus (Vaill.)	.	+	.	.	.	.	.
Vaillantella euepipterus (Vaill.)	+	.	.	.	.	.	.
Nemachilus longipectoralis Popta	.	+	.	+	.	.	.
Nemachilus fasciatus (C.V.)	+	.	.	+	+	+	.
Chela oxygastroides (Blkr.)	+	+	+	+	.	+	S.
Chela hypophthalmus Blkr.	+	.	.	+	.	.	.
Chela oxygaster (C.V.)	+	.	+	+	.	+	M.
Marcrochirichthys macrochirus (C.V.)	+	+	+	+	.	+	S.
Rasborichthys helfrichi (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	.
Rasbora argyrotaenia (Blkr.)	+	+	+	+	+	+	.
Rasbora vaillanti Popta	.	+	.	.	.	.	.
Rasbora volzi Popta	+	+	.	.	.	.	.
Rasbora trilineata Steind.	+	.	.	+	.	.	.
Rasbora kalochroma (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	M.
Rasbora einthoveni (Blkr.)	.	+	+	+	+		M. S.
Rasbora lateristriata var. sumatrana (Blkr.)	+	.	.	+	+		M.
Rasbora lateristriata var. elegans Volz.	+	+	.	+	.	.	M.
Rasbora lateristriata var. trifasciata Popta	.	+	.	.	.	.	.
Luciosoma trinema (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	.
Luciosoma setigerum (C.V.)	+	.	.	+	.	+	M.
Luciosoma spilopleura Blkr.	+	+	.	+	.	.	S.
Leptobarbus hoevenii (Blkr.)	+	+	+	+	.	.	S.
Leptobarbus melanopterus M. Web. & de Bfrt.	+	.	.	.	.	.	.
Leptobarbus melanotaenia Blgr.	.	+	.	.	.	.	.
Rohteichthys microlepis (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	.

	Kapoewas.	Mahakkam.	Zuid-Borneo.	Oost-Sumatra.	West-Sumatra.	Java.	Continent.
Amblyrhynchichthys truncatus (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	S.
Amblyrhynchichthys altus Vaill.	+	.	.	.	.	.	.
Albulichthys albuloides (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	.
Dangila ocellata (Heck.)	+	+	+	+	.	.	.
Dangila fasciata Blkr.	+	.	.	+	.	.	.
Dangila cuvieri C.V.	+	+	.	+	.	+	M.
Dangila sumatrana Blkr.	.	+	.	+	.	.	.
Dangila festiva (Heck.)	+	.	+	.	.	.	.
Barynotus microlepis (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	.
Thynnichthys vaillanti M. Web. & de Bfrt.	.	+	.	.	.	.	.
Thynnichthys polylepis Blkr.	+	.	.	+	.	.	.
Osteochilus borneensis (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	S.
Osteochilus melanopleura (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	S.
Osteochilus kelabau Popta	.	+	.	.	.	.	.
Osteochilus schlegeli (Blkr.)	+	.	+	+	+	.	S.
Osteochilus kahajanensis (Blkr.)	+	+	+	+	.	.	M.
Osteochilus repang Popta	.	+	.	.	.	.	.
Osteochilus vittatus (C.V.)	+	+	+	+	+	+	M.
Osteochilus hasselti (C.V.)	+	+	+	+	+	+	M. S.
Osteochilus kappeni (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	.
Osteochilus brevicauda M. Web. & de Bfrt.	+	.	.	.	.	.	.
Hampala macrolepidota (C.V.)	+	+	+	+	+	+	+
Hampala ampalong (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	.
Hampala bimaculata (Popta)	.	+	.	.	.	.	.
Labeobarbus tambroides Blkr.	+	+	.	+	+	+	.
Labeobarbus douronensis (C.V.)	+	+	.	+	+	+	.
Cyclocheilichthys heteronema (Blkr.)	+	.	.	.	.	.	M.

	Kapoewas.	Mahakkam.	Zuid-Borneo.	Oost-Sumatra.	West-Sumatra.	Java.	Continent.
Cyclocheilichthys janthochir (Blkr.)	+	.	.	.	.	.	.
Cyclocheilichthys apogon (C.V.)	+	.	+	+	.	+	+
Cyclocheilichthys repasson (Blkr.)	+	+	.	+	.	+	S.
Cyclocheilichthys lineatus (Popta)	.	+	.	.	.	.	.
Cyclocheilichthys armatus (C.V.)	+	+	.	+	.	+	S.
Cyclocheilichthys siaja Blkr.	+	.	.	+	+	.	M.
Puntius schwanefeldi (Blkr.)	+	+	.	+	+	.	M. S.
Puntius lateristriga C.V.	+	.	.	+	+	+	M.
Puntius tetrazona (Blkr.)	+	.	+	.	.	.	M.
Puntius fasciatus (Blkr.)	+	.	+	+	.	.	.
Puntius binotatus (C.V.)	+	+	+	+	+	+	M.
Puntius anchisporus (Vaill.)	+	+	.	.	.	.	.
Puntius sumatranus (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	S.
Puntius bramoides (C.V.)	.	+	+	.	.	+	S.
Puntius collingwoodi (Gthr.)	+	+	.	.	.	.	.
Puntius bulu (Blkr.)	+	+	+	+	.	.	.
Puntius waandersi (Blkr.)	+	+	.	+	.	+	.
Puntius nini M. Web. & de Bfrt.	+	.	.	.	.	.	.
Balantiocheilus melanopterus (Blkr.)	+	+	+	+	.	.	S.
Barbichthys laevis C.V.	+	+	+	+	.	+	+
Labeo (Morulius) chrysophekadion (Blkr.)	+	.	.	+	.	+	S.
Labeo (Labeo) rohitoides (Blkr.)	+	.	.	+	.	+	.
Labeo (Labeo) pleurotaenia (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	M.
Schismatorhynchus heterorhynchus (Blkr.)	+	.	.	+	.	.	.
Tylognathus hispidus (C.V.)	+	+	.	.	.	+	.
Tylognathus bo Popta	.	+	.	.	.	.	.
Tylognathus falcifer (C.V.)	+	.	.	.	+	+	.

	Kapoewas.	Mahakkam.	Zuid-Borneo.	Oost-Sumatra.	West-Sumatra.	Java.	Continent.
Gyrinocheilus pustulosus Vaill.	+	+	.	.	.	.	.
Paracrossochilus vittatus (Blgr.)	+	+	.	.	.	.	.
Discognathus borneensis Vaill.	.	+	.	.	.	.	.
Epalzeorhynchus kallopterus Blkr.	+	.	+	+	.	.	.
Crossochilus oblongus (C.V.)	+	+	.	+	+	+	M.
Crossochilus cobitis (Blkr.)	+	+	.	.	+	+	.

den Mahakkam of ook uit naburige, eveneens in Straat Makassar uitmondende rivieren bekend. Van de resteerende 6 soorten komen slechts 3 of 13 °/₀ ook in Oost-Sumatraansche rivieren voor en 3 andere soorten hebben een ruimere verspreiding.

Letten wij op de goed omgrensde genera dan blijken van de 53 genera, die den Kapoewas bewonen 20 of 38 °/₀ in den Mahakkam te ontbreken. Merkwaardig genoeg zijn echter van deze 20 genera 18 wel in de rivieren van Oost-Sumatra vertegenwoordigd. De Mahakkam daarentegen bezit slechts 36 genera, waarvan 33 gemeenschappelijk zijn met den Kapoewas, alleen 3 genera ontbreken daarin, maar deze 3 zijn van elders niet bekend en zijn voorloopig als antochthone vormen te beschouwen.

Wij komen dus tot het besluit, dat de Kapoewas zijn belangrijk grooteren rijkdom aan visschen niet dankt aan autochthone vormen, maar aan zulke, die ook in Oost-Sumatra gevonden worden. Zij wijzen op een vroegeren samenhang met Oost-Sumatraansche rivieren, die, zooals boven aangeduid, zijn verklaring vindt in de theorie van Croll-Penck. Hierin verschilt de Kapoewas belangrijk van den Mahakkam, alhoewel hun oorsprongsgebied in Centraal-Borneo, slechts weinige uren van elkander verwijderd is.

Als mijn betoog juist is, moet het ook juist zijn voor andere diergroepen wier verspreiding, althans in het plistoceen, verandering onderging; niet alleen voor zoetwater- maar ook voor landbewoners. Voor de laatsten vormde immers het land der droogliggende Java en Zuid-Chineesche Zee de landbruggen, die de zoogeographie eischt voor emigratie en immigratie.

Dit moge nu in principe juist zijn, de bewijzen daarvoor zijn niet

zoo gemakkelijk te leveren en zijn niet altijd zoo doorzichtig als in het geval van de vischfauna van den Kapoewas en den Mahakkam. Nadenken brengt tal van complicaties naar voren.

Ten eerste zijn de elementen, die eene fauna samenstellen niet even oud. Er zijn daarin oudere en jongere strata te onderscheiden met verschillende verspreidings-mogelijkheden.

Naast dit historische moment zijn er ook biologische van verschillenden aard.

Al bestaat voor eene soort de gelegenheid tot verhuizing en de mogelijkheid haar woongebied te verruimen, zij zal er slechts gebruik van kunnen maken, als de levensvoorwaarden van het te veroveren woongebied aan de levenseischen der soort beantwoorden.

Voorts is de vraag in het oog te houden of tijdens den ijstijd niet nog andere gebeurtenissen de landen, die ons interesseeren, of een deel van hen, getroffen heeft.

De fauna van Java b.v. heeft den zoogeographen steeds bizondere moeilijkheden in den weg gelegd. Boven werd dan ook reeds aangestipt, dat men sedert lang veronderstelt, dat Java zich anders dan Sumatra en Borneo gedroeg en daardoor in zijn fauna afwijkt. Men heeft getracht dat te verklaren door b.v. aan te nemen, dat Java zich het eerst vrij en zelfstandig maakte uit het landcomplex, dat hen vereenigde.

Maar de faunistische bizonderheden van Java kunnen ook het gevolg zijn van gebeurtenissen in verband met de vorming der geweldige vulkaanketen, die het smalle eiland van West naar Oost doortrekt; ook kunnen de producten van haar uitbarstingen (aschregen, slijkstroomen e. d. m.) van directen invloed op de fauna geweest zijn en van indirecten door wijziging van het klimaat (onderschepping der zon door aschregen, overvloedige regens).

Deze en andere vraagpunten meer zullen de studie bemoeilijken bij de toepassing van de theorie van Croll-Penck op de leer van de dierverspreiding in den indo-australischen Archipel, maar zij zullen voor een goed deel te overwinnen zijn.

Die theorie geeft immers een gewenschte basis voor tal van veronderstellingen van bestaanhebbende landverbindingen tusschen thans gescheiden eilanden, die door zoogeographen gemaakt werden om de door hen waargenomen feiten te verklaren. Daarnaast geeft zij een juister inzicht in het tijdstip, waarop die veronderstelde landverbindingen tot stand kwamen.

Over de Groote Soenda-Eilanden spraken wij reeds boven.

Maar de theorie van Penck werpt ook nieuw licht op het oostelijk gedeelte van den Archipel. Hier dwong de verspreiding der

dieren tot de hypothese, dat Nieuw-Guinea met de Aroe-Eilanden, met Waigeoe en naburige kleinere eilanden een landmassa vormde, die met Noord-Australië samenhing.

Die landen zijn thans gescheiden door ondiepe straten en een vlakzee, die de Sahoel-bank bedekt. Daalt het niveau der zee om 70 M. dan komt zij droog te liggen.

In verschillende geschriften trachtte ik aan te toonen, dat die toestand in het plioceen plaats greep en dat in het plistoceen de tegenwoordige toestand van land en water zich ontwikkelde. [1])

Ook P. en F. Sarasin nemen in hun bekend werk over Celebes een plioceene „Festlandsepoche" voor den Archipel aan, en R. D. M. Verbeek schreef, dat tegenwoordig en vermoedelijk reeds sedert het plioceen Nieuw-Guinea van Australië door een ondiepe zee gescheiden is. Andere schrijvers (b.v. Hedley en Matthews) vergenoegen zich er mede deze gebeurtenis in het „late tertiair" te plaatsen.

Men liet haar plaats grijpen door veronderstelde rijzingen of dalingen van land of zee van meer of minder lokalen aard. Voor deze vrij willekeurige veronderstellingen, die uit de behoefte aan landverbindingen geboren werden, treedt met de theorie van Croll-Penck eene algemeenere beschouwing in de plaats, die een tastbare basis heeft. Maar daarmede verschuift zich tevens de veronderstelde positieve of negatieve daling van het plioceen naar het plistoceen.

Ook hier weer is het veroorloofd te zeggen, dat de door de Zoologie waargenomen feiten voor de juistheid der theorie van Croll-Penck pleiten.

[1]) Een binnenkort in de Sitzungsberichte d. Heidelberger Akademie d. Wissenschaften verschijnend geschrift geeft een kort overzicht over deze beschouwingen.

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt eene mededeeling aan van den Heer NIL RATAN DHAR: „*Catalysis*" — Part VII — *Notes on Catalysis in heterogeneous systems.*

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH).

1. It is known for a long time that violet chromic chloride is practically insoluble in water, but in presence of reducing agents solution takes place due to the transformation into the soluble modification.

Anhydrous ferric sulphate dissolves slowly in water at the ordinary temperature, in other words, it may be said to have a small velocity of solution. I have found that reducing agents like stannous chloride, ferrous sulphate, sulphurous acid etc., markedly accelerate the velocity of solution of ferric sulphate in water.

In the case of chromic chloride, it is assumed that the reducing agent first reduces the insoluble chromic chloride to chromous chloride, and the original chromous chloride is transformed into soluble chromic chloride. The newly formed chromous chloride then acts on the insoluble chromic chloride as before.

The difficulty of an explanation like this is that we assume that the reducing agent acts on the solid chromic chloride and reduces it; from our experience in heterogeneous systems, we know how difficult it is to reduce a solid substance rapidly with a solution of a reducing agent.

Moreover, in the case of ferric sulphate we do not know two varieties of the salt as in the case of chromic chloride.

It is difficult to assume that ferrous sulphate would reduce ferric sulphate, for we know that a mixture of ferric and ferrous salts can exist unchanged for an indefinite period in absence of oxygen.

So we can say with OSTWALD (Grundlinien der anorganischen Chemie, Leipzig 1900; A. FINDLAY'S trans. 603, 1902) that a sufficient explanation of these actions is still wanting.

2. The action of nitric acid on the metals generally, is somewhat complex, because the main reaction is complicated by side or concurrent, and by consecutive reactions. These again depend not only upon the particular metal under consideration but also on the

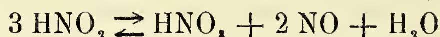
36

concentration of the acid, the temperature and the concentration of the products of the reaction accumulating in the solution.

Millon (Compt. rend. 1842, **14**, 904) and Veley (Phil. Trans. 1891 A, **182**, 279) have shown that metals like copper, silver, mercury and bismuth have no action on cold dilute nitric acid unless a trace of nitrous acid is present. The nitrous acid may be present in the nitric acid as an impurity; it may be formed by the incipient decomposition of nitric acid when it is warmed.

According to Veley, therefore, the dissolution of copper in nitric acid proceeds: $Cu + 3\,HNO_3 = Cu\,(NO_3)_2 + HNO_2 + H_2O$, is a resultant of a series of consecutive reactions: $Cu + 4\,HNO_2 = Cu\,(NO_2)_2 + 2\,H_2O + 2\,NO$; followed by $Cu\,(NO_2)_2 + 2\,HNO_3 = Cu\,(NO_3)_2 + 2\,HNO_2$.

The small trace of nitrous acid thus acts as a catalytic agent; nitrous acid is continuously produced and continuously decomposed according to the following equilibrium:



$$3\,HNO_2 \rightleftarrows HNO_3 + 2\,NO + H_2O$$

Similar results have been obtained by Rây (Trans. Chem. Soc. 1911, **99**, 1012) in the case of mercury and by Stansbie (J. Soc. Chem. Ind. 1913, **32**, 311) in the case of silver.

Now Millon (loc. cit.) and Veley (loc. cit.) have pointed out that the presence of ferrous sulphate, "which removes the nitrous acid as fast as it might be formed" serves to prevent the chemical change between nitric acid and the metals.

But I have observed that ferrous sulphate exerts an accelerating influence on the complete dissolution of copper in 20°/₀ nitric acid at 18°. This result being different from those of previous investigators I thought it worth while to observe the effect of both ferrous and ferric salts and various other substances on the complete dissolution of copper in excess of 20°/₀ nitric acid.

Equal lengths of copper wire of uniform sectional area were placed into test tubes and covered with an excess of 20°/₀ nitric acid. The mean temperature of the experiments was 18° and the tubes containing equal volumes of nitric acid and equal weights of copper wire were kept at rest. Weighed quantities of the solid substances used were added at the beginning of the experiments. The whole of the copper wire dissolved in about 30 minutes and the exact time of dissolution was noted. In order to get exactly comparable results one test tube was always set apart for a blank parallel experiment.

It has been found that the following substances exert an accelera-

ting effect on the complete dissolution of copper in 20°/₀ nitric acid:
ferrous sulphate, ferrous chloride, ferric sulphate, ferric chloride, ferric nitrate, lead sulphate, lead nitrate, lead acetate, copper nitrate, copper chloride, barium nitrate, thallium nitrate, lithium nitrate, sodium nitrite, manganese chloride, chromic chloride, arsenious oxide, strychnine sulphate, ethylene bromide, carbon tetrachloride, hexachlorobenzene, phthalic anhydride etc.

On the other hand, the following substances have a retarding effect: hydrogen peroxide, potassium chlorate, potassium permanganate, chromic acid, sodium nitrate, ammonium nitrate, manganese nitrate, thorium nitrate, sodium sulphite, titanic acid, molybdic acid, ammonium persulphate, mangenese sulphate, cobalt chloride, copper acetate, copper sulphate, calcium nitrate, tartaric acid, ether, urea, acetic anhydride, benzoic anhydride etc.

In a foregoing paper of this series (Trans. Chem. Soc. 1917, **111**, 707) I have shown that sulphuric acid in small concentration is an accelerator, whilst in large concentrations it is a retarder in the oxidation of oxalic acid by chromic acid. Similar results have been obtained in the action of nitric acid on copper. The following substances in very small concentration exert a slight accelerating effect, whilst in large concentrations they have retarding effect:

Zinc chloride, nickel chloride, cobalt nitrate, aluminium nitrate, potassium chloride, strontium nitrate, cadmium nitrate, magnesium chloride etc.

When the concentration is very small, the effect of potassium nitrate, uranium nitrate, citric acid, potassium dichromate etc. is practically nil, but in concentrated solutions they are all retarders.

The effect of monochloracetic acid is very peculiar. In small concentrations, it is a feeble accelerator and in concentrated solutions it has a retarding effect, which instead of increasing, decreases with increase of concentration. A similar phenomenon has already been observed in the case of the oxidation of formic acid by chromic acid in presence of manganese chloride (*loc. cit.* p. 726).

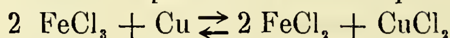
It is practically impossible to give a complete explanation of these results, they being so diverse.

Ferrous sulphate and ferrous chloride behave as marked accelerators. It would appear that the acid nucleus in this particular instance, plays no part. A part of the ferrous ion reduces the nitric acid to nitric oxide and passes into the ferric state. The nitric oxide dissolves in the ferrous salt solution forming the unstable substance $FeNO^{\circ\circ}$. The dissolved nitric oxide then reduces a part of the nitric acid according to the following equation: $HNO_3 + 2\,NO + H_2O \rightleftarrows 3\,HNO_2$.

It is quite possible that some nitrous acid is produced by the direct reduction of nitric acid by ferrous ions. The formation of nitrous acid either by the direct reduction of nitric acid by ferrous salts or by the indirect reduction through the intervention of nitric oxide is proved by the following experiment. If nitric acid of the strength used in this research be taken in a test tube and a crystal of ferrous ammonium sulphate or ferrous sulphate be added to it, almost immediately the crystal is covered with the deep brown $FeNO^{\circ\circ}$ ion and a little nitric oxide also escapes. If urea crystals are now added, they are immediately oxidized with the evolution of carbon dioxide and nitrogen, indicating the presence of nitrous acid. So in presence of ferrous salts, nitrous acid, which is the active substance in the action of nitric acid on copper, is formed when we have an excess of nitric acid. This explains the accelerating influence of ferrous salts in the complete dissolution of copper in 20 % nitric acid.

As a matter of fact, the accelerating effect of ferrous salts is slightly greater than the accelerating effect of sodium nitrite on the dissolution of copper in nitric acid. The greater the concentration of the ferrous salt, the greater is the acceleration.

Ferric sulphate, ferric nitrate and ferric chloride exert a marked accelerating effect, though their activity is slightly less than that of sodium nitrite and the accelerating effect is proportional to the concentration of the ferric salt. It would appear that the acid nucleus in this case also, plays no part. The explanation of this activation seem to lie in the reduction of ferric salts by the nitric oxide which a product of the chemical change between nitric acid and copper. The ferrous salt, which may thus be formed, will reduce a part of the nitric acid into nitrous acid, which activates the action of nitric acid on copper. It seems plausible that a part of the ferric salt would be reduced to the ferrous state by the metallic copper. It is well known that when a solution of a ferric salt is shaken with metallic copper, the ferric salt is partly reduced to the ferrous state and the copper is oxidized to the cupric salt and an equilibrium is set up: —



$$2\ FeCl_3 + Cu \rightleftarrows 2\ FeCl_2 + CuCl_2$$

The ferrous salt thus formed reduces the nitric acid to nitrous acid, which accelerates the action of nitric acid on copper.

In a similar way the accelerating effect of arsenious oxide, strychnine sulphate, phthalic anhydride etc. may be explained on the basis of the formation of nitrous acid by the action of these reducing agents on the nitric acid.

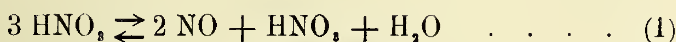
The retarding effect of the oxidizing agents like, H_2O_2, $KMnO_4$,

$H_2Cr_2O_7$, $KClO_3$, $(NH_4)_2S_2O_8$ etc. and of the reducing agents like urea, sodium sulphite etc. is certainly due to the destruction of the nitrous acid as soon as it is formed. When the experiment was performed in such a condition so as to cover the copper wire with solid urea, the reaction became very slow, but it did not stop altogether.

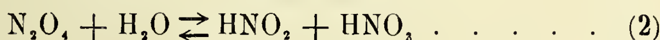
It is very difficult to explain the difference in the behaviour of the nitrates on the oxidation of copper by nitric acid. Lithium nitrate is an accelerator, whilst sodium and potassium nitrates are retarders; from anology we should expect calcium nitrate to have an accelerating effect, but as a matter of fact, both calcium and strontium nitrates are retarders, whilst barium nitrate is an accelerator.

Rennie and Cook (Trans. chem. Soc. 1911, **99**, 1035) have found that the accelerating or retarding effects of the nitrates of K, Rb, Cs were functions of the temperature and of the concentration of the acid.

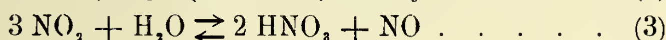
Higley (Amer. chem. Jour. **17**, 18 (1895)) has shown that both NO_2 and N_2O_3 are the products of the reaction between copper and nitric acid. Evidently in the solution, we should consider the following equilibria:



$$3\,HNO_3 \rightleftarrows 2\,NO + HNO_3 + H_2O \quad \ldots\ldots \quad (1)$$



$$N_2O_4 + H_2O \rightleftarrows HNO_2 + HNO_3 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$



$$3\,NO_2 + H_2O \rightleftarrows 2\,HNO_3 + NO \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Lewis and Edgar (J. Amer. chem. Soc. 1911, **33**, 292) have shown that in equilibrium (1) there is a change in the equilibrium constant with the concentration of nitric acid. It seems probable that nitrates may affect one or more of these equilibria and change the concentration of nitrous acid, which being the activating agent.

In this connection, it is interesting to observe that several reactions, in which nitric acid is the oxidizing agent, are autocatalytic. As for example, the actions of nitric acid on metals like Copper, Silver, Bismuth, Mercury etc., on starch, on sugar, on arsenious oxide, on hydrogen iodide (Eckstädt, Zeit. anorg. Chem. 1901, **29**, 51), on nitric oxide (Lewis and Edgar, *loc. cit.*) etc. become more pronounced as the chemical change proceeds.

The explanation is not far to seek. The nitrous acid is the active substance and its concentration and hence the reaction velocity increase with the progress of the chemical change. In all these cases I have found that the chemical change becomes more rapid when a nitrite is added at the commencement of the reaction.

It has been observed that the chemical change between nitric acid and copper may be practically stopped by agitating vigorously the

tube containing copper and nitric acid, because the nitrous acid cannot accumulate round the copper.

Summary and Conclusion:

1. The velocity of solution of anhydrous ferric sulphate can be increased by the presence of sulphurous acid, stannous chloride, ferrous sulphate etc. No satisfactory explanation of reactions of this type is forthcoming.

2. The action of nitric acid (20 %) on copper has been studied in the presence of various substances and it has been observed that when the nitric acid is in excess and the whole of the copper is made to dissolve, ferrous and ferric salts exert a marked accelerating effect. In the light of the present investigation, the view hitherto accepted as regards the part played by ferrous salts in destroying nitrous acid, has to be modified. As a matter of fact, it has been proved that nitrous acid, which is the active substance in this reaction, is formed by the action of nitric acid on ferrous salts. Oxidizing agents like H_2O_2, $KMnO_4$, $H_2Cr_2O_7$ etc. destroy the nitrous acid and hence retard the change.

Out of the 56 substances, the effect of which was investigated, 22 act as accelerators and 22 exert a retarding influence in all concentrations; whilst 8 of them are slight accelerators in small concentrations and are retarders in concentrated solutions. Four of these 56 substances have been found to be neutral in small and retarders in large concentrations.

My best thanks are due to the VAN 'T HOFF Fund Committee for a grant for this research.

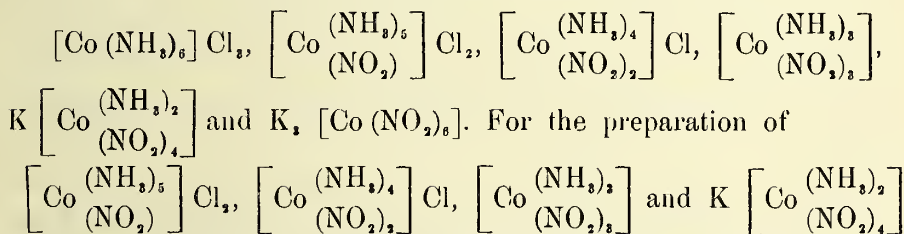
Chemical Laboratory, Muir Central College, Allahabad, India.

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt een mededeeling aan van den Heer NIL RATAN DHAR: "*Notes on Cobaltammines*".

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH).

In two previous investigations (Zeit. Anorg. Chem. 1913, **80**, 43; **84**, 224) I had occasion to study certain properties of the cobaltammines. This note is the result of the continuation of my previous work.

1. Let us consider the following series of compounds



$[Co(NH_3)_6]Cl_3$, $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_5\\(NO_2)\end{matrix}\right]Cl_2$, $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_4\\(NO_2)_2\end{matrix}\right]Cl$, $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_3\\(NO_2)_3\end{matrix}\right]$, $K\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_2\\(NO_2)_4\end{matrix}\right]$ and $K_3[Co(NO_2)_6]$. For the preparation of $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_5\\(NO_2)\end{matrix}\right]Cl_2$, $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_4\\(NO_2)_2\end{matrix}\right]Cl$, $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_3\\(NO_2)_3\end{matrix}\right]$ and $K\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_2\\(NO_2)_4\end{matrix}\right]$ the general method of procedure is to mix a cobalt salt, ammonium chloride, ammonium hydroxide and a nitrite; by this a complex cobaltous compound is formed which is turned into the stable cobaltic compound by oxidation. The amount of a certain compound which will be formed depends on the concentration of the reacting substances and on the solubility of the resulting complex compound. If the concentration of the nitrite in the solution is large in comparison with the concentrations of ammonium hydroxide and ammonium chloride we should expect that several (NO_2) groups would enter the complex.

It is known from a long time that aquopentammine salts can be converted into the corresponding hexammine salts by heating the aquo compound with ammonia in a sealed tube or in a bottle under pressure.

I found that if $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_5\\(NO_2)\end{matrix}\right]Cl_2$ is warmed with a dilute solution of sodium or potassium nitrite we get mainly $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_4\\(NO_2)_2\end{matrix}\right]Cl$, which could be purified by recrystallisation.

In a similar way croceo cobalt chloride $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_4\\(NO_2)_2\end{matrix}\right]Cl$ can be

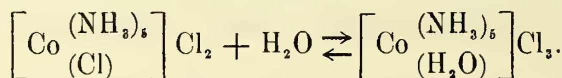
converted into $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_3\\(NO_2)_3\end{matrix}\right]$ by warming it with a dilute solution of a nitrite, whilst $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_3\\(NO_2)_3\end{matrix}\right]$ can be converted into $K\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_2\\(NO_2)_4\end{matrix}\right]$ by warming $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_3\\(NO_2)_3\end{matrix}\right]$ with a concentrated solution of potassium nitrite, ammonia escaping from the solution.

I tried to prepare the compound $K_2\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)\\(NO_2)_5\end{matrix}\right]$, which is still unknown, by warming $K\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_2\\(NO_2)_4\end{matrix}\right]$ with potassium nitrite, but was unsuccessful.

On the other hand, one can convert $K\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_2\\(NO_2)_4\end{matrix}\right]$ into $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_3\\(NO_2)_3\end{matrix}\right]$ and $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_3\\(NO_2)_3\end{matrix}\right]$ into $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_4\\(NO_2)_2\end{matrix}\right]Cl$ by warming the compound in question with a mixture of ammonium chloride and ammonium hydroxide.

In all these cases, ammonium salts are used along with ammonium hydroxide and their function is to suppress the ionisation of the base and form undissociated NH_4OH, which is in equilibrium with NH_3. The NH_3 then enters into the complex molecule.

2. If a fairly concentrated solution of aquopentammine cobaltic chloride $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_5\\(H_2O)\end{matrix}\right]Cl_3$ is left, it slowly gives a precipitate of the corresponding purpureo salt $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_5\\(Cl)\end{matrix}\right]Cl_2$



$$\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_5\\(Cl)\end{matrix}\right]Cl_2 + H_2O \rightleftarrows \left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_5\\(H_2O)\end{matrix}\right]Cl_3.$$

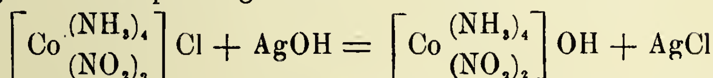
This is a case of equilibrium in solution and the purpureo salt being much less soluble comes out as a precipitate.

If we start with a solution of purpureo cobalt chloride $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_5\\(Cl)\end{matrix}\right]Cl_2$ and add ammonium hydroxide and warm the mixture we get the aquopentammine salt $\left[\mathrm{Co}\begin{matrix}(NH_3)_5\\(H_2O)\end{matrix}\right]Cl_3$ in solution and this is the usual method of preparation of the aquo salt.

I find that the ammonium hydroxide has only a catalytic effect on the hydrolysis of the purpureo salt into the aquopentammine salt. A solution of the purpureo chloride takes up a molecule of water

and passes into the aquo salt very slowly even at the ordinary temperature. This hydrolysis is markedly accelerated by the presence of hydroxyl (OH′) ions. The greater the concentration of the hydroxide ions, the greater is the acceleration. The study of the reaction velocity of this hydrolysis may serve as a means of determining the concentration of hydroxide ions in a dilute solution of a base. Thus if we make a solution of the purpureo salt and add a few drops of a dilute solution of potassium hydroxide, the purple colour changes and becomes rose in a few minutes; but with a weak base like ammonium hydroxide the colour change takes a long time. This explanation may be true in the case of hydrolysis with the corresponding compounds of chromium and platinum. There is evidence to show that in some other cases of hydrolysis by alkali, the action of the hydroxide ions is catalytic. The decomposition of sodium chloracetate by alkali is a case in point (SENTER, Trans Chem. Soc. 1907, **91**, 473).

One can get the hydroxides of the cobaltammines in solution by treating the corresponding halide with moist silveroxide:



$$\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_4\\(NO_2)_2\end{matrix}\right]Cl + AgOH = \left[Co\begin{matrix}(NH_3)_4\\(NO_2)_2\end{matrix}\right]OH + AgCl$$

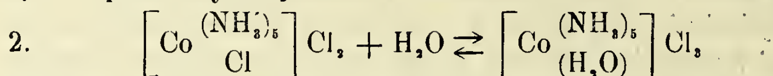
The solution slowly decomposes even at the ordinary temperatures. The hydroxides of the other members of this series can also be prepared by this double decomposition. These hydroxides turn phenolphtalein pink and electric conductivity measurements show that they are strong bases of the type of sodium hydroxide.

But one cannot prepare the hydroxide from purpureo cobalt chloride $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_5\\Cl\end{matrix}\right]Cl_2$ by double decomposition with silver oxide. The explanation becomes simple on the light of the catalytic effect of hydroxide ions on the hydrolysis of purpureo salts into the aquo compounds. The hydroxide ions set free by the double decomposition acts catalytically on the purpureo salt and actually one gets the aquopentammine hydroxide $\left[Co\begin{matrix}(NH_3)_5\\(H_2O)\end{matrix}\right](OH)_3$, which is stable in alkaline solution, (compare URBAIN et SÉNÉCHAL, Chimie des complexes, p. 280, "Les sels purpureo ne donnent pas une réaction de ce genre").

Summary and Conclusion.

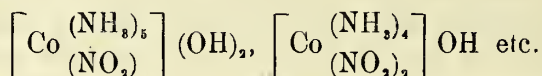
1. The principle of the preparation of the cobaltammines is guided by the law of mass action and thus depends on the concentration

of the reacting substances. One can substitute a nitro (NO_2) group in a compound by the group (NH_3) on warming it with a mixture of ammonium hydroxide and a ammonium salt and on the other hand, NH_3 is replaced by NO_2 when the salt is warmed with a nitrite solution.



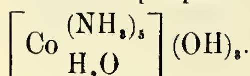
2. $$\left[Co \begin{matrix}(NH_3)_5 \\ Cl\end{matrix}\right] Cl_2 + H_2O \rightleftarrows \left[Co \begin{matrix}(NH_3)_5 \\ (H_2O)\end{matrix}\right] Cl_3$$

This hydrolysis reaction is catalytically accelerated by the presence of OH′ ions and the velocity is proportional to the concentration of hydroxide ions.



$$\left[Co \begin{matrix}(NH_3)_5 \\ (NO_2)\end{matrix}\right] (OH)_2, \left[Co \begin{matrix}(NH_3)_4 \\ (NO_2)_2\end{matrix}\right] OH \text{ etc.}$$

are strong bases and can be prepared in solution. The base obtained from the purpureo cobalt chloride is the aquopentammine hydroxide



$$\left[Co \begin{matrix}(NH_3)_5 \\ H_2O\end{matrix}\right] (OH)_3.$$

Chemical Laboratory, Muir Central College, Allahabad, India.

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer B. VON KERÉKJÁRTÓ te Ujpest: „*Ueber die endlichen topologischen Gruppen der Kugelfläche*".

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

Die vorliegende Arbeit gibt eine neue Herleitung des Resultates, dass die endlichen topologischen Transformationsgruppen mit invarianter Indikatrix der Kugelfläche mit den Gruppen der regulären Körper identisch sind, was nach dem BROUWERschen Grundsatz [1]), laut dessen die topologischen Gruppen mit den konformen homöomorph sind, aus dem die konformen Transformationsgruppen der Kugelfläche betreffenden, bekannten Satze folgt.

Wir betrachten eine Gruppe G von n topologischen, die Indikatrix erhaltenden Transformationen der Kugelfläche in sich. Eine willkürliche Transformation t von G ist nach dem *Rotationssatz* [2]) eine ν-periodische Drehung, die also zwei Fixpunkte P und Q hat; die Anzahl der mit P bei G äquivalenten Punkte ist $\frac{n}{\nu}$. Wir verbinden P mit Q durch einen Weg b, der seine bei den Potenzen von t entstehenden Bilder ausser in P und Q nicht trifft. Sei von P aus R der erste solche Punkt von b, dass $\widehat{PR}$ eines seiner bei G entstehenden Bilder ausserhalb P trifft. Wenn $R = Q$, so ist G mit der zyklischen Rotationsgruppe $1, t, t^2, \ldots\ t^{\nu-1}$ identisch. Wenn aber $R \neq Q$, so kann auf dem Bogen $\widehat{PR}$ höchstens ein mit R äquivalenter Punkt R' liegen. Wenn auf $\widehat{PR}$ kein mit R äquivalenter Punkt liegt, so ist R bei einer Transformation von G invariant, sodass der Bogen $\widehat{PR}$ ein zwei nicht-äquivalente Fixpunkte von G verbindender, seine Bilder ausserhalb der Endpunkte nicht treffender Bogen c ist. Wenn aber auf $\widehat{PR}$ ein mit R äquivalenter Punkt R' liegt, der bei keiner Transformation von G ausser der Identität invariant ist, so betrachte man das System der Bilder des Bogens $\widehat{R'R}$ von b; es besteht aus einander nicht treffenden Jordanschen Kurven, da R zu genau zwei solchen Bogen gehört; ferner ist dieses System bei G invariant.

[1]) Diese Verslagen XXVII, S. 1201—1203 (29. März 1919).

[2]) Math. Ann. Bd. 80, S. 36.

Sei γ eine der genannten Kurven; da das innere, d. h. keinen Bildpunkt von P enthaltende Gebiet von γ bei jeder es invariant lassenden Transformation von G einer Potenz derselben Drehung unterworfen ist, so kann man R' mit dem im Innern von γ existierenden einzigen Fixpunkt S (der nicht mit Q zusammenfallen kann) durch einen seine Bilder nicht treffenden Weg verbinden, welcher mit dem Bogen $\widehat{PR'}$ von b zusammen einen seine Bilder ausserhalb der Fixpunkte von G nicht treffenden und zwei Fixpunkte verbindenden Weg c bildet.

Die Bilder von c zerlegen die Kugelfläche in Elemente; falls eines dieser bei einer Transformation von G invariant, also einer Drehung unterworfen ist, so kann man einen Fixpunkt seiner Grenze mit dem in seinem Innern liegenden einzigen Fixpunkt T durch einen seine Bilder nicht treffenden Weg d verbinden. Die sämtlichen Bilder von c und d ergeben zusammen ein bei G invariantes System H von folgender Beschaffenheit: 1. H zerlegt die Kugelfläche in Elemente, von denen je zwei äquivalent sind und jedes nur bei der Identität invariant ist; 2. jeder Fixpunkt von G liegt auf H; 3. jeder Punkt von H, der zu mehr als zwei Bogen von H gehört, ist ein Fixpunkt von G. Die Anzahl der Elemente, in welche H die Kugelfläche zerlegt, ist n; die Anzahl der nicht äquivalenten Fixpunkte ist 3, ihre gesamte Anzahl ist also, wenn ν_1, ν_2, ν_3 ihre Multiplizitäten anzeigen, gleich $n\left(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}\right)$; die Anzahl der Kanten jedes Elementes ist 4, also die gesamte Anzahl der Kanten $2n$. Mithin besteht nach dem EULERschen Polyedersatz die Formel

$$n+\Sigma\frac{n}{\nu_i}-2n=2, \quad \text{oder} \quad \Sigma\frac{1}{\nu_i}=1+\frac{2}{n},$$

woraus sich die bekannten Lösungen ergeben [1]).

Mittels der gleichen Methode werde ich die BROUWERschen Resultate [2]) in bezug auf die endlichen Gruppen von topologischen Transformationen des Torus herleiten.

---

1) KLEIN, Vorlesungen über das Ikosaeder, S. 119.

2) C. R. t. 168, S. 845 (28. April 1919).

Physiologie. — De Heer VAN RIJNBERK biedt een mededeeling aan van den Heer Dr. H. T. DEELMAN[1]): „*Bijdrage tot de kennis van de dermatomerie bij de vogels* (*duif*).

(Mede aangeboden door den Heer WINKLER).

Het onderzoek naar de ligging en uitbreiding van de dermatomen bij de vogels is nog slechts zeer onvolledig verricht. Uit de andere groepen van gewervelde dieren kennen wij toch meerdere dermatoomstudies van ouderen en jongeren datum[2]), terwijl het met de kennis van het vogeldermatoom nog maar matig gesteld is. En evenals VAN RIJNBERK in 1907 SPARVOLI[3]) op deze leemte opmerkzaam maakte en hem tot een studie aanzette, zoo ook deed hij het 10 jaar later schrijver dezes. Waren de uitkomsten van het onderzoek van SPARVOLI dan negatief geweest? Geenszins, maar zijn resultaten konden slechts een voorloopig karakter dragen, doordat het aantal verrichte experimenten betrekkelijk maar gering was. Reeds hier wil ik dadelijk mededeelen, dat mijn uitkomsten niet veel talrijker waren; daar zij echter in veel opzichten een volkomen bevestiging zijn van de vondsten van SPARVOLI, is het dunkt mij belangrijk genoeg ze hier mede te deelen.

Waarom ontbreekt de vogel onder de proefdieren die voor dermatoomstudies gebruikt zijn? Een vogel is een moeilijk proefdier. Men moet over bijzondere apparaten beschikken tot fixatie van het dier, de bedwelming moet zeer voorzichtig worden toegediend. Voorts brengt het zoeken der ruggemergswortels groote moeilijkheden met zich. In het halsgebied — te midden van bloedrijke spieren en bij slechte fixatie — is het opzoeken der wortels haast ondoenlijk. In het lumbale gebied brengt het beenige kanaal waarin het ruggemerg besloten is, weer andere moeilijkheden. Het thorakale gebied is nog het beste voor de proefnemingen geschikt.

Aanvankelijk werden de kip en de eend als proefdieren gebruikt.

---

[1]) Naar onderzoekingen verricht in het Physiologisch Laboratorium der Universiteit van Amsterdam.

[2]) KOSCHEWNIKOFF voor den kikvorsch, SHERRINGTON voor den aap, WINKLER en VAN RIJNBERK voor den hond, VAN RIJNBERK bij den visch; later ook KLESSENS voor de kat en VAN TRIGT voor de hagedis.

[3]) SPARVOLI, Sull' innervazione segmentale della cuté negli uccelli. Archivio di Anatomia e di Embriologia, Vol. VI. fasc. 3. 1907.

Deze dieren bleken echter minder geschikt daar men te gemakkelijk bij de operaties groote bloedingen verkrijgt, die de dieren niet doorstaan. Ik bepaalde mij toen verder bij de duif. Bij de duif had ik maar zelden last van bloedingen bij de operatie, terwijl het mij heeft getroffen, hoe goed de duif ook niet volkomen steriele ingrepen verdraagt. Infecties behoorden gelukkig tot de uitzonderingen. (Op de eerste reeks van 25 duiven slechts 3 gevallen).

Wat de proefmethode aangaat, zoo werd ik als vanzelf in de banen van SPARVOLI geleid. Een deel van het ruggemerg werd blootgelegd, de wortels naar behoefte doorsneden, de wond in twee lagen (spieren en huid) gehecht. Het is vooral bij mijn latere proeven het streven geweest, om bij worteldoorsnijdingen links, zooveel mogelijk te werken op de rechter lichaamshelft, om — behoudens de doorgesneden linkerwortels — de andere zenuwstammen zoomin mogelijk te beschadigen[1]). De uitbreiding van de gevoelige velden werd in de volgende dagen door knijpen met een pincet bepaald. Het dier wordt dan door een helper vastgehouden — men zorgt voor een volkomen rustige, diffuus verlichte omgeving — en de gevoelige gebieden met een kleurstof aangestipt. Electrische prikkeling geeft minder goede uitkomsten. SPARVOLI kwam tot hetzelfde resultaat[2]).

Van de uitgevoerde proeven:

Ik heb drie proefreeksen uitgevoerd: 1. enkelvoudige doorsnijding van 1 of 2 dorsale wortels en daaropvolgende bepaling van het ontstane ongevoelige huidgebied; 2. „isoleering" van een dermatoom tusschen twee ongevoelige huidgebieden („remaining sensibility" van SHERRINGTON); 3. doorsnijding, achtereenvolgens van een geheele reeks dorsale wortels, en bepaling keer op keer van de daardoor ontstane uitbreiding van het analgetisch gebied en de daaraan beantwoordende verplaatsing van de grens tusschen voelend en niet-voelend gebied (gewijzigde methode van ROSSI). De uitkomsten dezer dierproefreeksen zal ik achtereenvolgens bespreken.

[1]) Prof. VAN RIJNBERK maakte mij opmerkzaam, steeds ook de heterolaterale lichaamshelft op sensibiliteitsstoornissen te onderzoeken. Dit heb ik dan ook in de latere proeven steeds gedaan. Een anaesthetisch gebied aan beide zijden van de operatiewond — dan weer eens wat breeder, dan weer wat smaller — kon wel steeds worden vastgesteld. Overigens werden op de heterolaterale lichaamshelft geen sensibiliteitsstoornissen aangetroffen.

Een tandartsen-boormachine bewees uitnemende diensten bij het openmaken van het ruggemergskanaal; vooral ook in het lumbale gebied bereikt men hiermede veel sneller zijn doel dan met allerhande knabbeltangen.

[2]) De strychnine-isolatiemethode (KLESSENS, BARENNE) geeft bij de duif geen uitkomst. Hyperreflectorische gebieden blijven achterwege.

1°. *Enkelvoudige doorsnijding van 1 of 2 wortels.*

Wanneer men één wortel doorsnijdt gelukt het niet een anaesthetisch gebied te bepalen. De huid blijft overal gevoelig.

Ook SPARVOLI boekte hetzelfde resultaat. Bij de eerste 5 duiven werd één wortel doorsneden in het thoracale of hoogelumbaal-gebied.

Bij duif VI—XII werden twee opvolgende wortels doorsneden (ook wederom in het thoracale gebied of hooge-lendengebied). In de volgende dagen kon een tamelijk breed ongevoelig gebied op de romp worden vastgesteld, dat zich in dorso-ventrale richting uitstrekt. De grenzen laten zich tamelijk scherp bepalen. Soms werd de dorsale mediaanlijn door het bepaalde ongevoelige gebied niet geheel bereikt, zonder dat het gelukt hier een scherpe grens aan te teekenen (fig. 1).

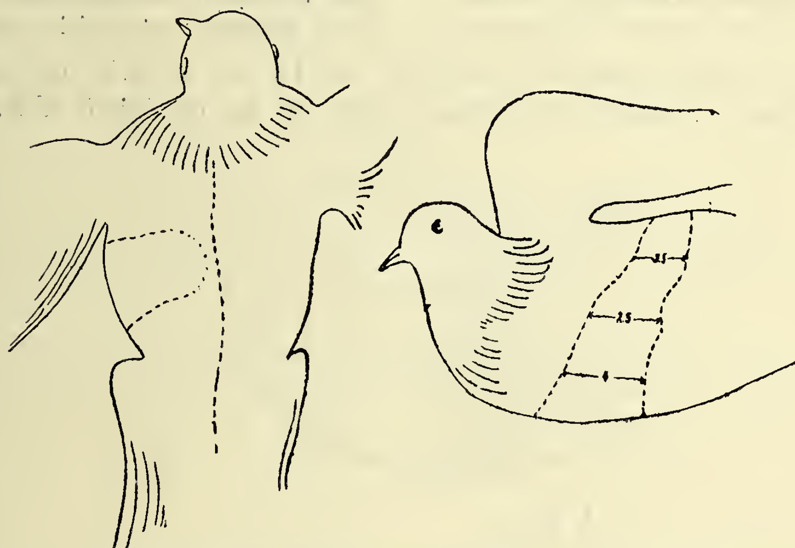


Fig. 1. Ongevoelig huidveld verkregen na doorsnijding van 2 opvolgende thoracale wortels (links) bij duif VIII.

Het ongevoelig gebied wordt naar de ventrale mediaanlijn iets breeder, al is het verschil maar gering. De schets aan duif VIII ontleend, geeft er een beeld van. Ter vergelijking geef ik fig. 2, aan de mededeeling van SPARVOLI ontleend, waarbij ook twee wortels links bij de duif zijn doorsneden. Met de dikke lijnen van SPARVOLI wordt waarschijnlijk uitgedrukt dat hij de grenzen niet scherp vond. Toch is mijn ervaring dat het wel gelukt een duidelijke grens aan te wijzen. Ook konden versmallingen van het ongevoelige gebied in de „axillair”-lijn worden aangetoond, al was het meest niet zoo duidelijk als bij SPARVOLI. (Zie de maten in fig. 1).

In een nieuwe reeks van proefnemingen werden bij een aantal duiven twee opvolgende wortels doorgesneden. Bij duif 3 (N.R.) de

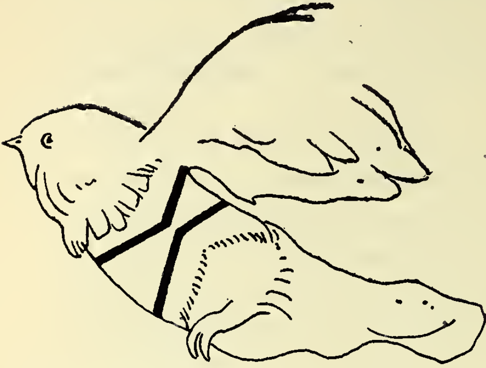


Fig. 2. Ontleend aan de mededeeling van SPARVOLI, waarbij evenals bij duif VIII twee thoracale wortels werden doorgesneden.

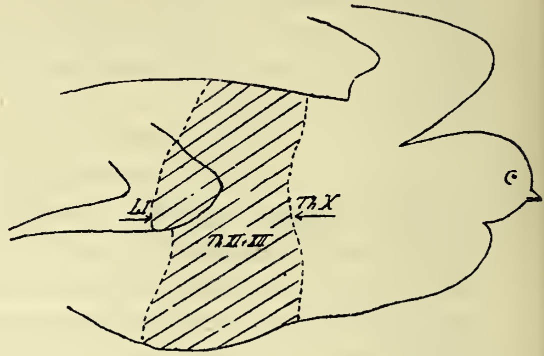


Fig. 3. Ongevoelig huidveld (gedeeltelijk op linker achterpoot) na doorsnijding van de beide laatste thoracale wortels (links) (duif 3 N.R.).

beide laatste thorakale wortels (fig. 3), bij duif 4 (N.R.) de laatste thorakale en eerste lendenwortel (fig. 4) en bij duif 5 (N.R.) de

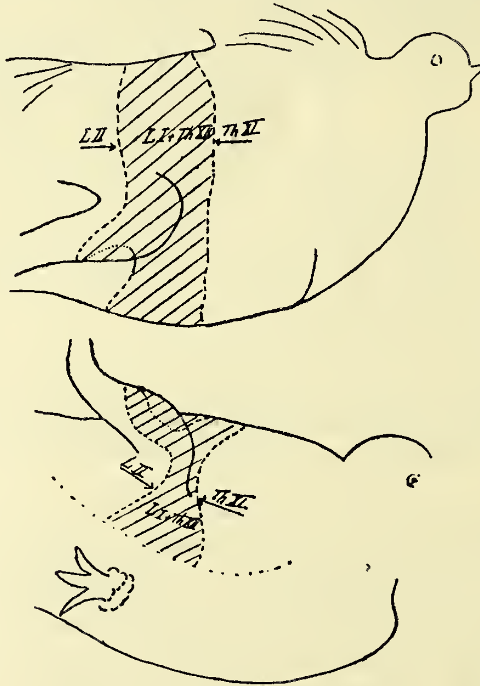


Fig. 4. Ongevoelig huidveld (gedeeltelijk op linker achterpoot) na doorsnijding van den laatsten thoracalen en eersten lendenwortel (links) (duif 4 N.R.).

2e en 3e lumbale wortel (fig. 5). De figuren geven duidelijk weer het verplaatsen van de anaesthetische gebieden in caudale richting,

terwijl tevens blijkt, dat de ongevoelige gebieden van duif 4 en 5 te zamen juist den geheelen achterpoot innemen, doordat de caudale

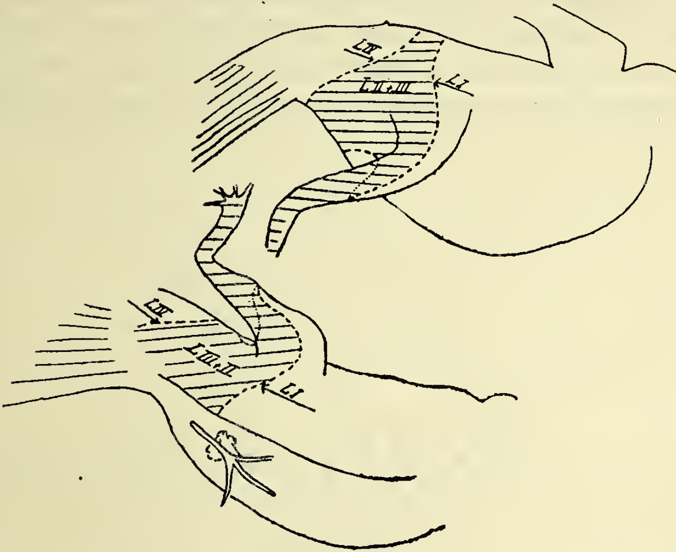


Fig. 5. Ongevoelig huidveld na doorsnijding van den tweeden en derden lumbalen wortel (links) (duif 5 N.R.).

grens van het ongevoelige gebied bij duif 4 juist de craniale grens is van het ongevoelige gebied van duif 5.

2. *Isoleering van* 1 *dermatoom* („*remaining sensibility*").

Bij de duiven genummerd XIII tot XXI werd getracht de isolatie-



Fig. 6. Geisoleerd gevoelig gebied bij duif XIII, verkregen na doorsnijding van 4 wortels (2 craniaal en 2 caudaal van één thoracalen wortel (links).

methode van SHERRINGTON toe te passen. Eén wortel werd intact gelaten en twee wortels craniaal en twee wortels caudaal van deze werden doorgesneden. Regelmatig werd nu een ongevoelig gebied gevonden, dat gelegen is in een breede zone waarin het dier geen reactie op mechanische prikkels geeft. De figuur aan duif XIII ontleend geeft dezen toestand weer (fig. 6). Het gevoelige gebied, dat

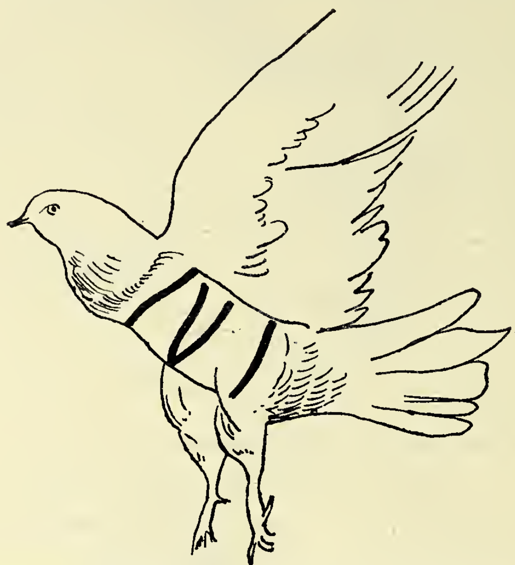


Fig. 7. Geisoleerd gevoelig gebied na isolatie van een wortel tusschen twee craniale en twee caudale doorgesneden wortels (fig. aan de mededeeling van SPARVOLI ontleend.



Fig. 8. Idem als fig. 7.

op deze wijze verkregen werd, reikt tot iets verder dan de axillairlijn en loopt naar ventraal tamelijk breed uit. In de latere gevallen werd getracht, door een been-spier-huidbrug boven den niet-door-te-snijden wortel te laten staan, de beschadigingen door de operatie veroorzaakt aan dezen wortel zoo gering mogelijk te doen maken. Wel kon ik dan vinden dat het gevoelige gebied iets meer nog naar de dorsale mediaanlijn reikte, maar deze werd echter nooit bereikt.

Fig. 7 en Fig. 8 zijn twee afbeeldingen van gelijke proeven van Sparvoli. De gevoelige gebieden die ik op bovenstaande wijze vond, waren dunkt mij wel steeds grooter dan die van S. Met nadruk wijs ik er op, dat regelmatig een verbreeding naar de ventrale zijde gevonden werd. Voorts werd de indruk verkregen, dat met toenemende ervaring, de gevonden gevoelige gebieden grooter werden.

3°. *Achtereenvolgende doorsnijding van een reeks dorsale wortels* (gewijzigde methode van Rossi). Uitbreiding van de studie werd nu in deze wijze van opereeren gezocht. Deze methode levert het groote voordeel op, dat elke proef een aantal gegevens verschaft op éénzelfde dier verkregen, waarbij dus de individueele variabiliteit, welke in het hoofdstuk der segmentaal-anatomie zulk een groote rol speelt, uitgeschakeld is. Fig. 9 (aan duif 22 ontleend) geeft een indruk van

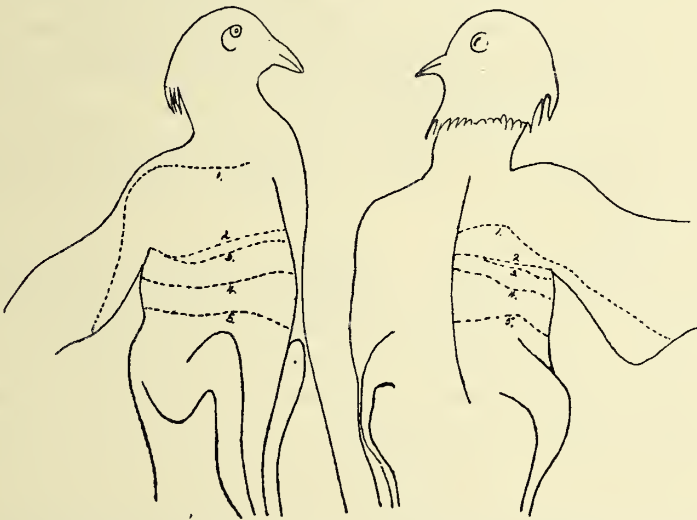


Fig. 9. Opvolgende vergrooting van het ongevoelige huidgebied tusschen de lijnen 1 en 2, 1 en 3, 1 en 4, en 1 en 5, na doorsnijding van 2, 3, 4 en 5 wortels. (Rossi-methode).

de uitkomsten op deze wijze verkregen. Allereerst werd hier de laatste cervicaalzenuw doorgesneden. Geen anaesthetisch gebied werd

gevonden. Twee dagen later werd de eerste thoracale zenuw doorgesneden. Nu komt er een ongevoelig gebied als tusschen de lijnen 1 en 2 is aangegeven. Weer twee dagen later volgt de volgende zenuw. De lijn 3 geeft nu de caudale grens aan. Deze is slechts een paar m.m. meer caudaal dan lijn 2, terwijl 2 en 3 op den rug van het dier samenloopen. Na twee dagen wordt de volgende zenuw doorgesneden en lijn 4 wordt de caudale grens van het anaesthetische gebied. Bij doorsnijding van de volgende zenuw wordt lijn 5 de caudale grens van het nu langzamerhand tamelijk breede ongevoelige gebied.

Bij opvolgende worteldoorsnijding vindt men dus een steeds breeder anaesthetisch gebied, al is de breedte-toename bij elken volgenden wortel ook niet constant.

Beschouwing der met de drie methoden verkregen uitkomsten.

Uit al onze proeven blijkt, dat de gevoelige wortelgebieden, ook bij de duif, op den romp als ononderbroken gordelvormig serieel gerangschikte zônes, van de dorsale tot de ventrale middenlijnen verloopen. Voor zoover men mag oordeelen uit de enkele proeven binnen het gebied der extremiteiten, schijnt het, dat ook hier de serieele rangschikking behouden is. In de afbeeldingen van fig. 3, 4 en 5 ziet men de caudale grenzen van *Th X*, *Th XI* en *L I*, en de craniale grenzen van *L I*, *L II* en *L IV* gelijkmatig op den achterpoot verschuiven, zoodat op de dij, de craniale grens van *L II* ongeveer samenvalt met de caudale van *L I*.

Bij de isoleering van een wortelveld op den romp bleek mij — evenals aan Sparvoli — dat de gevoelige zone niet de dorsale middenlijn bereikt.

De ongevoelige gebieden die gevonden worden bij twee opvolgende worteldoorsnijdingen, worden regelmatig breeder naar de ventrale zijde toe, al is deze breedtetoename ook niet erg groot. De gevoelige gebieden met de isolatiemethode verkregen, worden naar de ventrale zijde toe aanmerkelijk breeder. Deze beide waarnemingen zonder erop kunnen wijzen, dat de *dermatomen* bij de duif naar de ventrale zijde toe aanmerkelijk in breedte toenemen. Men weet hoe er vooral in de latere jaren een kwestie is geweest over het ontstaan van den vorm van het dermatoom. De Boer [1]) heeft getracht waarschijnlijk te maken, dat de grootere uitbreiding van het dermatoom aan de ventrale zijde met het grooter aantal prikkels in verband moet worden gebracht, die de buikzijde van het dier verkrijgt in vergelijking met

[1]) Feestbundel voor Winkler 1918.

de rugzijde (functioneel verband tusschen de uitbreiding van het dermatoom en prikkelhoeveelheid).

Wanneer nu mijn waarnemingen aan de duif juist zijn verricht, dan hebben wij ook hier wederom een diersoort, waarbij de dermatomen naar ventraal aanmerkelijk in afmetingen toenemen. Ik zou er nu op willen wijzen, dat dit geen steun is voor de opvattingen van DE BOER, daar, wanneer men meet — langs de rugmiddenlijn — de afstand van hals-implantatie tot aanhechting van het staartstompje, en dezen afstand vergelijkt met den afstand tusschen correspondeerende punten van de ventrale middenlijn, dat het dan blijkt, dat de laatste afstand ongeveer 2 maal grooter is dan de eerste. Bij de vogels is — dank zij den schuitvormigen bouw van den romp — het verschil tusschen de lengte van dorsale en ventrale mediaanlijn wel veel grooter dan bij elke andere diersoort (vergelijk hiermede den volkomen buisvormigen romp van de hagedis, VAN TRIGT). Terecht kan men dunkt mij verwachten dat reeds hierom de dermatomen naar de ventrale zijde aanmerkelijk in breedte zullen moeten toenemen, zonder dat het noodzakelijk is deze breedtetoename met functioneele factoren in verband te brengen.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer W. J. H. MOLL: *„Een nieuwe registreerende Microfotometer"*.

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER STOK).

De naam „Microfotometer" is het eerst door HARTMANN [1]) gegeven aan een door hem ontworpen toestel, bedoeld om van zeer kleine deelen eener fotografische plaat de zwarting te bepalen.

Het te onderzoeken deel der fotografische plaat wordt daartoe vergeleken met een deel van een „fotografische wig" (een fotografische plaat van geleidelijk afnemende zwarting), en de meting komt neer op het uitzoeken op de wig van een plaats van gelijke zwarting. De wijze waarop beide zwartingen worden vergeleken, is op nevenstaand schema, fig. 1, aangegeven. *P* is de fotografische plaat, en *K* de

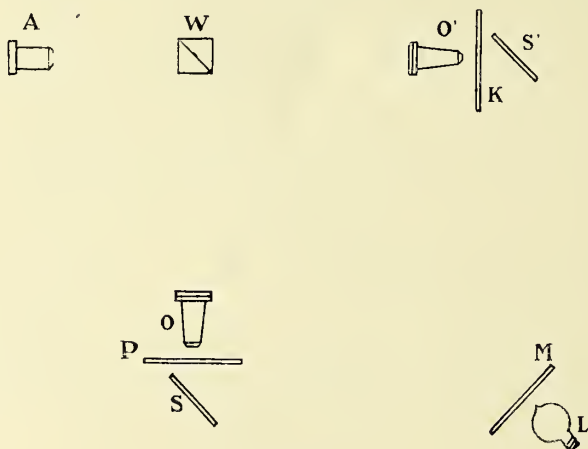


Fig. 1.

wig, welke beiden door tusschenkomst van de spiegels *S* en *S'* licht ontvangen van een plaatje melkglas *M*, dat door een lampje *L* wordt beschenen. *W* is een dubbelprisma naar LUMMER en BRODHUN, op het hypothenusavlak waarvan de objectieven *O* en *O'* een scherp beeld van kleine deelen der beide fotografische platen ontwerpen. In het oculair *A*, ingesteld op het midden van het hypothenusavlak, ziet men in het centrum een zeer klein deel van de plaat *P*, en rond

[1]) J. HARTMANN, Zeitschr. f. Instrumentenk. 19, p. 97, 1899.

daaromheen een deel van de wig *W*. Men verschuift nu de wig, tot het contrast verdwijnt, en leest den stand van de wig af.

Op deze wijze kan men, door de fotografische plaat te verschuiven, deze punt voor punt onderzoeken.

In zijn oorspronkelijken vorm was HARTMANN's microfotometer slechts bedoeld, om op de fotografische plaat plaatsen van gelijke zwarting op te sporen; hij was als zoodanig een hulptoestel bij de fotografische fotometrie van zeer zwakke lichtbronnen (sterren, nevelvlekken). Om b.v. de lichtverdeeling in een nevelvlek te onderzoeken, werd deze gefotografeerd. Vervolgens werd op een ander deel derzelfde fotografische plaat een „intensiteitsschaal" ontworpen, die verkregen werd door met een aardsche lichtbron naast elkaar liggende vakjes te verlichten, telkens gedurende precies denzelfden tijd, maar van uit verschillende nauwkeurig bepaalde afstanden. Daarna werd de plaat in haar geheel ontwikkeld en gefixeerd. Nu is het verband tusschen zwarting van een fotografische plaat en de lichthoeveelheid, die deze zwarting heeft veroorzaakt, van allerlei factoren afhankelijk, maar onafhankelijk van eenige zwartingswet geldt, dat plaatsen van gelijke zwarting gelijke (d.w.z. fotografisch gelijke) hoeveelheid licht per $c.m.^2$ hebben ontvangen. Door dus, met de wig als vergelijkingsobject, in het fotografisch beeld der nevelvlek een aantal plaatsen op te zoeken van gelijke zwarting als een der vakjes der intensiteitsschaal, kent men voor evenveel plaatsen der nevelvlek de mate waarin ze licht uitzenden.

Maar niet minder belangrijk is een andere toepassing, die de microfotometer van HARTMANN heeft gevonden, n.l. het onderzoeken naar de zwartingsverdeeling in het fotografisch opgenomen beeld van een of ander object of verschijnsel, een spectrum bijvoorbeeld.

Een dergelijk onderzoek echter beteekent het bepalen van de zwarting plaats voor plaats van een meer of minder uitgebreid gebied, en wel door visueele fotometrie. Dit is een tijdroovend werk en voor den waarnemer zeer vermoeiend, de nauwkeurigheid van instelling neemt daardoor, zelfs bij de uiterste inspanning, snel af [1].)

Het groote bezwaar dat bij een dergelijk uitgebreid fotometrisch onderzoek de subjectieve waarneming oplevert, heeft KOCH [2]) geleid tot den bouw van een geheel automatisch toestel, een zelfregistreerenden microfotometer.

KOCH werpt het principe van den contrast-fotometer over boord, en bepaalt de zwarting door directe meting van het doorgelaten licht,

[1]) Fijne détails komen daarbij uiteraard in het geheel niet tot hun recht.

[2]) P. P. KOCH, Ann. d. Phys. 39, p. 705, 1912.

en wel met behulp van een foto-electrische cel. Fig. 2 geeft een schematische voorstelling van de inrichting van zijn apparaat.

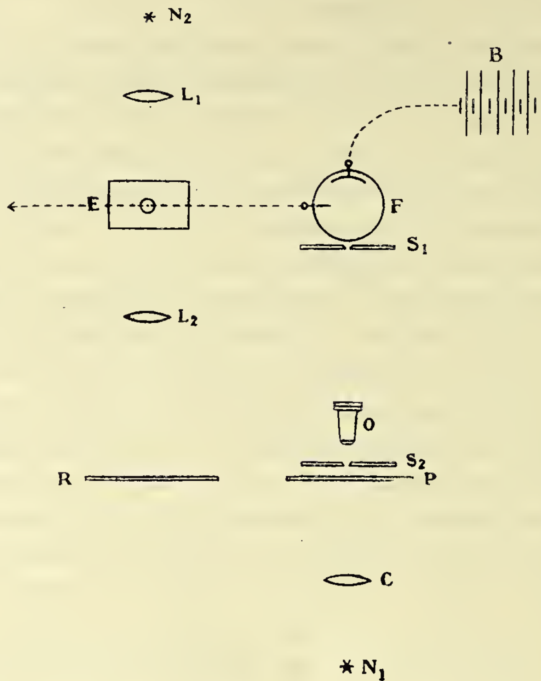


Fig. 2.

Het licht van een Nernstlamp N_1 wordt door een condensor C geconcentreerd op de fotografische plaat P. Het doorgelaten licht treft het objectief O, hetwelk op de spleet S_1 een vergroot beeld ontwerpt van de fotografische plaat. Het licht dat door de spleet wordt doorgelaten, en dus afkomstig is van een smalle strook der fotografische plaat, treft een foto-electrische cel F, en wel de met Kalium bedekte kathode, die met de negatieve pool van een accumulatorenbatterij B is verbonden. De anode is via een snaar-electrometer E van het gebruikelijke type, en via een zeer grooten weerstand met de aarde verbonden.

Al naar gelang van de zwarting van de fotografische plaat, zal de cel door meer of minder licht getroffen worden, en zal de electrometer een grooter of kleiner uitslag krijgen.

Deze uitslag wordt met behulp van een tweede Nernstlamp N_2, en een paar lenzen L_1 en L_2 fotografisch geregistreerd op een gevoelige plaat R, en een zelfde uurwerk verschuift gelijktijdig de platen P en R, P zeer langzaam in horizontale, en R vrij snel in verticale richting. Op deze wijze wordt op de plaat R een kromme

lijn geregistreerd, waarvan de abscissen met verschillende plaatsen van de plaat P overeenkomen, en de ordinaten een maat zijn voor de op die plaatsen bestaande zwarting.

Koch wijst zelf op de moeilijkheden, die het verkrijgen van betrouwbare opnamen met dit zeer subtiele instrumentarium oplevert. Om de schommelingen in de lichtsterkte van de Nernstlamp (die om voldoende gevoeligheid te verkrijgen, overbelast wordt), tengevolge van luchtstroomingen en wisselingen in de spanning der stroomleverende batterij, te compenseeren, neemt hij in de keten: batterij-cel-electrometer-aarde een tweede cel op, die door dezelfde Nernstlamp N_1 wordt bestraald, en die tegen de eerste is geschakeld.

Ook als alle voorzorgen zijn getroffen om den electrometer, de cellen en hun toeleidingen electrostatisch te beschermen, doen zich onverwachte kleine bewegingen van de snaar voor, en deze is bovendien uiterst gevoelig voor dreuningen.

Maar bovenal levert de traagheid der foto-electrische cel een principieel bezwaar. Bij constante bestraling van de cel bereikt de electrometer eerst na eenige minuten zijn einduitslag. De electrometer volgt de intensiteits-wisselingen van het licht dus slechts langzaam. Met de bedoeling om de snelheid van aanwijzing te vergrooten, wordt een derde cel in de keten opgenomen, maar het effect daarvan is slechts gering.

Nu komen in de fotografische plaat maar zelden sprongsgewijze veranderingen van zwarting voor, en daarom vallen de contrasten die door een trage cel worden geregistreerd inderdaad nog wel mee, maar de geregistreerde intensiteitsverdeeling is niet de juiste. Een volkomen symmetrische spectraallijn b.v. zal tengevolge van de traagheid der cel een asymmetrische kromme leveren, en men kan aan dat bezwaar slechts tegemoet komen, door de fotografische plaat met de uiterste langzaamheid te verschuiven.

Bij allerlei spectrografische onderzoekingen, die in den laatsten tijd in het Utrechtsche Physische Laboratorium worden uitgevoerd, deed zich de behoefte gevoelen aan een microfotometer. Hierin heb ik een aanleiding gevonden zelf de constructie van een toestel ter hand te nemen. Elders zijn reeds enkele resultaten gepubliceerd, die met het oorspronkelijke toestel, en een aanmerkelijk verbeterd exemplaar zijn verkregen. Waar thans het instrument een meer definitieven vorm heeft aangenomen, wil ik in het kort daarvan een beschrijving geven:

Het principe, dat aan dezen nieuwen microfotometer ten grondslag ligt, is in hoofdzaak hetzelfde als door Koch is toegepast, maar

voor het registreeren der intensiteit van het door de fotografische plaat verzwakte licht, wordt niet gebruik gemaakt van de combinatie foto-electrische cel en electrometer, maar van de combinatie thermozuil en galvanometer. Dat daarbij in hoofdzaak stralen van groote golflengte een rol spelen maakt geen wezenlijk verschil uit, de verzwakking die deze stralen door de fotografische plaat ondergaan kan juist evengoed als maat voor de zwarting dienen, als de verzwakking van de eigenlijke lichtstralen alleen [1]).

Deze combinatie biedt daarentegen een aantal voordeelen:

De galvanometer en de thermozuil, van een constructie zooals ik die vroeger heb beschreven [2]) zijn instrumenten, die juist voldoen aan de eischen die de microfotometer stelt. Zij zijn snel, zeer gevoelig, en zoo onafhankelijk van uitwendige storingen, dat zij onder het gebruik geen speciaal toezicht behoeven.

Het zij me vergund met een fotografisch geregistreerd diagram, zie fig. 3, de wijze, waarop thermozuil en galvanometer functioneeren, overtuigend te toonen.

Een dergelijke thermozuil voorzien van een uiterst smalle spleet vormt het gevoelige deel van den nieuwen microfotometer. In nevenstaand schema, fig. 4, stelt T de thermozuil voor, en S_1 de spleet

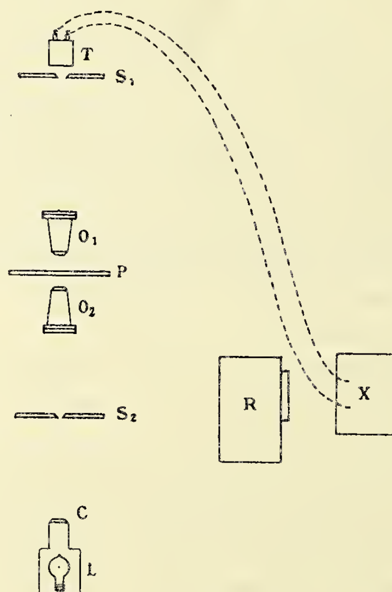


Fig. 4.

[1]) Men heeft echter te bedenken, dat de maat waarin de zwarting wordt gemeten voor beide gevallen verschillend is.

[2]) Deze Verslagen, 22, p. 206 (Juni 1913), en p. 614 (Nov. 1913).

L is een lantaarn waarin een gloeilampje, en voorzien van een condensor C, die de gloeiende spiraal van het lampje projecteert op de spleet S_2. O_2 en O_1 zijn twee microscoop-objectieven, waarvan het eerste dient om de spleet S_2 sterk verkleind af te beelden op de fotografische plaat P, en het tweede om een vergroot beeld van de fotografische plaat op de spleet S_1 te vormen. De fotografische plaat P is vastgeklemd tegen een plaathouder (niet in de figuur geteekend), welke plaathouder met behulp van een micrometerschroef zijdelings verschoven wordt. De thermozuil is direct aan den galvanometer X aangesloten, en deze werpt een lichtbeeld (afkomstig van een tweede gloeilampje, dat naast of boven den galvanometer is opgesteld) op een registreertrommel R.

De wijze waarop de bewegingen van P en R zijn gekoppeld zal straks nader worden aangegeven.

Fig. 5 geeft een schets van het complete instrument op $^1/_3$ van de natuurlijke grootte. De verschillende boven reeds genoemde onderdeelen zijn door dezelfde letters als in fig. 4 aangegeven.

De voet van het toestel bestaat uit twee stevig aan elkander bevestigde deelen, een zware gegoten bronzen grondplaat U, waarop een tafel D en verdere opstaande stukken, en een ijzeren rail V van driehoekig profiel. De rail heeft geen andere bestemming, dan alleen om daarlangs drie ruiters I, II en V te kunnen verschuiven,

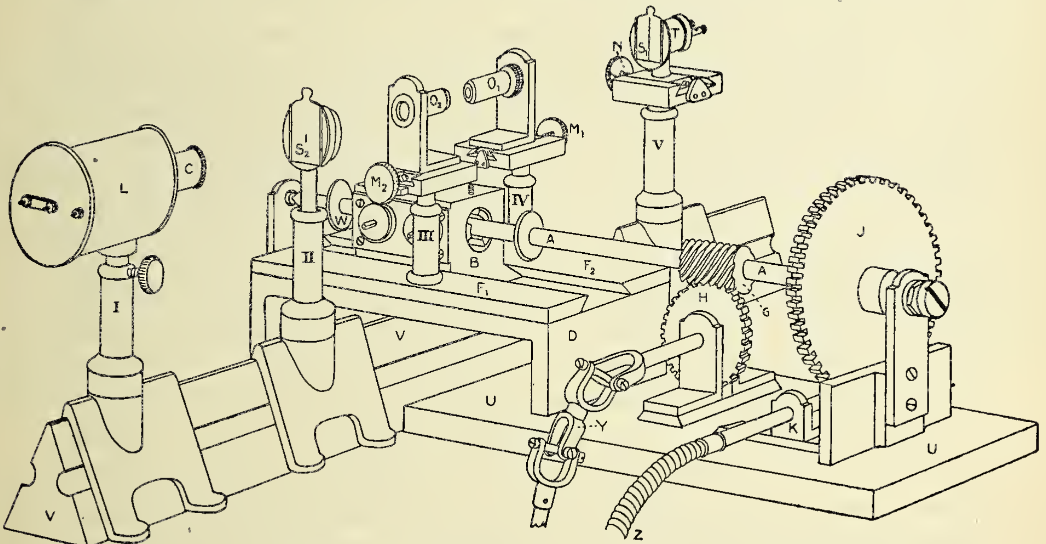


Fig. 5.

waarvan I het lantaarntje L, II de spleet S_2 en V de thermozuil T draagt. Op de bronzen grondplaat en de tafel is het bewegings-

mechanisme aangebracht, en op de tafel D bovendien de beide standaards III en IV welke de objectieven O_2 en O_1 dragen.

Het voornaamste onderdeel van het bewegingsmechanisme vormt de hoofdas A. Dat gedeelte van de hoofdas, dat zich binnen het blok B bevindt draagt een micrometerschroef van 1 m.m. spoed, waarmede dit blok, dat inwendig van een moer is voorzien, tusschen twee lijsten F_1 en F_2 zijdelings verschoven wordt. Aan de afwerking van deze schroef en moer is de alleruiterste zorg besteed. Op het blok B wordt met drie schroeven de plaathouder Q bevestigd, waartegen de te onderzoeken fotografische plaat wordt vastgeklemd (de plaathouder is niet in de schets geteekend).

Verder draagt de as bij G een drievoudige wormschroef, die in het wormrad H grijpt, en daaraan bij draaiing een tienmaal vertraagde beweging mededeelt. De vaste as van dit wormrad wordt door tusschenkomst van een dubbele cardanische overbrenging Y, gekoppeld aan het drijfwerk van den registreertrommel (niet in de schets geteekend). Door omschakeling van een tusschenrad van dit drijfwerk kan men den trommel òf dezelfde snelheid geven als H, òf wel een 4 maal kleinere. Op den trommel wordt een vel broomzilverpapier gespannen, van circa 40 c.m. lengte. Een verplaatsing van het gevoelige papier over 40 c.m. komt dus overeen met een verschuiving der fotografische plaat P over 40 resp. 10 m.m.

Eindelijk draagt de hoofdas een wormrad J van 200 tanden, waarin de wormschroef K grijpt. Deze schroef wordt door middel van een buigzame as Z direct gekoppeld aan een electromotor (niet in de schets geteekend), die, voorzien van een vliegwiel, voor matige snelheid is ingericht. In de leiding, die den stroom aan den electrometer toevoert, wordt een regelbare weerstand en een commutator opgenomen (beide niet geteekend in de schets). Met behulp daarvan kan men de snelheid van draaiing der hoofdas binnen wijde grenzen varieeren, en de richting van draaiing kiezen. Er is een inrichting getroffen, die de beweging van het blok B beiderzijds beperkt. Wanneer n.l. het blok in den eenen of den anderen uitersten stand is aangekomen, maakt een stuiting verdere draaiing van de hoofdas onmogelijk, zonder dat de micrometerschroef daarvan nadeel ondervindt. Doordat het wormrad J niet vast aan de hoofdas is bevestigd, maar met zware wrijving over die as kan draaien, zal van het oogenblik af dat de hoofdas wordt gestuit, de motor niets anders doen dan deze wrijving overwinnen, maar de plaat P en de trommel R zullen blijven stil staan. Door het omzetten van een hefboom kan bovendien de schroef K worden vrijgemaakt van het wormrad J. Men kan dan de hoofdas uit de hand ronddraaien, en dat deel van de fotografische plaat

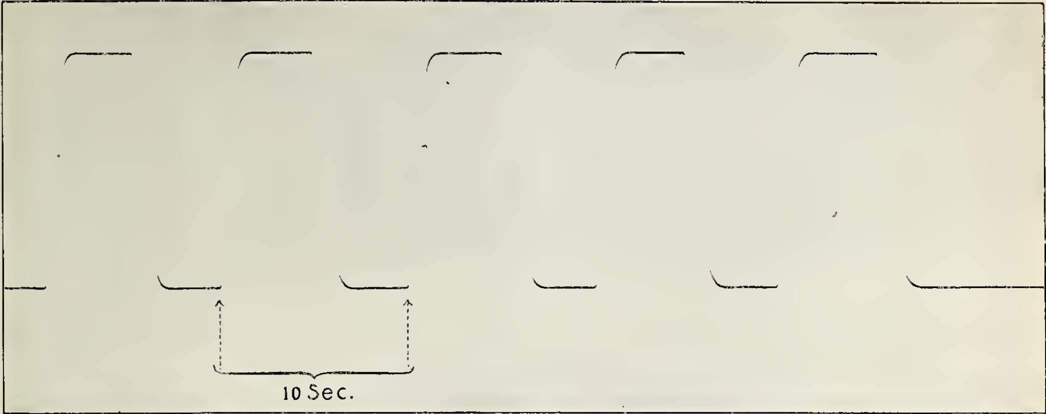


Fig. 3. Fotografisch diagram opgenomen met de thermozuil en den galvanometer (de beide hulpinstrumenten van den microfotometer), ter demonstratie van de betrouwbaarheid en snelheid van aanwijzing dier instrumenten.

De straling van een kaars, geplaatst op 1 meter afstand van de thermozuil (voorzien van een spleet van 1 m.m. breedte), werd intermitteerend telkens 5 sec. toegelaten en 5 sec. onderschept.

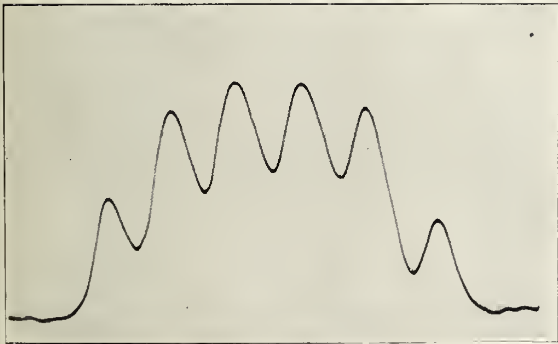


Fig. 6. Diagram geleverd door den microfotometer van een ZEEMAN-sextet. De 6 lijnen hadden tezamen een breedte van circa 0,6 m.m.

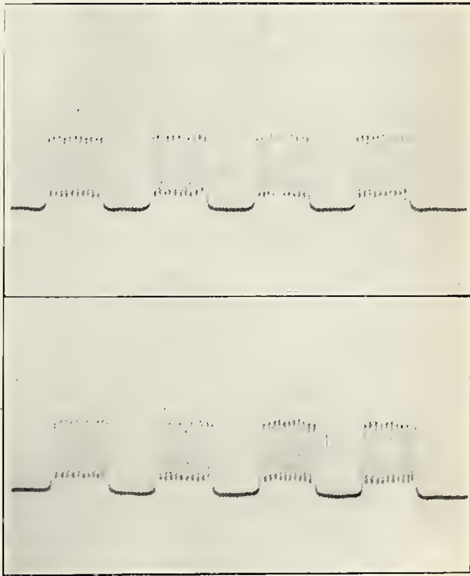


Fig. 7. Diagram geleverd door den microfotomer van een „Abbesche Testplatte"; hetzelfde object tweemaal achtereenvolgens opgenomen.

tusschen de objectieven brengen, dat men onderzoeken wil. Bij deze draaiing wordt wel is waar ook de registreertrommel meegenomen, maar deze laat zich van buiten af in den gewenschten beginstand brengen.

Wat het optische systeem van den microfotometer betreft, dit is in hoofdlijnen reeds in fig. 4 geschetst. Hier volgen, onder verwijzing naar fig. 5, nadere bizonderheden. De lantaarn L met condensor C bevat een gloeilampje voorzien van een speciale fitting, die een onveranderlijken stand van het lampje, en bovendien een geheel betrouwbaar electrisch contact verzekert. De beide objectieven O_1 en O_2 zijn door middel van de beide schroeven M_1 en M_2 in de richting van de optische as te verstellen, en met behulp van de schroef N kan men de thermozuil T en tevens de spleet S_1 een zijdelingsche verschuiving geven. De lantaarn en de thermozuil zijn gemonteerd op twee ruiters I en V, de ruiter II draagt een montuur met de spleet S_2. De ruiters kunnen over de ijzeren rail V verschoven worden, en worden vastgeklemd.

Om den microfotometer in te stellen, verwijdert men voorloopig de spleet S_2, schuift het objectief O_2 tot vlak bij de fotografische plaat en verlicht zoodoende een vrij groot deel daarvan.

Men zorgt nu eerst voor de scherpe afbeelding van de fotografische plaat op het vlak der spleet S_1 en zoekt dus den juisten stand op van het objectief O_1. Wanneer de fotografische plaat, die men heeft te fotometreeren, b.v. een lijnenspectrum bevat, zal men daarna zorg dragen dat de geprojecteerde spectraallijnen evenwijdig loopen met de spleet S_1, die men hiertoe een weinig kan draaien. Nu wordt de spleet S_2 in haar montuur geschoven en op S_2 een scherp beeld van de spiraal der gloeilamp geworpen. Vervolgens zal men het objectief O_2 hebben in te stellen, om te zorgen dat ook de spleet S_2 scherp wordt afgebeeld op het vlak van S_1, daarna wordt het montuur van de spleet S_2 gedraaid [1]) tot het beeld daarvan evenwijdig is met S_1, en ten slotte wordt de spleet S_1 met behulp van de schroef N zooveel zijdelings verschoven, dat het beeld van S_2 met S_1 samenvalt. Men beoordeelt dit laatste het scherpst met behulp van den galvanometer, en draait dus N tot de maximale galvanometeruitslag is bereikt.

Met behulp van deze methode (maximale galvanometer-uitslag) kan men bovendien de instelling van de objectieven corrigeeren, in zooverre als de visueele scherpstelling niet volkomen overeenstemt met

[1]) De wijze waarop de spleet S_1 (en tevens de thermozuil), en de spleet S_2 om een horizontale as gedraaid kunnen worden, is niet in fig. 5 aangegeven.

de scherpstelling voor de langere golven, welke voor de thermozuil een hoofdrol spelen. Deze correctie kan men, als men niet het uiterste van den microfotometer verlangt, zonder bezwaar achterwegen laten.

Wat de opstelling van den microfotometer aangaat, zal men hoofdzakelijk hebben te letten op een goede plaats voor den galvanometer. Een gewone console aan een stevigen muur is daarvoor alleszins voldoende. Het registreeren behoeft niet in donker te geschieden, men heeft slechts te zorgen dat er geen direct licht op de cilinderlens van de registreertrommel valt. Men stelle de rail evenwijdig aan den muur en daarvan afgekeerd, het optische systeem is dan gemakkelijk toegankelijk [1]), en bij het instellen vervangt men tijdelijk de registreertrommel door een doorschijnende afleesschaal.

De beide spleten S_1 en S_2 zijn 6 m.m. lang, en 0.06 m.m. breed. Bij de gebruikelijke vergrooting (circa zesvoudig) heeft het oppervlak, waarvan men de zwarting bepaalt, dus een afmeting van 1 bij 0.01 m.m. De uitslag dien men dan verkrijgt met een heldere fotografische plaat (dus in de volkomen ongezwarte partijen) is, bij 1 meter afstand van galvanometer tot registreertrommel, circa 100 m.m.

Bij het onderzoek van zeer zwarte platen zal men breedere spleten prefereeren, in sommige gevallen korte spleten of zelfs vierkante openingen. De zeer eenvoudig geconstrueerde spleten van het instrument kunnen zonder bezwaar door anders gevormde vervangen worden.

De spleet S_2 kan ook wijder worden gekozen dan S_1, of ook geheel worden weggelaten, zelfs kan de condensor worden gemist, en de gloeiende spiraal zelf op de fotografische plaat worden afgebeeld. De galvanometer-uitslagen worden daardoor wel is waar grooter, maar fijne détails in de zwarting gaan verloren, en wel daardoor, dat de verstrooiing, welke de stralen ondervinden van de talloos vele reflecteerende zilverdeeltjes in de gelatinelaag een groote rol gaat spelen. Wanneer n.l. een breed gedeelte van de fotografische plaat wordt verlicht, zullen tengevolge van deze verstrooiing stralen naar de thermozuil worden gezonden, die wel afkomstig zijn van het geobserveerde smalle gebied, maar primair afkomstig zijn van naast liggende plaatsen. En zoo zal de mate van zwarting van die naastliggende plaatsen mede van invloed zijn op den galvanometer-uitslag.

Dit euvel wordt in den microfotometer van KOCH niet verholpen door een spleet, die hij *achter* de fotografische plaat heeft aangebracht, (S' in fig. 2). Deze spleet komt slechts de scherpte van afbeelding ten goede, doordat ze het ,,valsche licht" ten deele afdekt.

[1]) De thermozuil is door een glazen plaatje afgedekt, en dus ongevoelig voor de „stralende warmte" van den waarnemer uitgaande.

In het thans beschreven toestel zijn beide storende invloeden, de verstrooiing en het valsche licht, tot een minimum teruggebracht. Door namelijk niet de lichtbron zelf, maar een smalle verlichte spleet op de fotografische plaat af te beelden, wordt alleen de plaats die in observatie is belicht, en wordt alle overbodige licht, en dus ook alle storingen die dit licht zou veroorzaken, uitgesloten.

Ten slotte mogen eenige diagrammen met den nieuwen micro-fotometer opgenomen, de wijze waarop het instrument werkt illustreeren.

Fig. 6 is de reproductie van een diagram geleverd door een ZEEMAN-sextet. De fotografische plaat werd mij welwillend door Prof. P. ZEEMAN afgestaan.

Fig. 7 is een reproductie van een diagram verkregen, niet met een fotografische plaat, maar met een „Abbesche Testplatte". Het zelfde object werd 2 maal achtereenvolgens opgenomen. De Testplatte bestaat uit een zilverlaag op glas, waarin 4 reeksen ieder van 11 lijnen zijn gekrast. Ieder van die lijnen heeft een breedte van circa 0.02 mm., en de tusschenruimte tusschen twee lijnen is ongeveer even breed. De lijnen zijn met opzet niet regelmatig gekrast, en zoo vertoont het diagram duidelijke verschillen tusschen de verschillende lijnen. Maar daarentegen is er volkomen overeenstemming tusschen beide opnamen onderling.

Mij rest een woord van dank te brengen aan de heeren Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN en Dr. H. C. BURGER. De eerste heeft mij door zijn onverflauwd enthousiasme, zijn groote belangstelling en zijn vriendschap aangemoedigd, en mij opgewekt steeds naar betere resultaten te streven, de tweede heeft mij met zijn raad herhaaldelijk bijgestaan.

Den bekwamen instrumentmaker van het Physisch Laboratorium te Utrecht, den heer G. KOOLSCHIJN dank ik voor zijn hulp.

De complete micro-fotometer, zooals geschetst in fig. 5, met den bijbehoorenden galvanometer, thermozuil, registreertrommel, etc. wordt geleverd door de N.V. P. J. KIPP en Zonen te Delft.

Utrecht, October 1919.

Geologie. — De Heer MOLENGRAAFF biedt eene mededeeling aan van den Heer H. A. BROUWER. „*Kristallisatie en Resorptie in het Magma van den Vulkaan Roeang*". (*Sangi eil.*).

(Deze mededeeling zal in een volgend Zittingsverslag worden opgenomen).

Voor de boekerij der Akademie biedt de Heer J. P. KUENEN ten geschenke aan een exemplaar van zijn onlangs verschenen werk „*Die Eigenschaften der Gase* (*Kinetische Theorie. Zustandsgleichung*)", uitgegeven als Band III van „Handbuch der allgemeinen Chemie herausgegeben von W. Ostwald und C. Drucker".

De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

In de mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „*Over de structuur der perfekte puntverzamelingen*" (derde mededeeling) p. 374

r. 6 *staat*: een zoodanige met ε tot 0 convergeerende
lees: een zoodanige slechts van ε en μ afhangende en voor vaste μ met ε tot 0 convergeerende

r. 17 *staat*: een zoodanige met ε' tot 0 convergeerende
lees: een zoodanige slechts van ε' en μ afhangende en voor vaste μ met ε' tot 0 convergeerende